Методы анализа электрических машин

Магнитное поле электрической машины

МА-01

2023

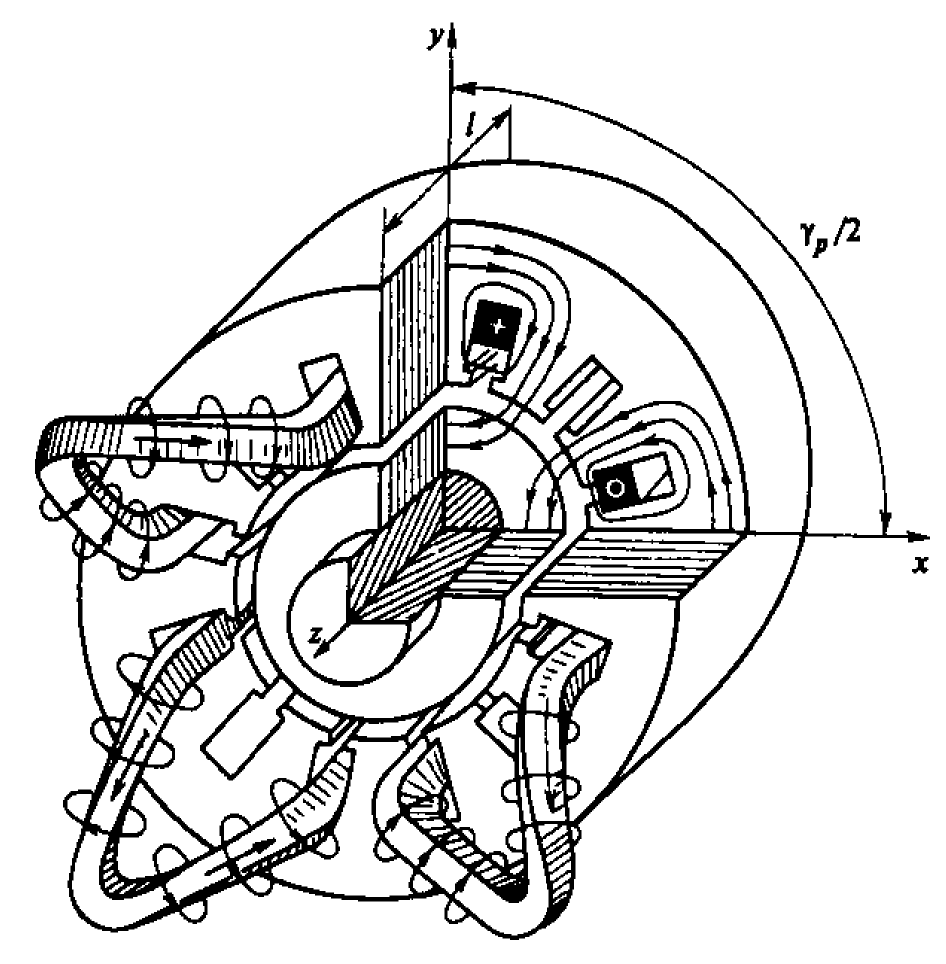
Магнитное поле электрической машины

Источники магнитного поля:

- Обмотка якоря (переменный многофазный ток)
- Обмотка возбуждения (постоянный ток)
- Постоянные магниты (постоянный поток)

Магнитное поле от токов одной фазы обмотки якоря

- Трехмерное поле
- Периодический характер поля
- Разные свойства материалов



Разный характер поля

- магнитопровод
- немагнитный зазор
- область пазов
- лобовые части
- конструктивные элементы

Ширинский С.В., каф. ЭМЭЭА, НИУ "МЭИ"

Магнитопровод

Электротехническая сталь

- свойства среды – нелинейные: $B = f(H)$
- относительная магнитная проницаемость $\mu_{ст} >> 1$

$\rightarrow$ напряженность магнитного поля H мала

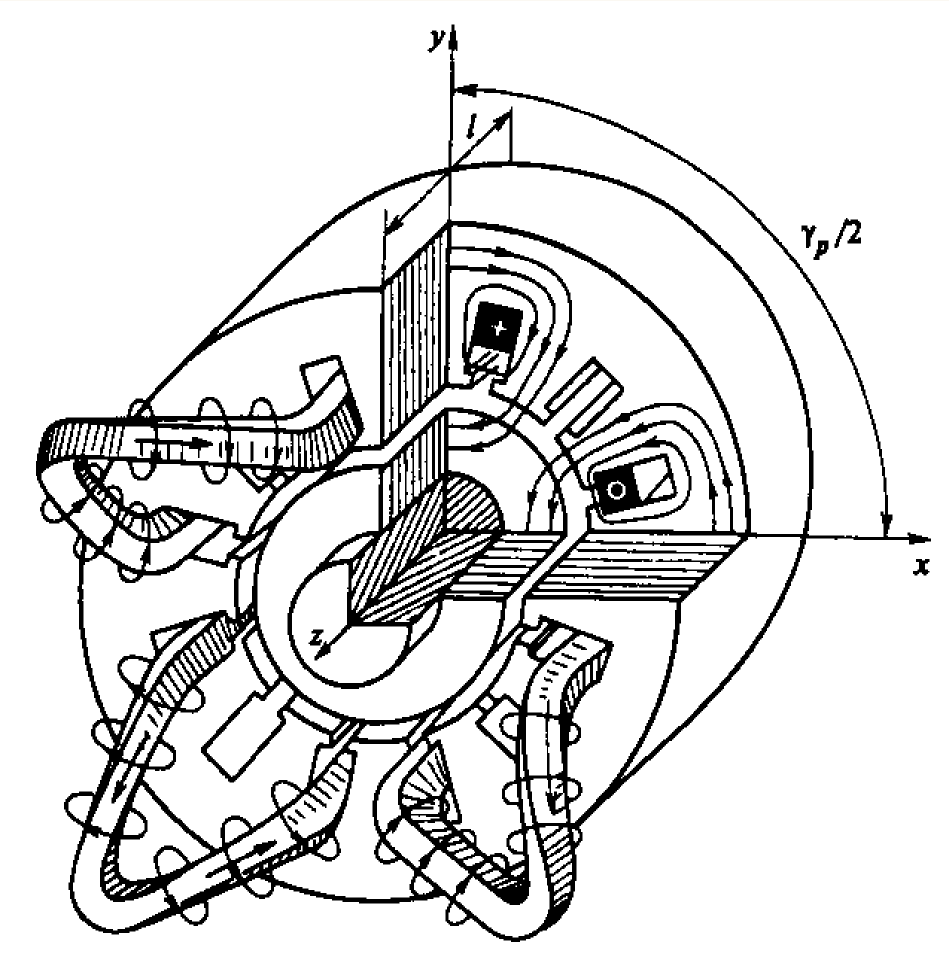
$\rightarrow$ плотность энергии магнитного поля $w = (BH)/2$ мала

$\rightarrow$ малая часть энергии магнитного поля W

Характер поля предсказуемый

- в зубцах поток радиальный
- в элементах ярма поток тангенциальный
- каждый элемент магнитопровода с равномерным Φ можно заменить сосредоточенным элементом с нелинейной характеристикой намагничивания $\Phi = f(U_\mu)$

Можно рассчитать не поле, а эквивалентную цепь с сосредоточенными элементами и получить $B_{ср}(H_{ср})$ в каждом элементе с учетом насыщения



Поле в области паза

Пазовое рассеяние

- линейная среда (медь, алюминий, изоляция)
- $\mu = 1 \rightarrow$ индукция магнитного поля *B* мала

$\rightarrow$ мала энергия магнитного поля *W*

Характер поля известен для пазов известной формы

- инженерные формулы – проводимость пазового рассеяния $\Lambda_{\sigma п} = \Psi_{\sigma п} / I_{паза}$

Можно вставить элемент $\Lambda_{\sigma п}$ в эквивалентную цепь

Поле в области лобовых частей

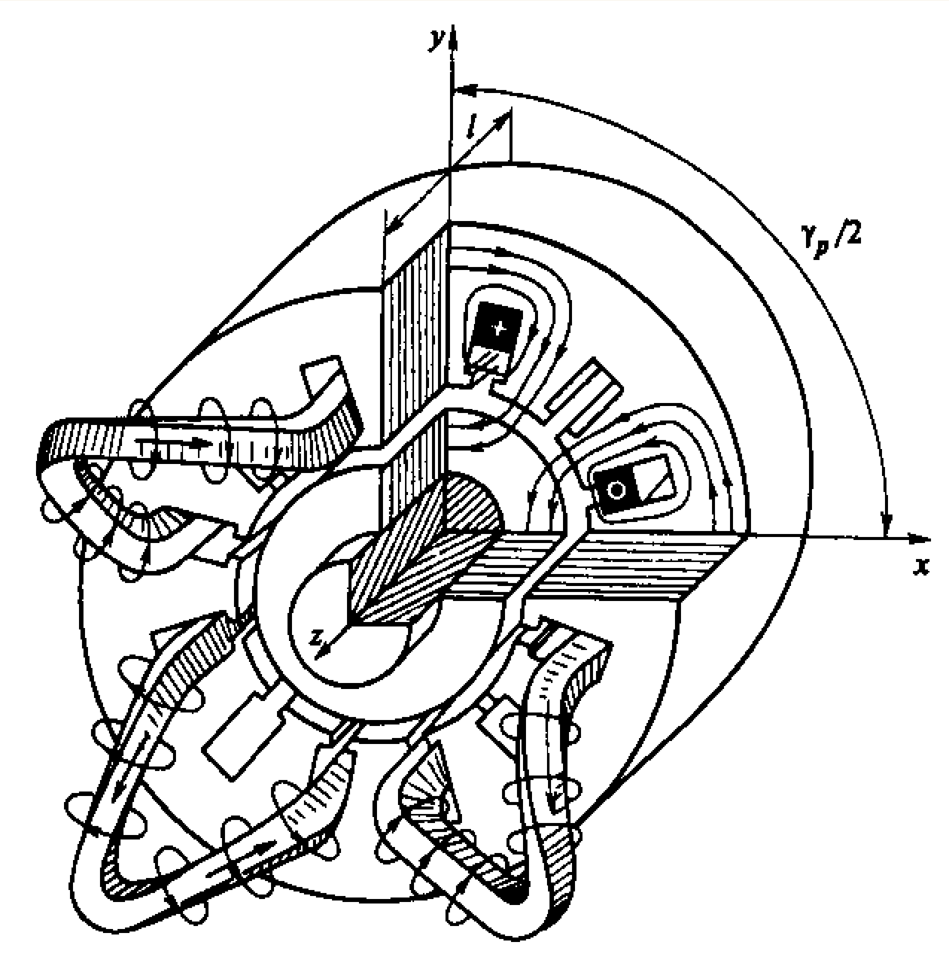
Лобовое рассеяние

- линейная среда (воздух и обмотки)
- $\mu = 1 \rightarrow$ индукция *B* мала $\rightarrow$ мала энергия поля *W*

Характер поля сложный, трехмерный

- инженерные формулы – проводимость лобового рассеяния $\Lambda_{\sigma л} \rightarrow$ индуктивность $L_{\sigma л}$

Можно учесть $L_{\sigma л}$ в уравнениях электрической цепи



Поле в немагнитном зазоре

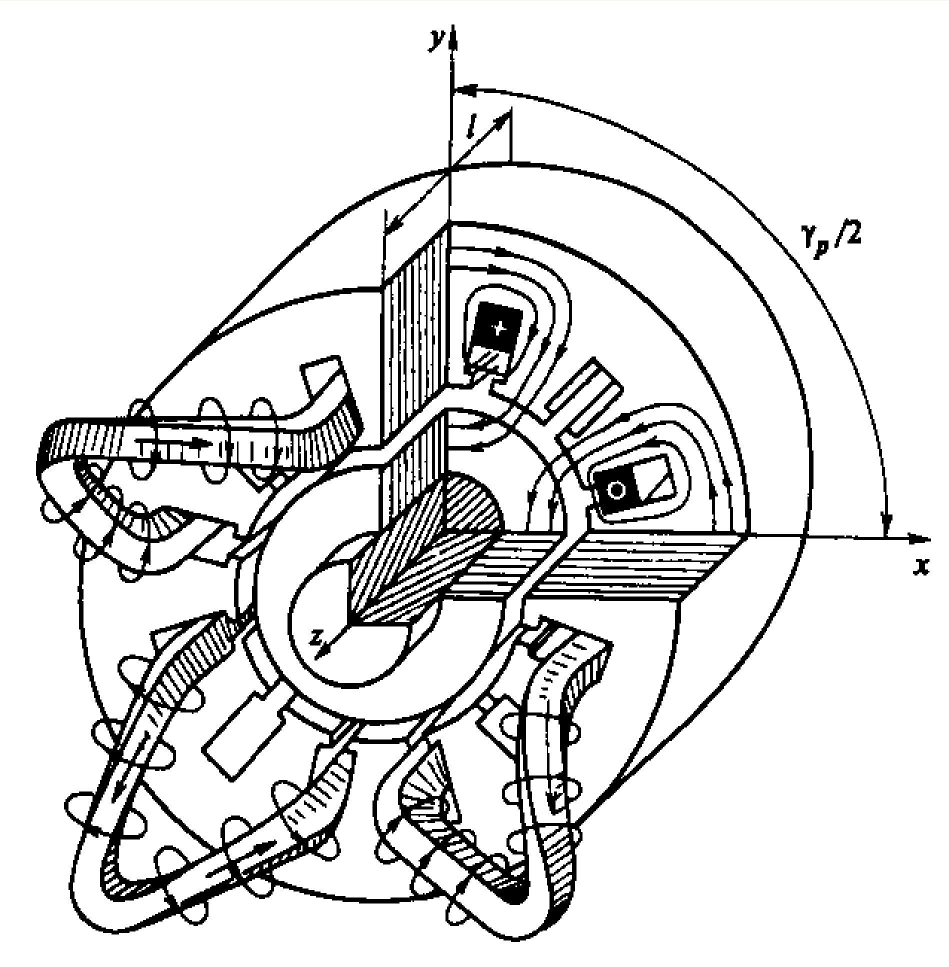
Самое важное поле

- почти вся энергия магнитного поля – в зазоре
- в нем – преобразование энергии

Характер поля сложный и постоянно изменяется при изменении токов и вращении ротора

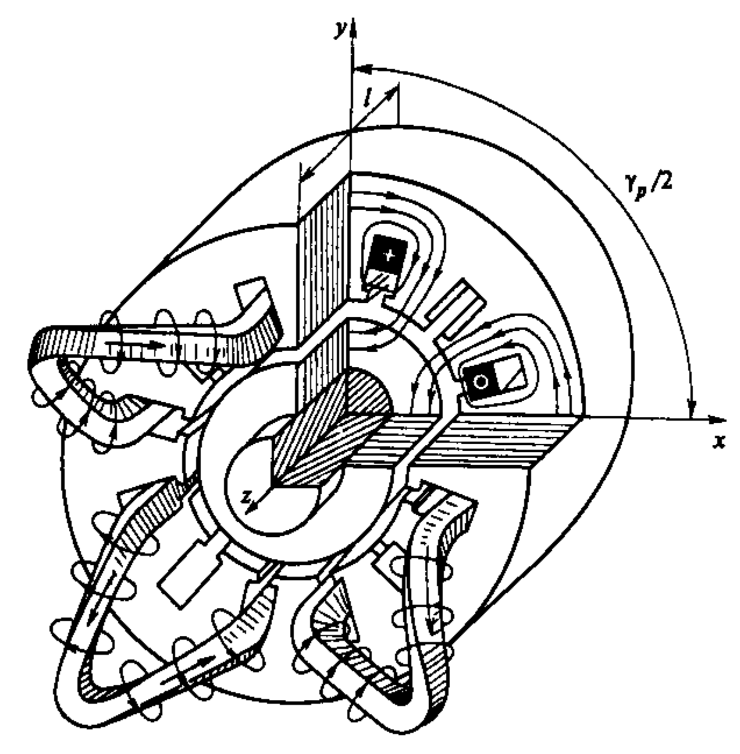
- изменяется периодически – можно сократить расчетную область
- линейная среда – можно применять метод суперпозиции

Можно найти закономерности для упрощения анализа



Учет продольной неоднородности при анализе поля

Переход 3D → 2D



Магнитное поле трехмерно, но

- поле проводника с током одинаково в любой поперечной плоскости
- поле между сердечниками ЭМ одинаково в любом поперечном сечении
- достаточно считать поток плоско-параллельного поля «на единицу длины» и домножать на реальную длину l_z

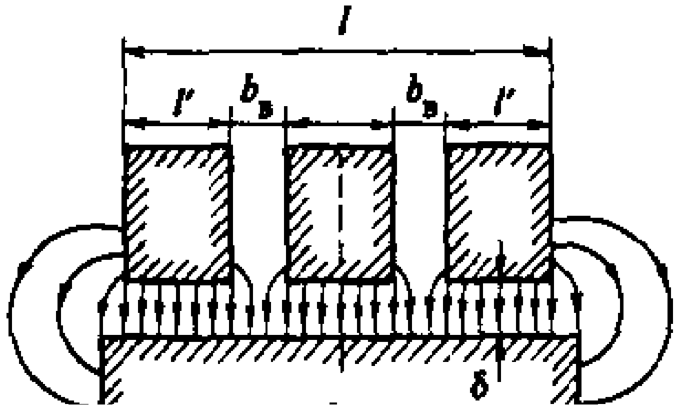
(очень существенная экономия вычислительных ресурсов)

Структура ЭМ неоднородна в продольном направлении

- краевые эффекты (затухание поля на торцах ЭМ)
- разная длина сердечников статора и ротора
- охлаждающие каналы между пакетами сердечника с $\mu = 1$

Что считать «реальной длиной ЭМ»?

Переход 3D → 2D



Рассмотрим поле в продольном сечении

- учтем все неоднородности
- реальные размеры сердечников
- униполярное намагничивание (например, на оси полюса)

Распределение индукции вдоль зазора

- между сердечниками поле равномерно и $B = B_m$
- напротив каналов B снижается
- на торцах поле затухает постепенно

Найдем полный поток $$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} B dz$$

Заменим реальную кривую $B(z)$ прямоугольником с $B = B_m$ и длиной l_δ

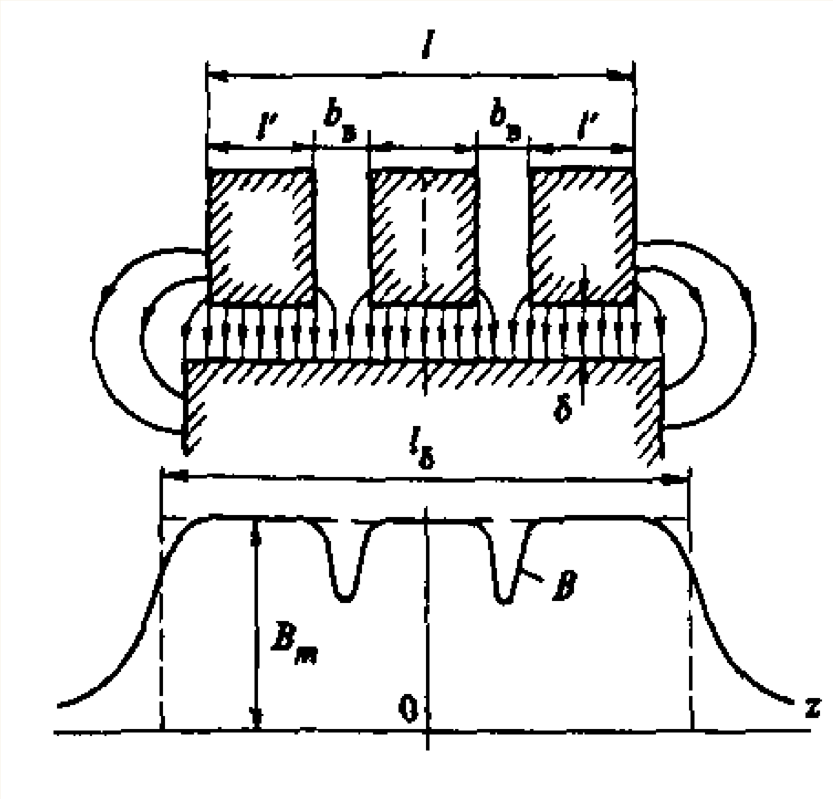
Поток в ЭМ с равномерной индукцией $B = B_m$ останется неизменным, если выбрать длину l_δ так, чтобы

$$l_\delta B_m = \Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} B dz$$

Переход 3D → 2D

l_δ – расчетная длина машины

$$l_\delta = \frac{1}{B_m} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B dz$$



Для большинства известных ЭМ есть инженерные формулы, например

$$l_\delta = l_{ст} - n_в b'_в + 2\delta$$

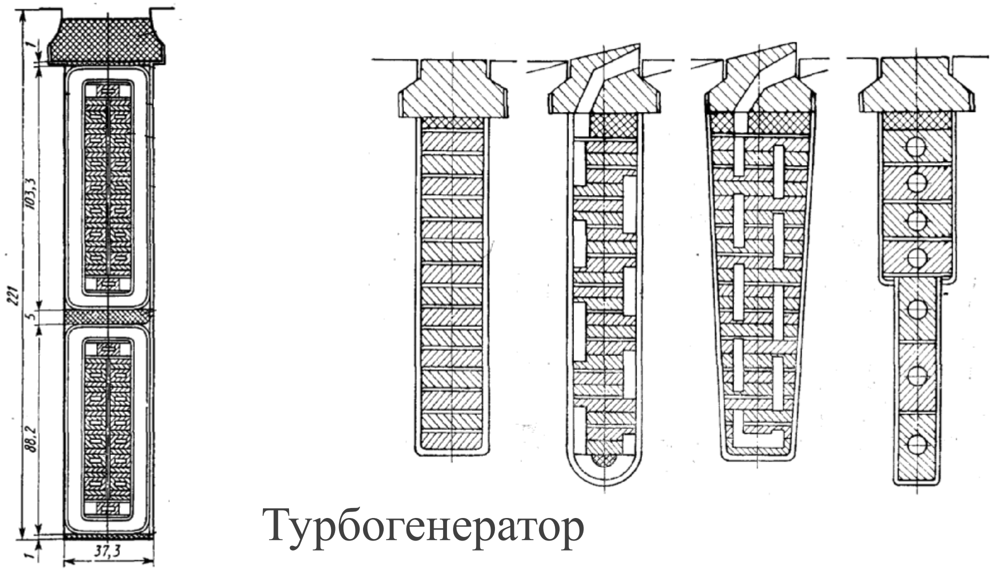
где $b'_в = c_0 c_в b_в$, $c_в = \dfrac{b_в/(c_0\delta)}{5 + b_в/(c_0\delta)}$,

$c_0 = 1$ или 0,5 при каналах на одном или на двух сердечниках

В дальнейшем будем считать 2D поле в поперечном сечении и учитывать расчетную длину машины l_δ

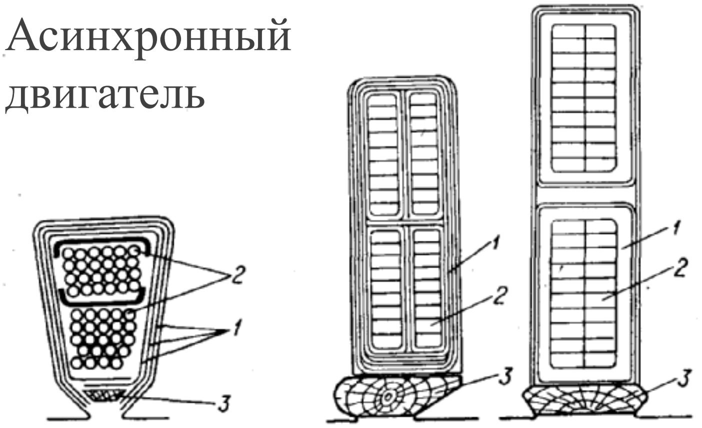
Магнитное поле в зазоре ЭМ

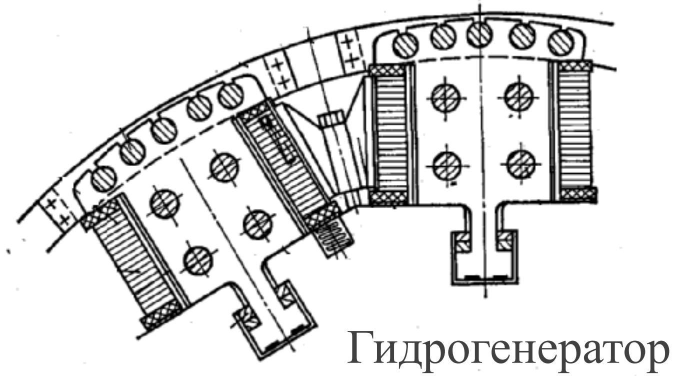
Воздушный (немагнитный) зазор не является гладким



Турбогенератор

Асинхронный двигатель



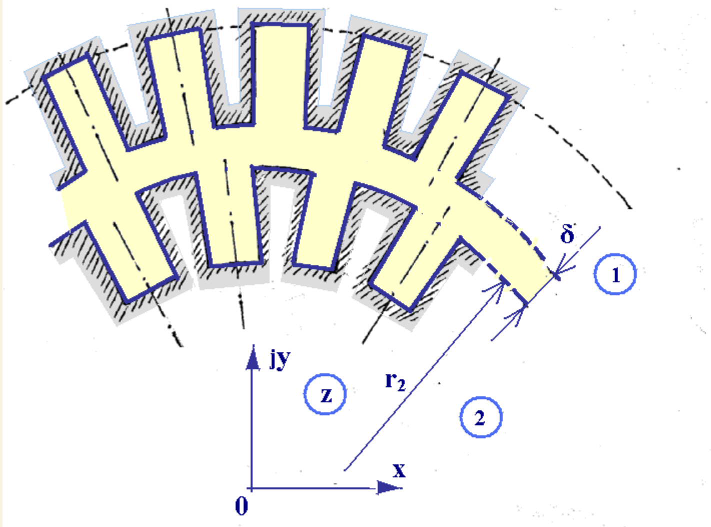


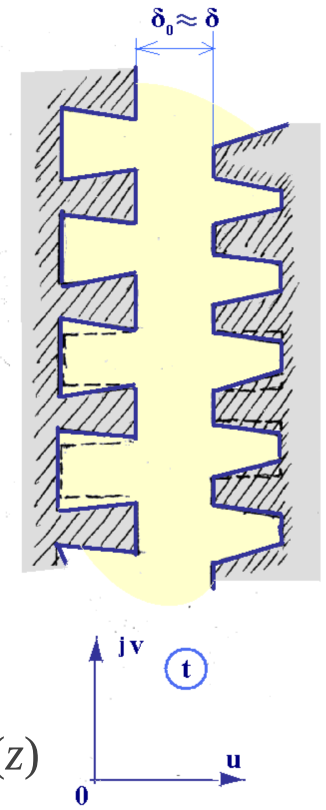
Гидрогенератор

Магнитное поле в зазоре, созданное токами в пазах

Численное решение (полевой расчет) – частное решение с минимальными допущениями
Аналитическое решение – общее решение для принятых допущений

Аналитическое решение – алгебраическое выражение:
зависимость величин поля от параметров
(характерные размеры, свойства среды)
Позволяет анализировать зависимости и принимать обоснованные решения при конструировании ЭМ





Логарифмическое конформное преобразование $t = \ln(z)$

Примем допущения

- только первый сердечник зубчатый, второй – гладкий
- поле создается обмоткой в пазах первого сердечника
- рассмотрим только поле в зазоре
- магнитная цепь линейна ($\mu_{ст} = \infty$)
- кривизна зазора устраняется конформным преобразованием

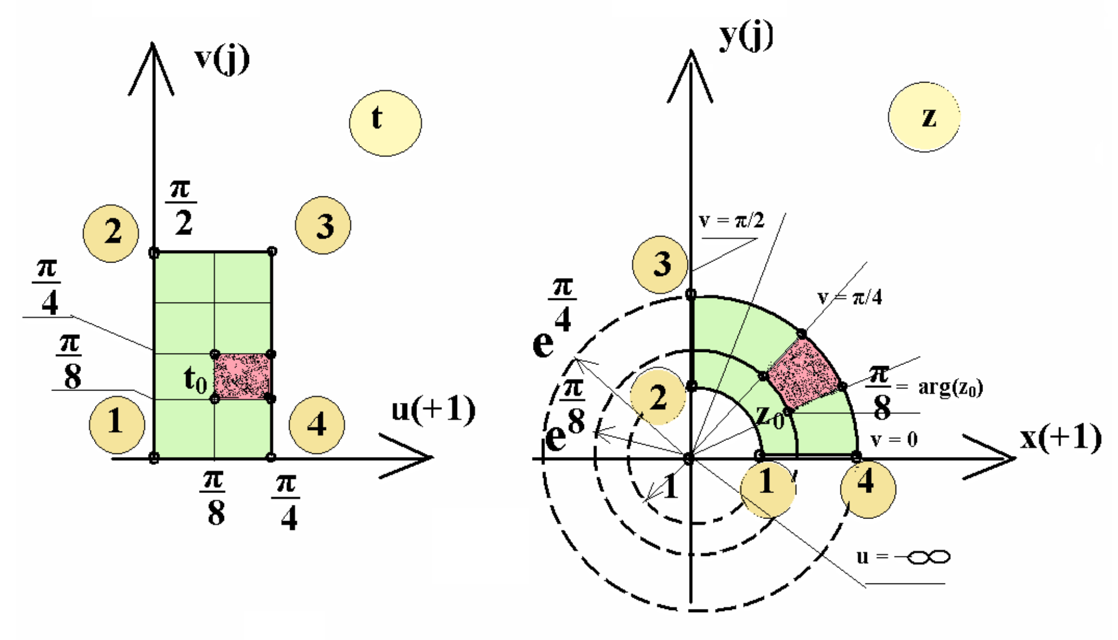
Конформные преобразования

Взаимно однозначное отображение исходной области *z* на область *t*, при котором сохраняются углы между кривыми и формы бесконечно малых фигур (отображение поверхности земного шара на плоскость – проекция Меркатора)

Позволяет использовать известное решение простой задачи для получения решения сложной задачи

Пример: логарифмическое преобразование прямоугольная область в плоскости *t* преобразуется в отрезок кольца в плоскости *z* $z = e^{t} = f(t)$

или наоборот $t = \ln z = F(z)$



Для точки $t = u+jv$ соответствующая координата *z*

$$z = e^{u+jv} = e^{u}(\cos v + j\sin v) = x + jy$$

т.е. $x = e^{u}\cos v,\ y = e^{u}\sin v$

- линии u = Const в плоскости *z* – окружности
- линии v = Const в плоскости *z* – радиальные лучи

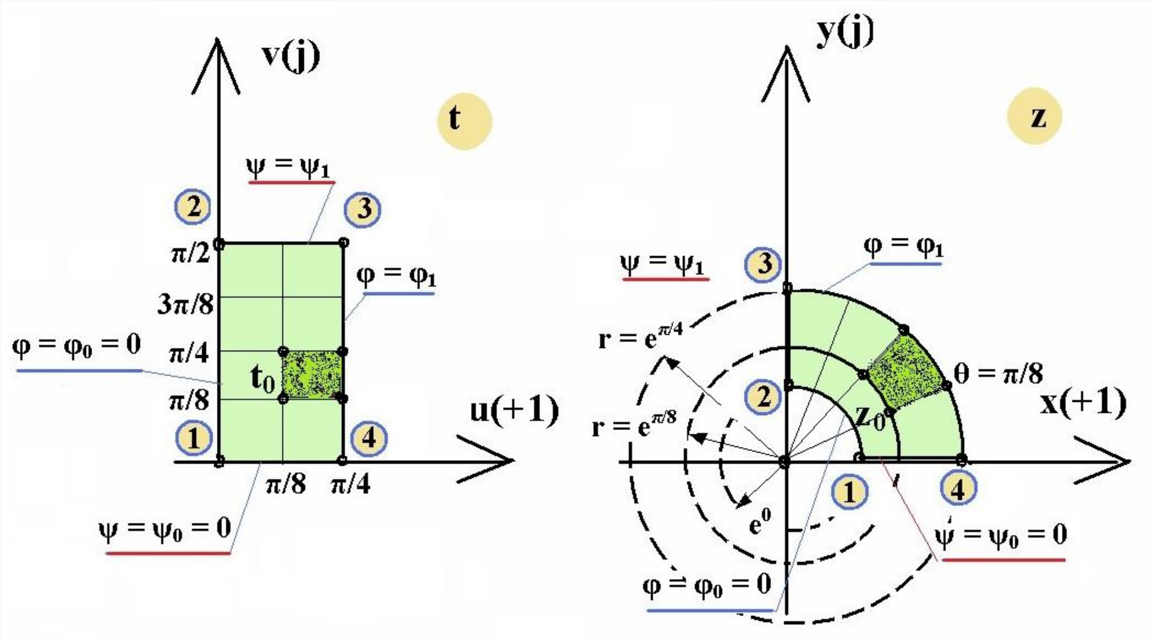
Поиск решения

Для преобразования $z = f(t)$ по известным граничным условиям и решению задачи в плоскости t (комплексная потенциальная функция $w(t)$) надо найти решение $w(z)$

Иногда это невозможно, но можно найти производную

Условие разрешимости задачи: границы области являются линиями потока или равного потенциала

Если при этом сохранены граничные условия, то решение сохраняется (только преобразуются координаты)



Пример: известно решение в плоскости t, причем прямоугольник ограничен линиями функции потока φ_0 и φ_1 и линиями скалярного магнитного потенциала ψ_0 и ψ_1

Комплексная потенциальная функция $w(t)=\varphi_t+j\psi_t$:

$$\begin{cases} \varphi_t = \varphi_1 \dfrac{u}{\pi/4} = \dfrac{4}{\pi}\varphi_1 u \\ \psi_t = \psi_1 \dfrac{v}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}\psi_1 v \end{cases}$$

Поиск решения

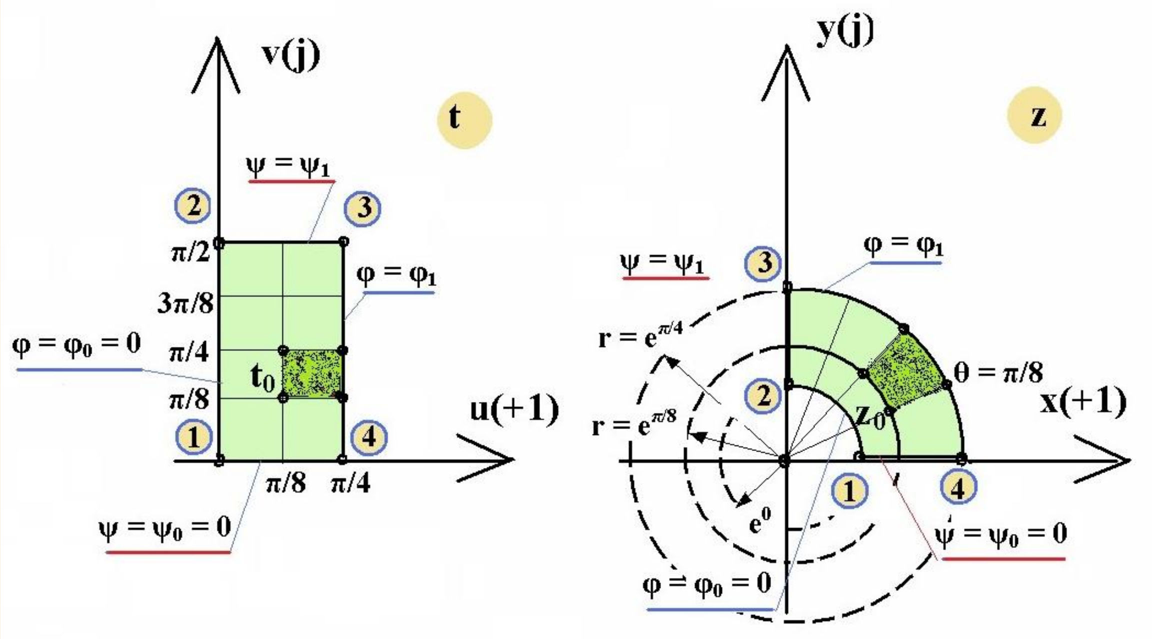
Комплексная потенциальная функция $w(t) = \frac{4}{\pi}\varphi_1 u + j\frac{2}{\pi}\psi_1 v$

С помощью условий Коши-Римана выразим функцию потока на границе через потенциал

$$\frac{\partial\psi_t}{\partial v} = \frac{\partial\varphi_t}{\partial u} \quad \to \frac{2}{\pi}\psi_1 = \frac{4}{\pi}\varphi_1 \quad \to \varphi_1 = \frac{\psi_1}{2}$$

Тогда комплексная потенциальная функция в плоскости t

$$w_t(t) = \frac{4}{\pi}\frac{\psi_1}{2}u + j\frac{2}{\pi}\psi_1 v = \frac{2}{\pi}\psi_1(u + jv) = \frac{2}{\pi}\psi_1 t$$



Найдем комплексную потенциальную функцию в преобразованной плоскости z

$$w_t(t) = w_t(F(z)) \to \frac{2}{\pi}\psi_1 t = \frac{2}{\pi}\psi_1 \ln(z)$$

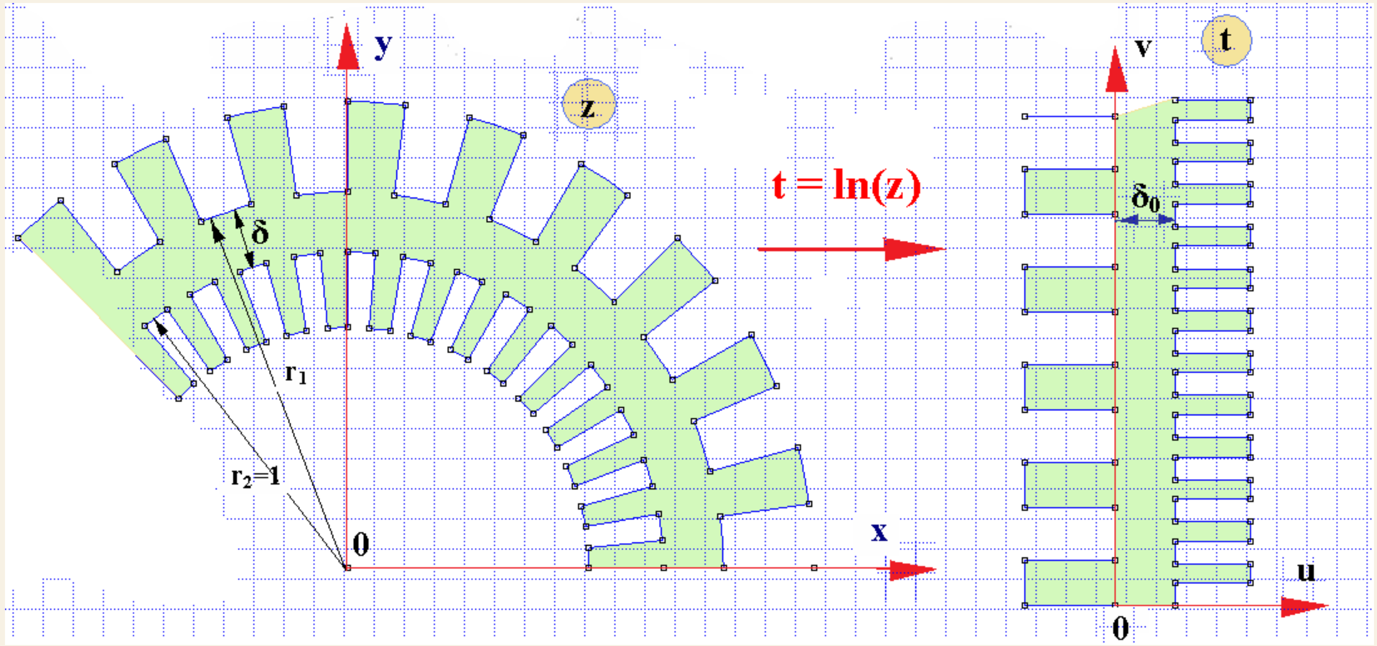
$$= \frac{2}{\pi}\psi_1 \ln(r\,e^{j\theta}) = \frac{2}{\pi}\psi_1 \ln(r) + j\frac{2}{\pi}\psi_1\theta = w_z(z)$$

Функция сохранилась
в преобразованных координатах

Ширинский С.В., каф. ЭМЭЭА, НИУ "МЭИ"

Возвращаясь к зазору ЭМ с учетом зубчатости

Применение логарифмического преобразования позволяет перейти к анализу поля в плоском зазоре



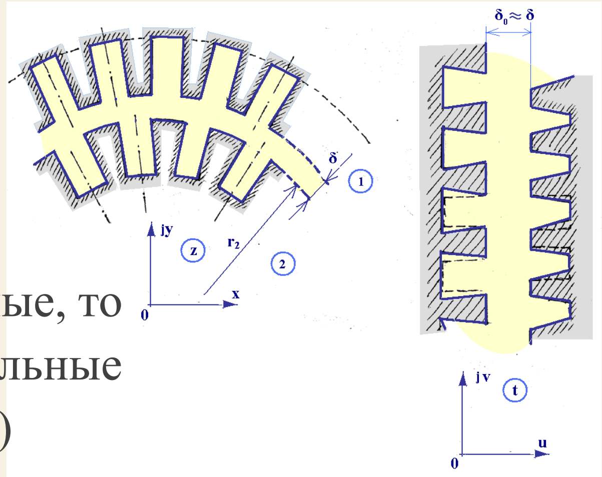
Воздушный зазор в преобразованной области

$$\delta_0 = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} + \ldots = \ln(1+\delta)$$

Для δ = 0,5 мм

$$\delta_0 = \ln(1+0,0005) = 0,000499875$$

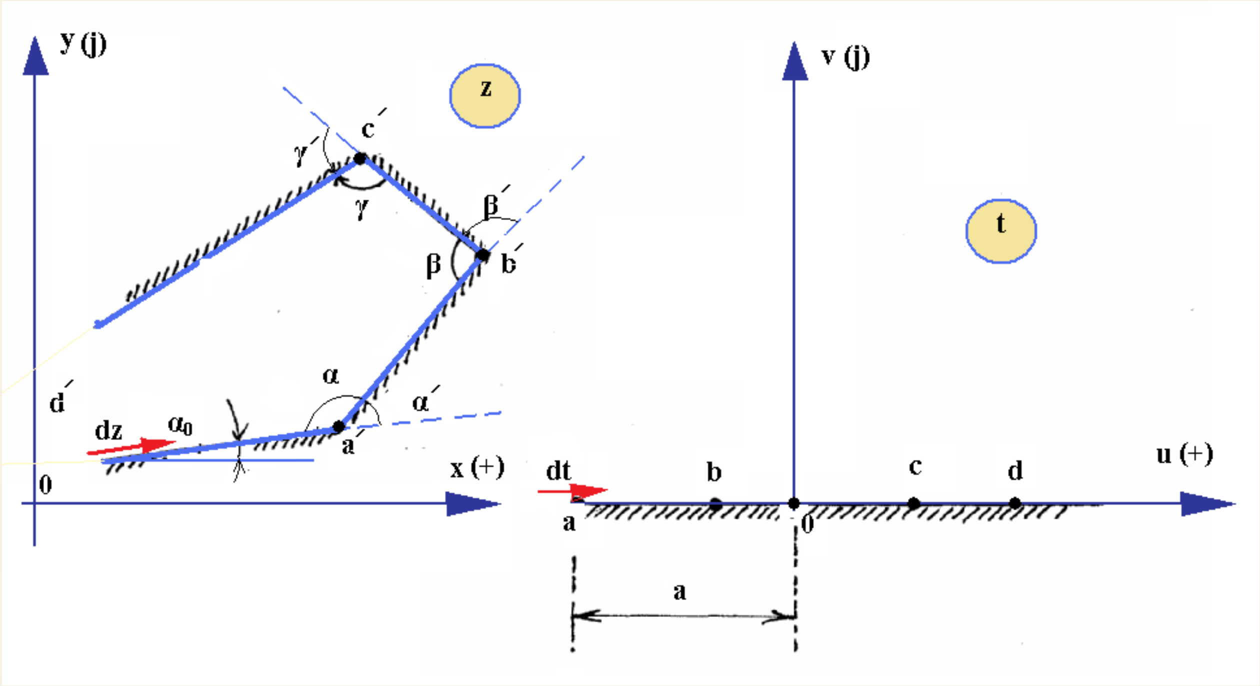
Если в ЭМ стенки открытых пазов направлены радиально, то в плоскости *t* пазы получаются прямоугольными



Если в ЭМ пазы прямоугольные, то в плоскости *t* они трапецеидальные (на поле в зазоре не повлияет)

Преобразование Шварца-Кристоффеля

Особый вид преобразования, при котором многоугольная область задачи отображается на верхнюю полуплоскость



Вершины многоугольника отображаются в точки на действительной оси плоскости *t*

α, β, γ – внутренние углы многоугольника
α', β', γ' – дополнительные углы (до π)

Аналитическим выражением преобразования Ш-К является решение диф. уравнения

$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)^{\left(\frac{\alpha}{\pi}-1\right)} \cdot (t-b)^{\left(\frac{\beta}{\pi}-1\right)} \cdot \ldots$$

Здесь *S* – константа, *a*, *b*, … – координаты вершин в плоскости *t*

Удобнее записывать уравнение Ш-К через дополнительные углы

$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)^{-\frac{\alpha'}{\pi}} \cdot (t-b)^{-\frac{\beta'}{\pi}} \cdot \ldots$$

Ширинский С.В., каф. ЭМЭЭА, НИУ "МЭИ"

Уравнение Шварца-Кристоффеля

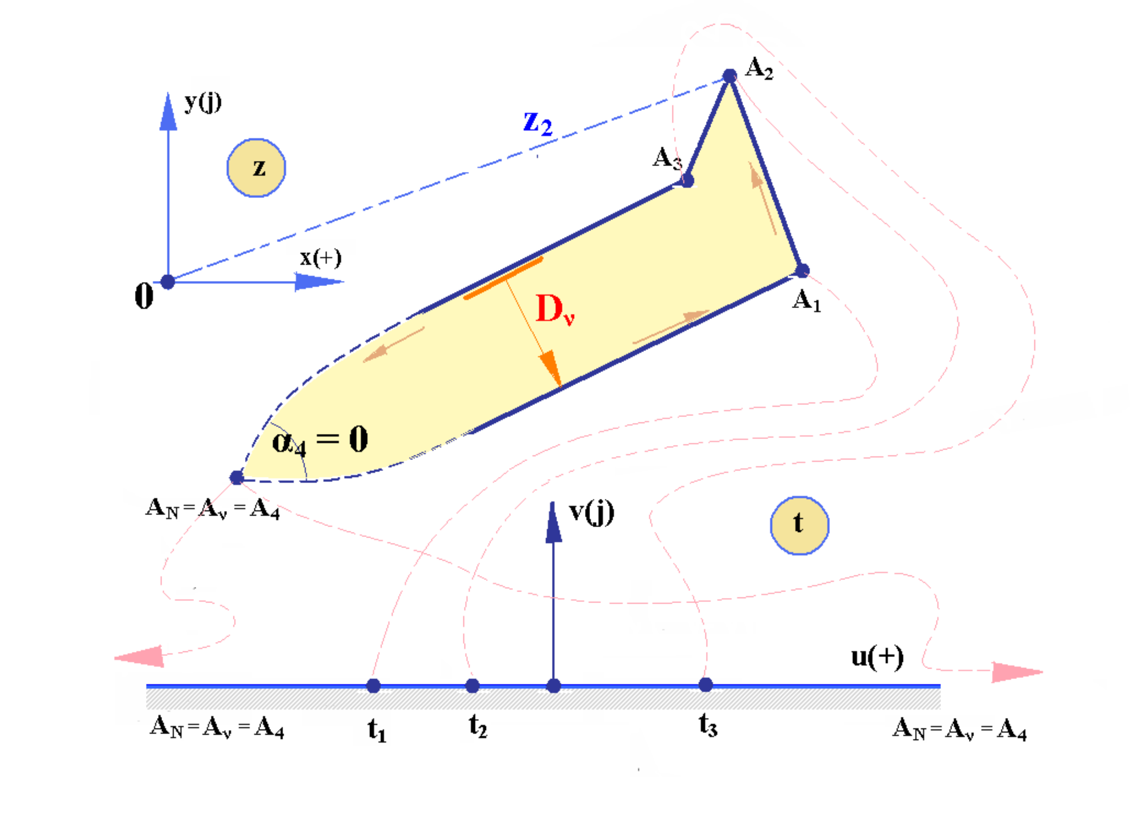
$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)^{-\frac{\alpha'}{\pi}} \cdot (t-b)^{-\frac{\beta'}{\pi}} \cdot \ldots$$

можно записать в виде $dz = f(t)dt$

Для определения функции преобразования координат надо интегрировать уравнение Ш-К

$$z = \int f(t)dt + K$$

Следует определить константы S, K и координаты вершин a, b, …



Для уменьшения числа сомножителей (и числа неизвестных констант) можно отображать вершины в +∞ и -∞

Можно выбирать удобную привязку одной из вершин к началу координат

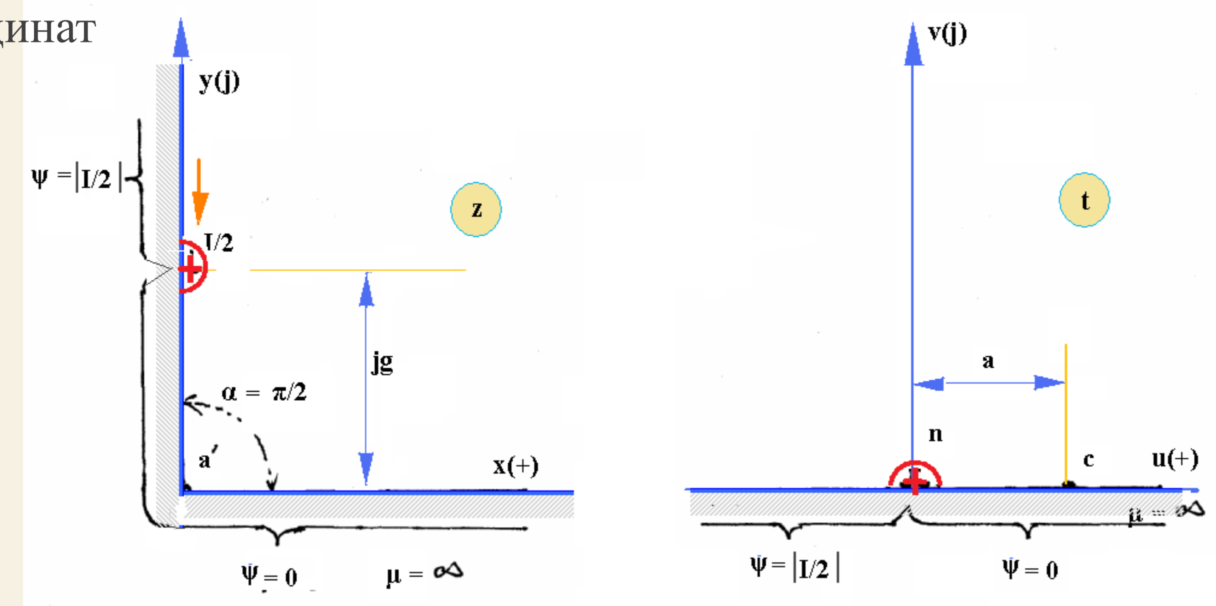
Также можно отображать в ±∞ вершины «открытых» многоугольников

Например, две параллельные прямые «пересекаются» в бесконечности под углом $\alpha_4 = 0$
Эту вершину можно отразить в ±∞, чтобы уменьшить число сомножителей в уравнении

Пример конформного преобразования Шварца-Кристоффеля

Найти поле тока $I/2$, расположенного на расстоянии g от вершины ферромагнитного угла a', равного $\pi/2$

Пусть в плоскости t ток расположен в начале координат в точке n, а угол a' – в точке c на расстоянии a



Уравнение Ш-К $\quad \dfrac{dz}{dt} = S(t-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1} = S(t-a)^{-\frac{1}{2}}$

$$z = S\int (t-a)^{-\frac{1}{2}} dt = S\frac{(t-a)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + K$$

$$z = 2S(t-a)^{\frac{1}{2}} + K$$

Для поиска констант сопоставим вершины

	в пл. z	в пл. t	уравнение Ш-К
угол $a' \to c$	$z = 0$	$t = a$	$0 = 2S\cdot 0 + K \to K = 0$
ток $I/2 \to n$	$z = jg$	$t = 0$	$jg = 2S\sqrt{-a}$

Т.к. a – вещественное, то и $2S$ вещественное

Пусть $2S = 1$, тогда $\quad jg = \sqrt{-a} \to a = g^2$

Уравнение преобразования координат

$$z = (t-g^2)^{\frac{1}{2}}$$

Пример конформного преобразования Шварца-Кристоффеля

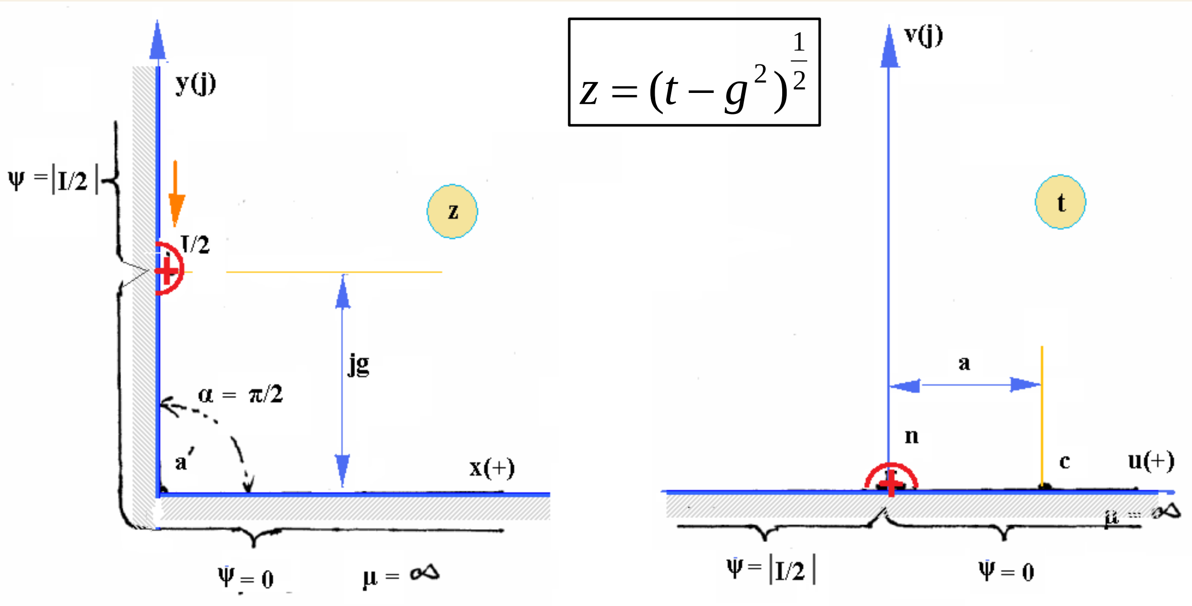
Для решения задачи зададим граничные условия (одинаковые в z и t):
слева от тока потенциал $\psi = I/2$, справа – $\psi = 0$

В плоскости t решение известно
(поле тока в верхней полуплоскости)

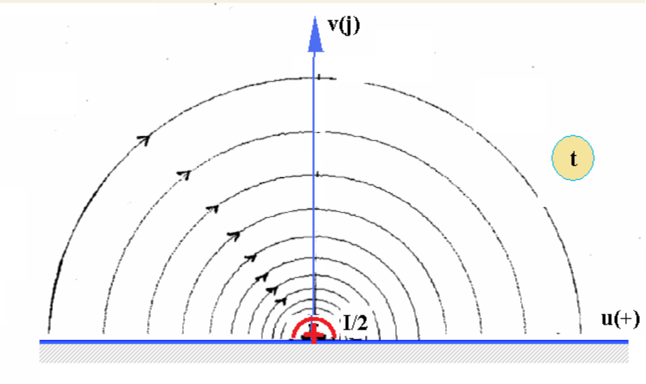
$$w = \frac{I/2}{\pi} \ln t$$

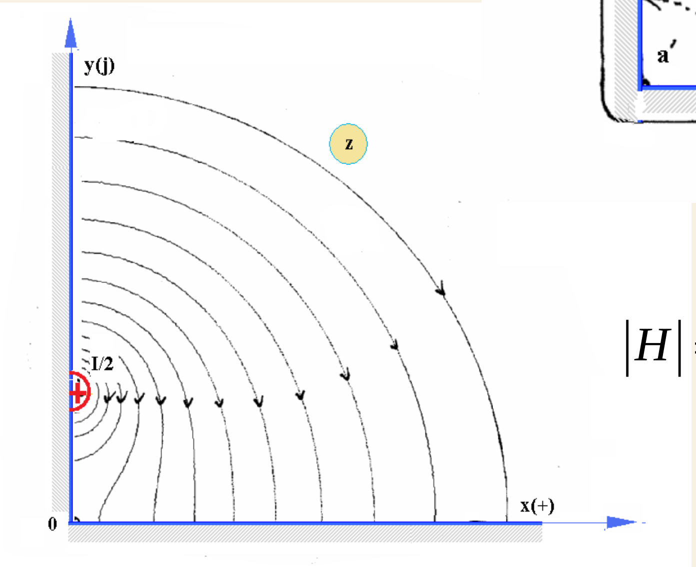
Распространим его на z с помощью $t = z^2 + g^2$

$$w = \frac{I/2}{\pi} \ln(z^2 + g^2) = \varphi_z + j\psi_z$$



Построим картины поля
(линии уровня функции потока)





Напряженность поля в плоскости z

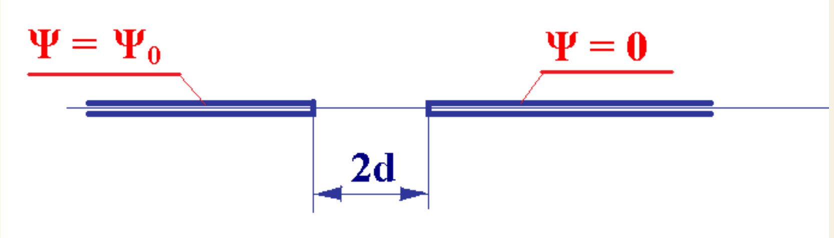
$$|H| = \left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{I/2}{\pi}\left|\frac{2z}{z^2+g^2}\right| = \frac{I/2}{\pi}\left|\frac{2(x+jy)}{x^2+2jxy-y^2+g^2}\right|$$

Одновременно решена задача о токе $2(I/2)$
над ферромагнитной поверхностью

Пример 2: задача о поле двух намагниченных пластин

Даны две намагниченные пластины на расстоянии $2d$

Пластины бесконечно тонкие с $\mu_{ст} = \infty$ и потенциалами ψ_0 и 0

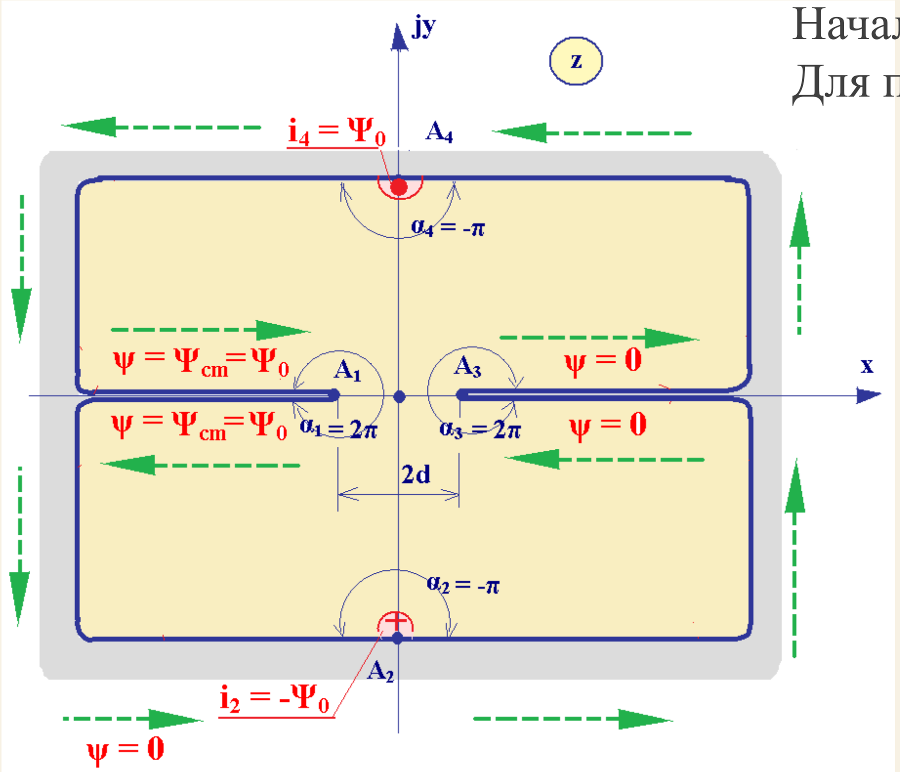


В плоскости z рассмотрим четырехугольник с двумя вершинами A_2 и A_4 в ∞

Начало координат – посередине отрезка между пластинами.

Для получения требуемых потенциалов в этих вершинах разместим токи

$i_2 = -\psi_0$ и $i_4 = +\psi_0$



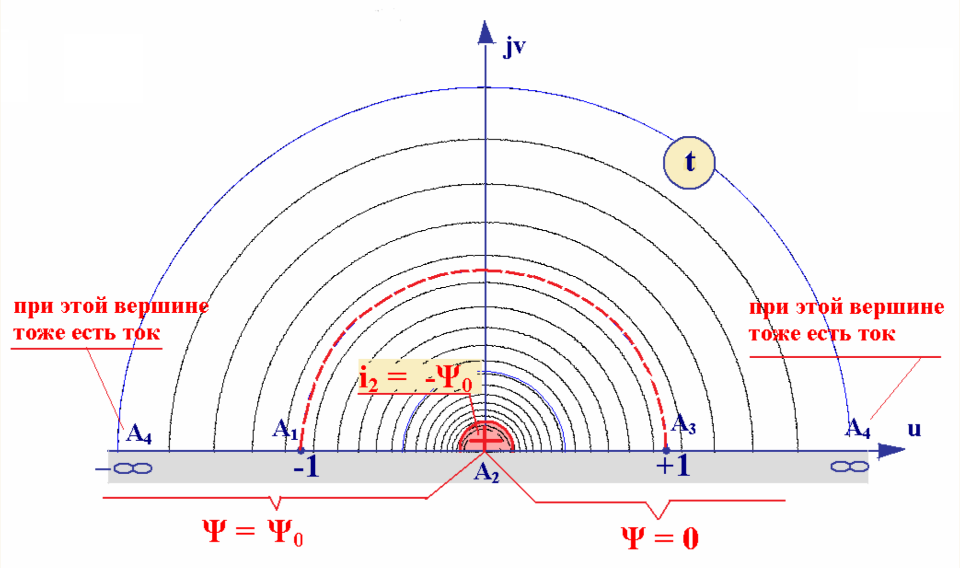
Отобразим четырехугольник на вещественную ось плоскости t:

A_2 на $t_2 = 0$

A_1 на $t_1 = -1$

A_3 на $t_3 = +1$

A_4 на $t_4 = \pm\infty$



Ширинский С.В., каф. ЭМЭЭА, НИУ "МЭИ"

Пример 2: задача о поле двух намагниченных пластин

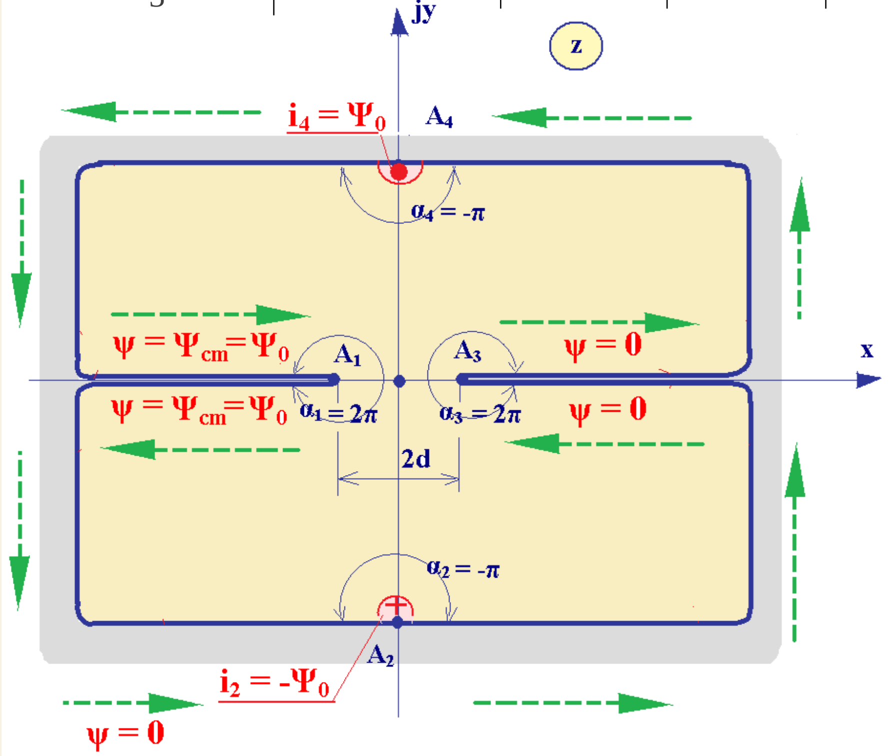
сопоставим вершины	в пл. z	в пл. t	угол α_k	доп.угол α'_k	степень $-\alpha'_k/\pi$
A_1	$z=-d$	$t=-1$	2π	$-\pi$	1
A_2	$z=-j\infty$	$t=0$	$-\pi$	2π	-2
A_3	$z=d$	$t=1$	2π	$-\pi$	1

Уравнение Шварца-Кристоффеля

$$\frac{dz}{dt}=S(t+1)^1 t^{-2}(t-1)^1 = S\frac{t^2-1}{t^2}=S\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

Преобразование координат

$$z=\int S\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt+K=S\left(t+\frac{1}{t}\right)+K$$



Неизвестные найдем по вершинам A_1 и A_3

A_1: $z_1 = -d = S(-1-1)+K = -2S+K$

A_3: $z_3 = +d = S(1+1)+K = 2S+K$

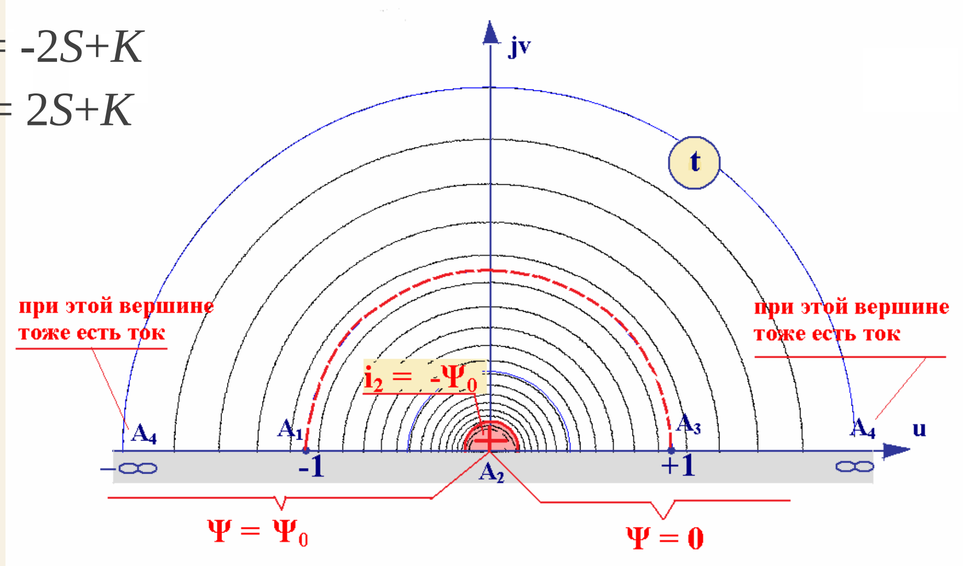
откуда

$2S-K = 2S+K \rightarrow K = 0$

$d = 2S \rightarrow S = d/2$

Тогда преобразование

$$z=\frac{d}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)=\frac{d\left(t^2+1\right)}{2t}$$



Ширинский С.В., каф. ЭМЭЭА, НИУ "МЭИ"

Пример 2: задача о поле двух намагниченных пластин

Найдем обратное преобразование координат $t = F(z)$ $z = \dfrac{d\left(t^2+1\right)}{2t}$ $\rightarrow 2t\cdot z = dt^2 + d \rightarrow dt^2 - 2tz + d = 0$

$$t = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 - 4d\cdot d}}{2d}$$

Для использования верхней полуплоскости выбираем «+», тогда $t = \dfrac{z}{d} + \sqrt{\left(\dfrac{z}{d}\right)^2 - 1}$

Решение задачи в плоскости t: задача о токе $i = \psi_0$ на ферромагнитной поверхности

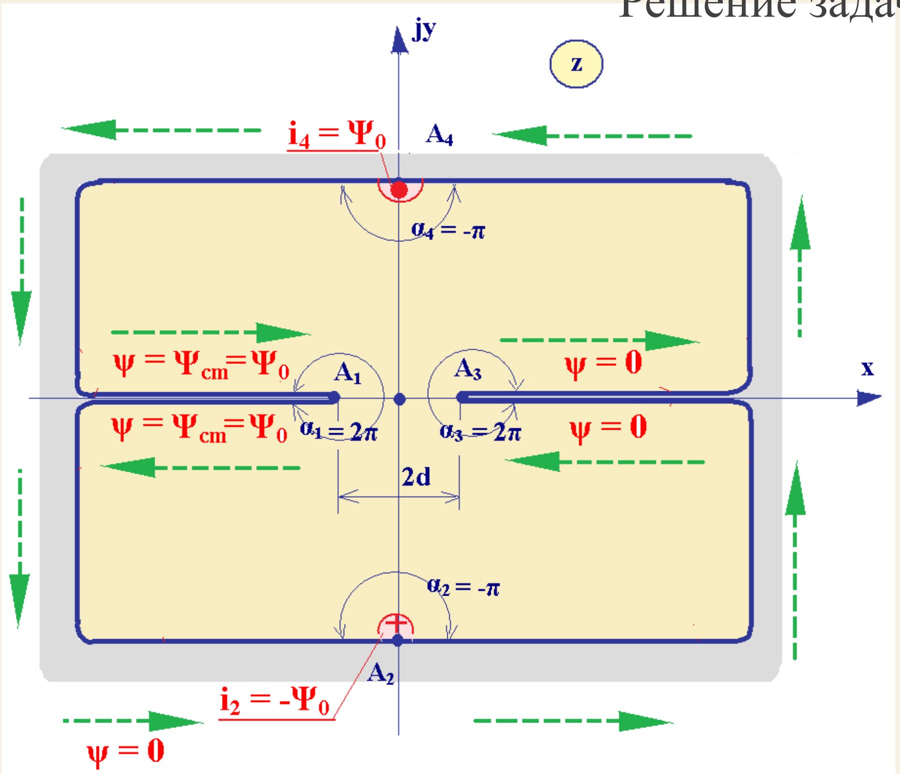
$$w_t = \frac{\psi_0}{\pi}\ln(t)$$

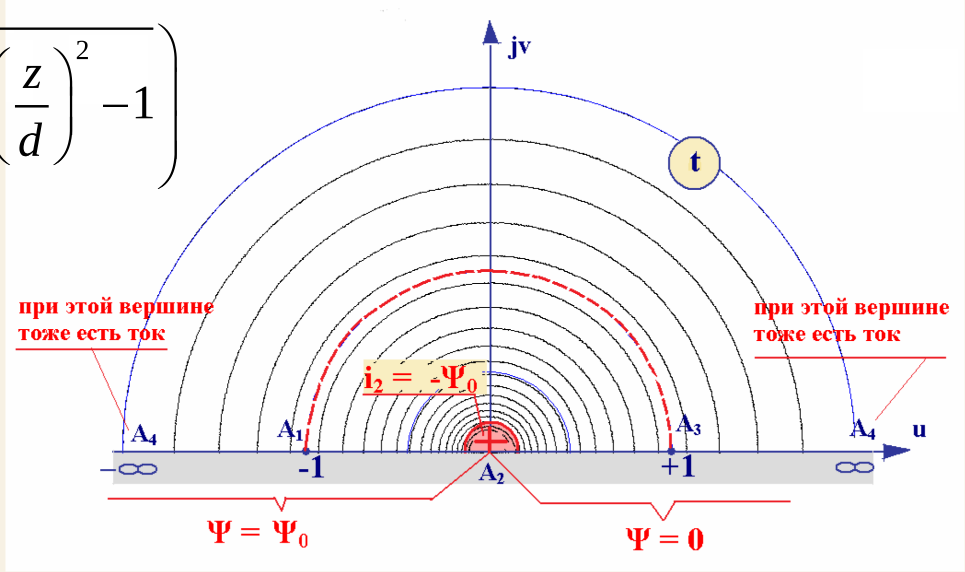
Линии поля – окружности вокруг тока

Найдем решение в плоскости z

$$w_z = \frac{\psi_0}{\pi}\ln\left(\frac{z}{d} + \sqrt{\left(\frac{z}{d}\right)^2 - 1}\right)$$

$$w_z = \frac{\psi_0}{\pi}\operatorname{arch}\left(\frac{z}{d}\right)$$





Ширинский С.В., каф. ЭМЭЭА, НИУ "МЭИ"

Пример 2: задача о поле двух намагниченных пластин

Найдем обратное преобразование координат $t = F(z)$ $\quad z = \dfrac{d\left(t^2+1\right)}{2t} \rightarrow 2t\cdot z = dt^2 + d \rightarrow dt^2 - 2tz + d = 0$

$$t = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 - 4d\cdot d}}{2d}$$

Для использования верхней полуплоскости выбираем «+», тогда $t = \dfrac{z}{d} + \sqrt{\left(\dfrac{z}{d}\right)^2 - 1}$

Решение задачи в плоскости t: задача о токе $i = \psi_0$ на ферромагнитной поверхности

$$w_t = \frac{\psi_0}{\pi}\ln(t)$$

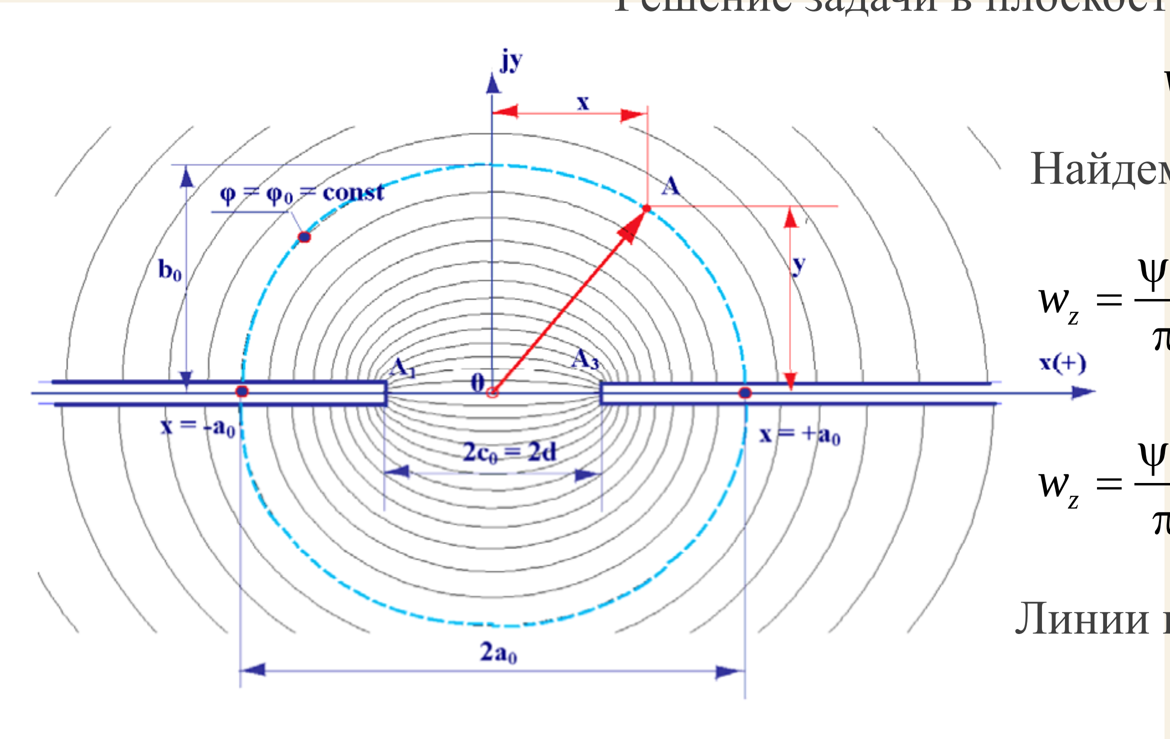
Линии поля – окружности вокруг тока

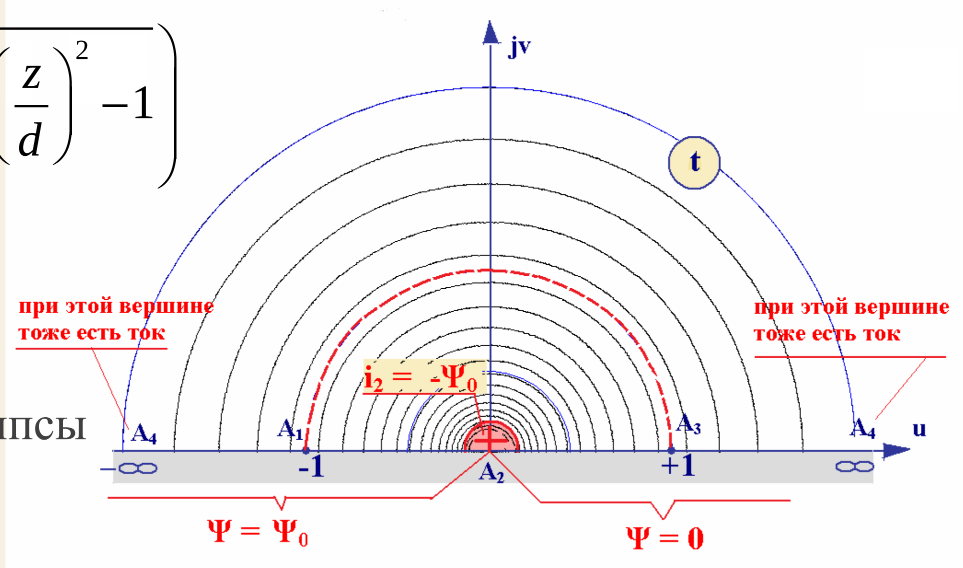
Найдем решение в плоскости z

$$w_z = \frac{\psi_0}{\pi}\ln\left(\frac{z}{d} + \sqrt{\left(\frac{z}{d}\right)^2 - 1}\right)$$

$$w_z = \frac{\psi_0}{\pi}\operatorname{arch}\left(\frac{z}{d}\right)$$

Линии поля – эллипсы





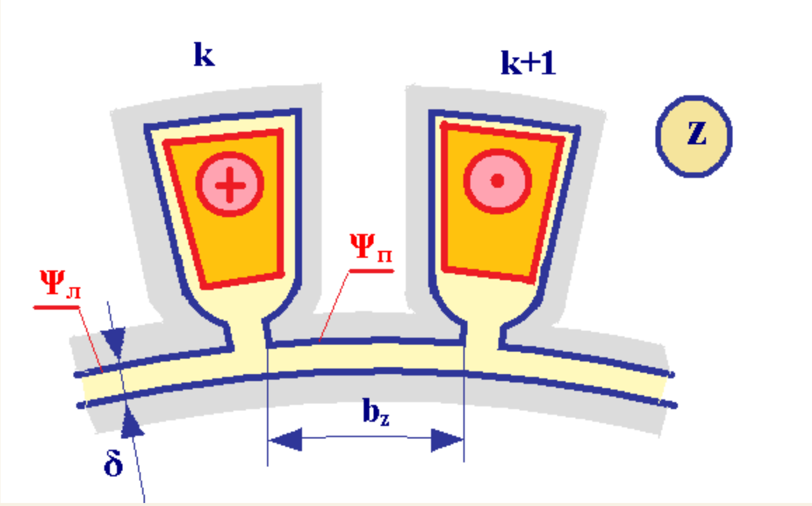
Упрощенная модель паза

Рассматриваем поле в зазоре ЭМ от токов в пазах первого сердечника при гладком втором сердечнике (магнитная цепь линейна, зазор прямолинейный)

Распределенная система токов создает периодическое поле в зазоре ($\Sigma\Phi = 0$)

При $\mu_{ст} >> 1$ поверхность зубца имеет потенциал ψ = Const

Распределение токов определяет распределение потенциалов зубцов



b_z – ширина зубца на уровне зазора

$\psi_л$, $\psi_п$ – потенциалы левого и правого зубцов (скалярный магнитный потенциал)

Поле под зубцом равномерно и изменяется только под пазом

Поле под пазом определяется потенциалами соседних зубцов и размерами зубцовой зоны

Влияние соседних пазов можно не учитывать при $b_z \geq 3\delta$

На поле в зазоре не влияет форма паза и расположение тока в нем

Рассматриваем один паз с током i, остальные пазы в ∞

Вместо распределения токов – потенциалы зубцов $\psi_л$ и $\psi_п$

Причем, $\psi_л - \psi_п = i$

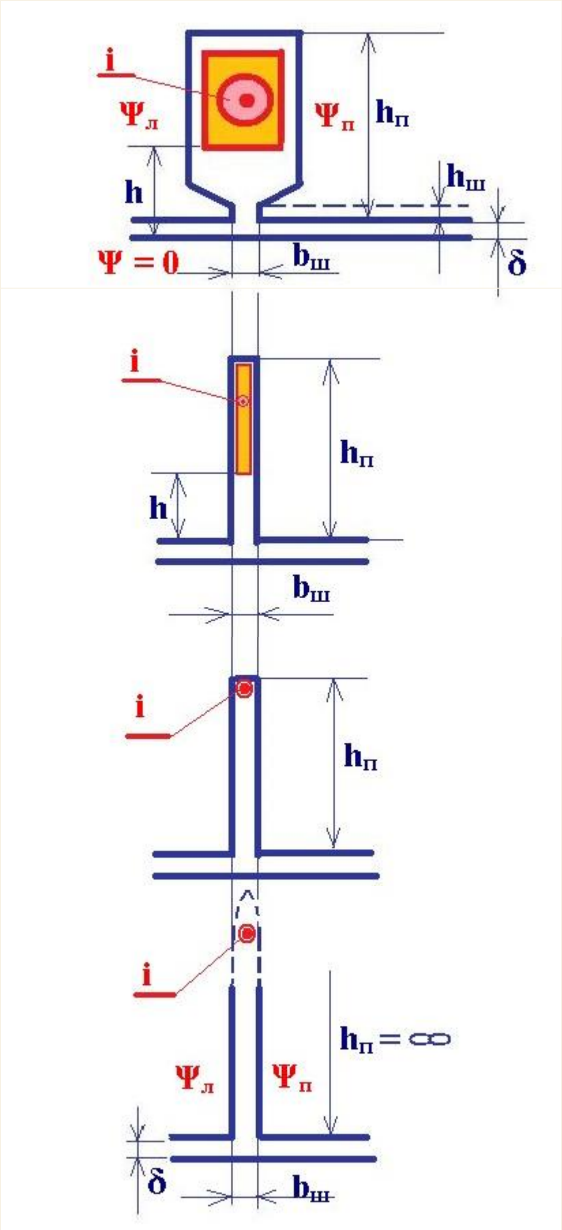
- $b_ш$ – ширина шлица (раскрытие паза)
- $h_ш$ – высота шлица
- $h_п$ – высота (глубина) паза
- h – глубина расположения тока в пазу

Форма паза не влияет на поле в зазоре (если $h_ш > 0{,}5 b_ш$)
→ рассматриваем прямоугольный паз шириной $b_ш$

Положение тока в пазу не влияет на поле в зазоре (если $h > 0{,}6 b_ш$)
→ рассматриваем точечный ток на дне паза

Раз уж положение тока в пазу не влияет на поле в зазоре (если $h_п > 1{,}5 b_ш$)
→ рассматриваем бесконечно глубокий паз с точечным током на дне

Поле в идеализированном пазу можно найти аналитически



Четное и нечетное поле

Сложное поле в зазоре сведено к набору полей под идеализированными пазами с граничными условиями $\psi_л - \psi_п = i$ (на гладком сердечнике примем ψ = 0)

Поле идеализированного паза равно сумме двух симметричных полей:

- нечетное поле *s* от тока *i* (полагая остальные токи отсутствующими) – потенциалы зубцов одинаковые, но разного знака $+\psi_{sm}$ и $-\psi_{sm}$
- четное поле *c* от всех остальных токов (полагая ток *i* = 0) – потенциалы зубцов одинаковые $+\psi_{cm}$ и $+\psi_{cm}$

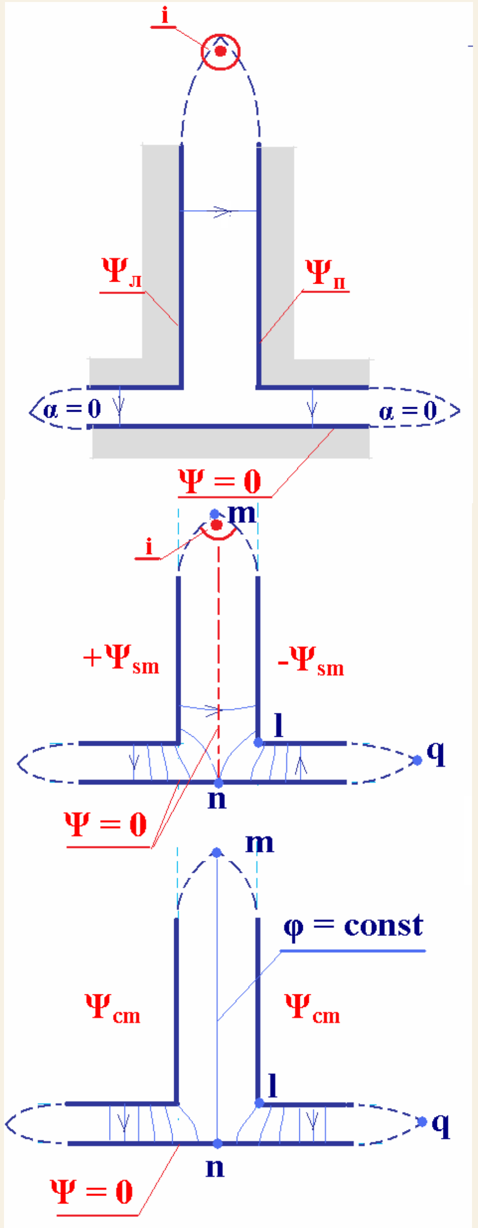
Потенциалы зубцов сохраняются
$$\psi_л = \psi_{cm} + \psi_{sm}$$
$$\psi_п = \psi_{cm} - \psi_{sm}$$

Тогда для четного поля $$\psi_{cm} = \frac{\psi_л + \psi_п}{2} = \psi_{ср}$$

для нечетного поля $$\psi_{sm} = \frac{\psi_л - \psi_п}{2} = \frac{i}{2}$$

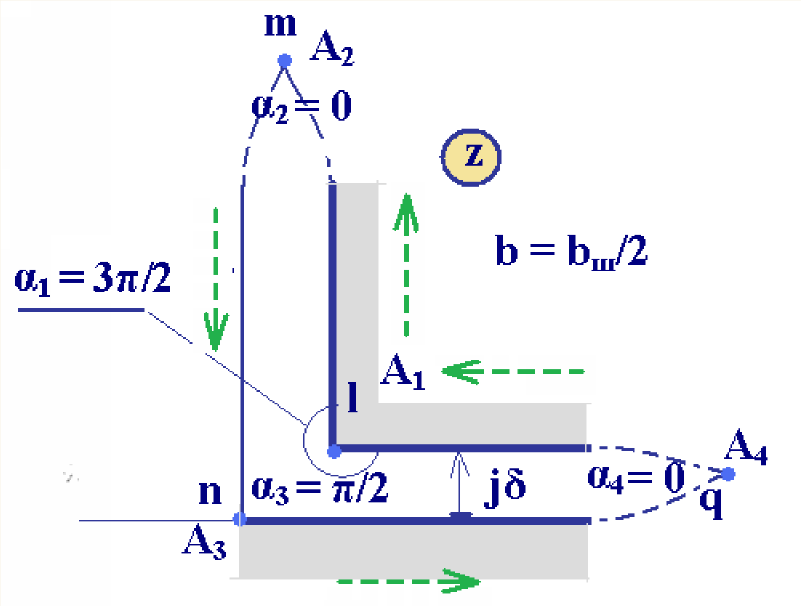
заметим
$$\psi_л = \psi_{ср} + i/2$$
$$\psi_п = \psi_{ср} - i/2$$

Каждое симметричное поле в идеализированном пазу рассмотрим аналитически



Ширинский С.В., каф. ЭМЭЭА, НИУ "МЭИ"

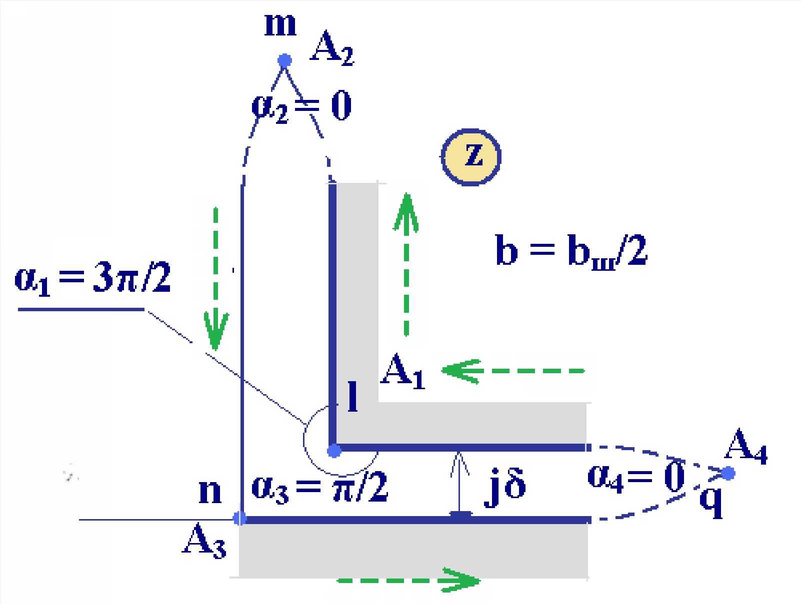
Для симметричного поля достаточно рассмотреть половину паза

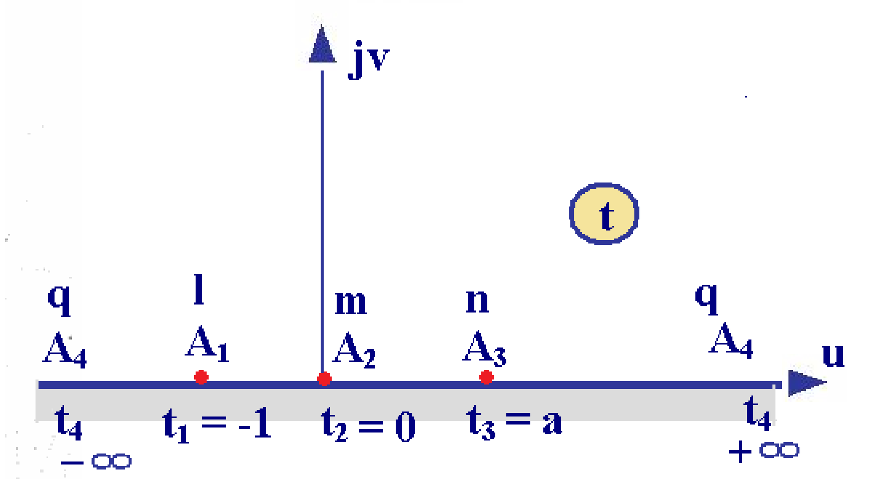


Воспользуемся преобразованием Шварца-Кристоффеля для вырожденного многоугольника *lmnq* (A_1-A_2-A_3-A_4)

Граничные условия	нечетное поле	четное поле
ось паза *mn*	$\psi = 0$	$\varphi = \text{const}$
гладкий сердечник *nq*	$\psi = 0$	$\psi = 0$
правый зубец *ql* и *lm*	$\psi = \psi_{sm} = i/2$	$\psi = \psi_{cm} = \psi_{\text{ср}}$

Уравнение Шварца-Кристоффеля для половины паза





Пусть t_1 = -1, t_2 = 0, t = a (надо найти)

сопоставим

вершины	в пл. z	в пл. t	угол α_k	степень α_k/π-1
A_1	$z = b + j\delta$	$t = -1$	$3/2 \cdot \pi$	$1/2$
A_2	$z = j\infty$	$t = 0$	0	-1
A_3	$z = 0$	$t = a$	$\pi/2$	$-1/2$

Уравнение Ш-К

$$\frac{dz}{dt} = S\left(t-(-1)\right)^{\frac{1}{2}}\left(t-0\right)^{-1}\left(t-a\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{S}{t}\sqrt{\frac{t+1}{t-a}} = \frac{S}{t\eta} \qquad \text{где } \eta = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}$$

Ширинский С.В., каф. ЭМЭЭА, НИУ "МЭИ"

Уравнение Шварца-Кристоффеля для половины паза

Итак, надо найти $$z=\int dz+K=\int \frac{S}{t\eta}dt+K$$

η - иррациональное выражение, сделаем подстановку $$\frac{S}{t\eta}dt=\frac{S}{t\eta}\frac{dt}{d\eta}d\eta$$

Надо выразить t через η, найти производную, подставить и проинтегрировать

Из выражения η для $\eta^2=\dfrac{t-a}{t+1}$ получим $t=\dfrac{a+\eta^2}{1-\eta^2}$

$$\frac{dt}{d\eta}=\frac{2\eta}{1-\eta^2}-\frac{\left(a+\eta^2\right)(-2\eta)}{\left(1-\eta^2\right)^2}=\frac{2\eta-2\eta^3+2\eta a+2\eta^3}{\left(1-\eta^2\right)^2}=\frac{2\eta(1+a)}{\left(1-\eta^2\right)^2}$$

Подставим в уравнение Ш-К $$dz=\frac{S}{t\eta}dt=\frac{S}{t\eta}\frac{dt}{d\eta}d\eta=\frac{S\left(1-\eta^2\right)2\eta(1+a)}{\left(a+\eta^2\right)\eta\left(1-\eta^2\right)^2}d\eta=2S\frac{(1+a)}{\left(a+\eta^2\right)\left(1-\eta^2\right)}d\eta$$

Представим правильную дробь в виде суммы элементарных дробей $$\frac{(1+a)}{\left(a+\eta^2\right)\left(1-\eta^2\right)}=\frac{A+B\eta}{\left(a+\eta^2\right)}+\frac{C+D\eta}{\left(1-\eta^2\right)}$$

Найдем коэффициенты A, B, C и D

Ширинский С.В., каф. ЭМЭЭА, НИУ "МЭИ"

Уравнение Шварца-Кристоффеля для половины паза

Найдем коэффициенты *A*, *B*, *C* и *D*

$$\frac{(1+a)}{(a+\eta^2)(1-\eta^2)}=\frac{A+B\eta}{(a+\eta^2)}+\frac{C+D\eta}{(1-\eta^2)}=\frac{(A+aC)+\eta(B+aD)+\eta^2(C-A)+\eta^3(D-B)}{(a+\eta^2)(1-\eta^2)}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях η

- η^0: $A+aC = 1+a$
- η^1: $B+aD = 0$
- η^2: $C\text{-}A = 0 \rightarrow A = C$, тогда из 1-го равенства $A(1+a) = 1+a$, значит $A = 1$ и $C = 1$
- η^3: $D\text{-}B = 0 \rightarrow B = D$, тогда из 2-го равенства $B(1+a) = 0$, но a не может быть равно -1, значит $B = 0$ и $D = 0$

Преобразованная дробь $$\frac{(1+a)}{(a+\eta^2)(1-\eta^2)}=\frac{A+B\eta}{(a+\eta^2)}+\frac{C+D\eta}{(1-\eta^2)}=\frac{1}{(a+\eta^2)}+\frac{1}{(1-\eta^2)}$$

Перепишем уравнение Ш-К $$dz=2S\frac{(1+a)}{(a+\eta^2)(1-\eta^2)}d\eta=2S\left(\frac{1}{a+\eta^2}+\frac{1}{1-\eta^2}\right)d\eta$$

Теперь можно найти преобразование координат $z=\int dz+K$

Уравнение Шварца-Кристоффеля для половины паза

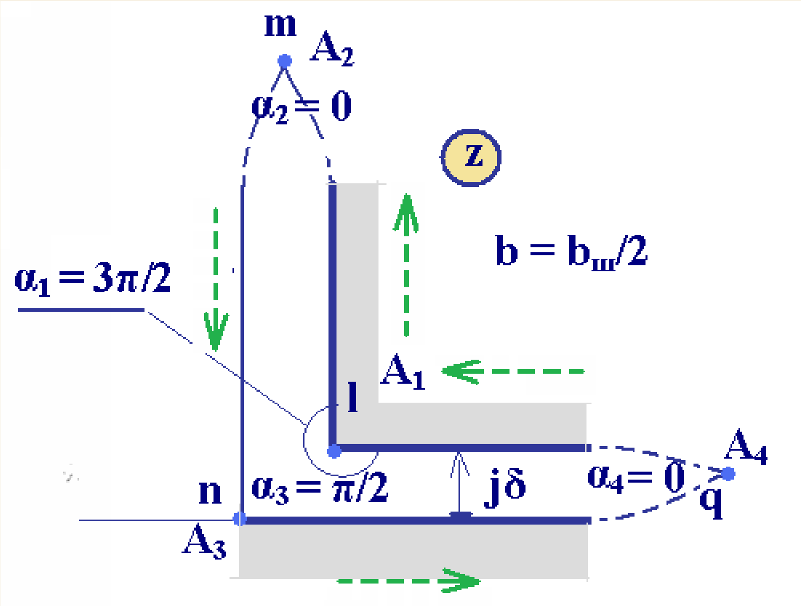
Итак $z = \int dz + K = \int 2S\left(\frac{1}{a+\eta^2} + \frac{1}{1-\eta^2}\right) d\eta + K = 2S\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\eta}{\sqrt{a}}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)\right) + K$

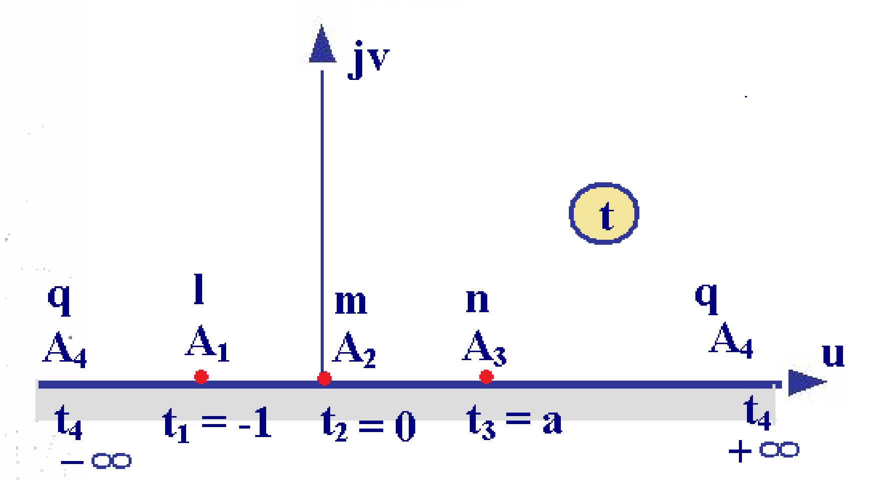
Осталось найти неизвестные a, S и K

Запишем соответствие координат в вершинах многоугольника

1) Для вершины n (точка A_3): $z_3 = 0,\ t_3 = a,\ \eta_3 = \sqrt{\frac{t_3 - a}{t_3 + 1}} = \sqrt{\frac{a-a}{a+1}} = 0$

Подставим в преобразование $z = f(t)$: $0 = 2S(0+0)+K \ \rightarrow\ K = 0$





Для вершин, расположенных в бесконечности, используем особые выражения (из теории функций комплексного переменного)

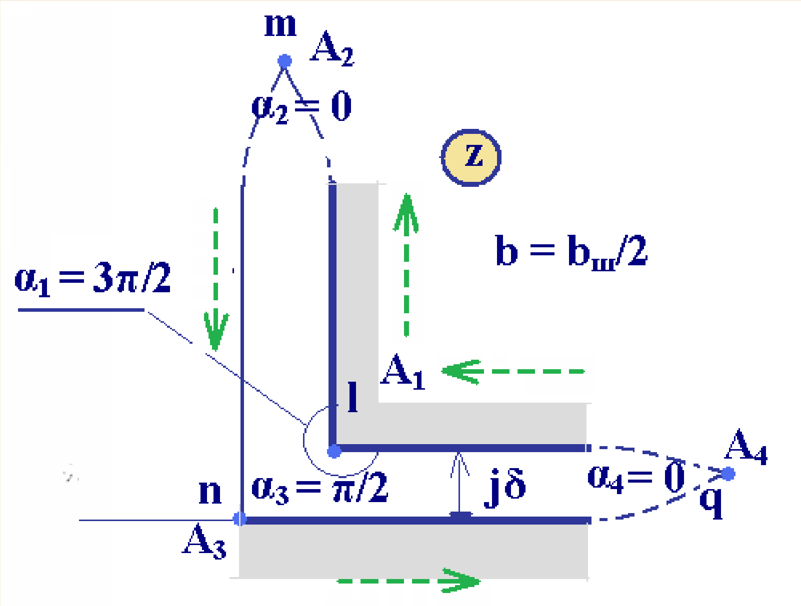
Уравнение Шварца-Кристоффеля для половины паза

2) Для вершины q (точка A_4): т.к. $z_4 = \infty$ и $t_4 = \infty$ используем особое выражение, определяющее расстояние между параллельными сторонами в плоскости z

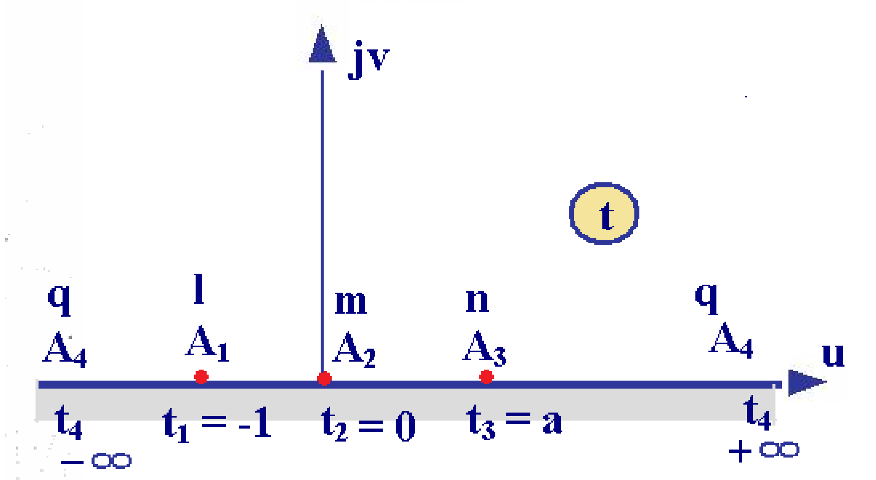
$$D_\nu = j\pi S \qquad \text{Здесь запишем} \quad D_4 = j\delta = j\pi S \qquad \text{Отсюда выразим} \quad S = \frac{\delta}{\pi}$$

3) Для вершины m (точка A_2): $z_2 = j\infty$, $t_2 = 0$ используем другое особое выражение для расстояния между параллельными сторонами когда $t \neq \infty$

$$D_\nu = j\pi S \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq\nu}}^{N-1} \left(t_\nu - t_k\right)^{-\frac{\alpha'_k}{\pi}}$$



Здесь запишем $\quad D_2 = -b = j\pi S\left(t_2 - (-1)\right)^{\frac{1}{2}}\left(t_2 - a\right)^{-\frac{1}{2}} = j\pi S / \sqrt{-a}$



Подставляя найденное S, получим выражение

$$-b = j\pi\frac{\delta}{\pi}\frac{1}{\sqrt{-a}}$$

откуда $\quad a = \left(\dfrac{\delta}{b}\right)^2$

Уравнение Шварца-Кристоффеля для половины паза

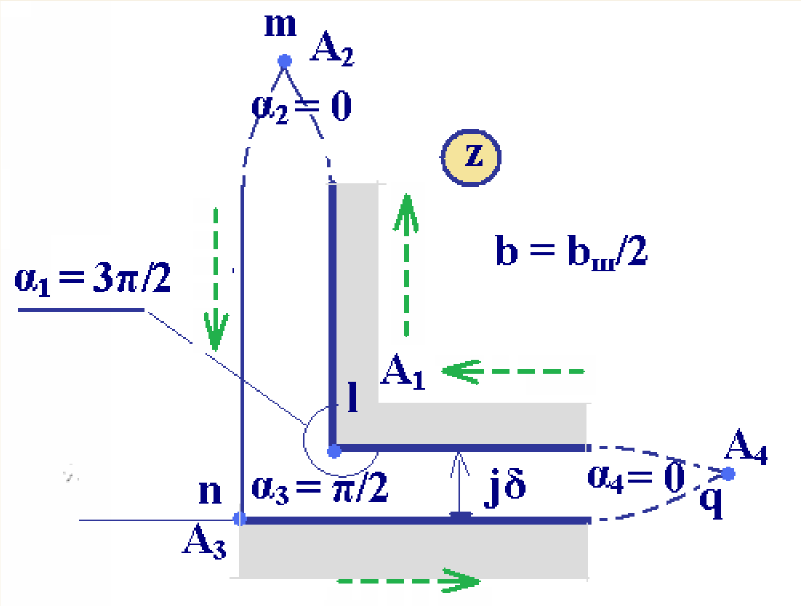
Итак, найдены неизвестные *a*, *S* и *K* для преобразования $z = 2S\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\eta}{\sqrt{a}}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)\right) + K$

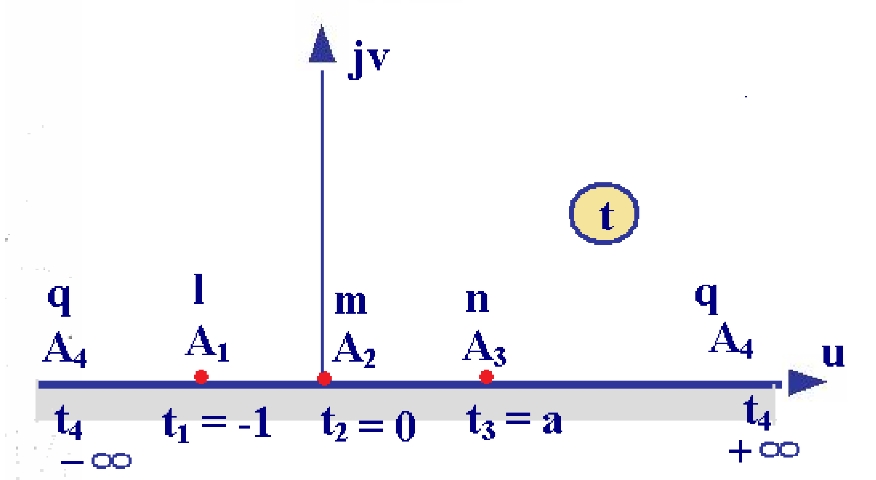
Окончательное выражение для функции преобразования координат запишем в виде

$$z = \frac{2\delta}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\eta}{\sqrt{a}}\right) + \operatorname{arctg}(\eta)\right)$$

где $\eta = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}$

или в таком виде $z = \frac{2\delta}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)$





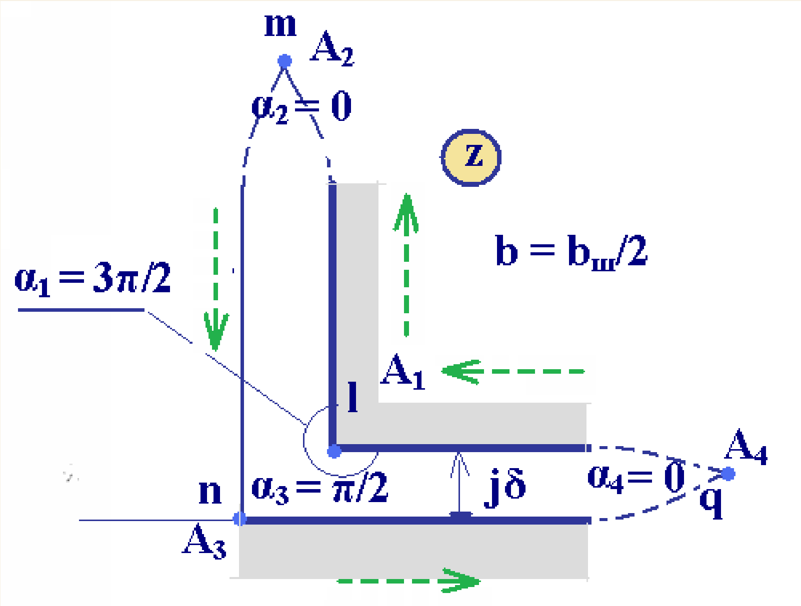
Уравнение Шварца-Кристоффеля для половины паза

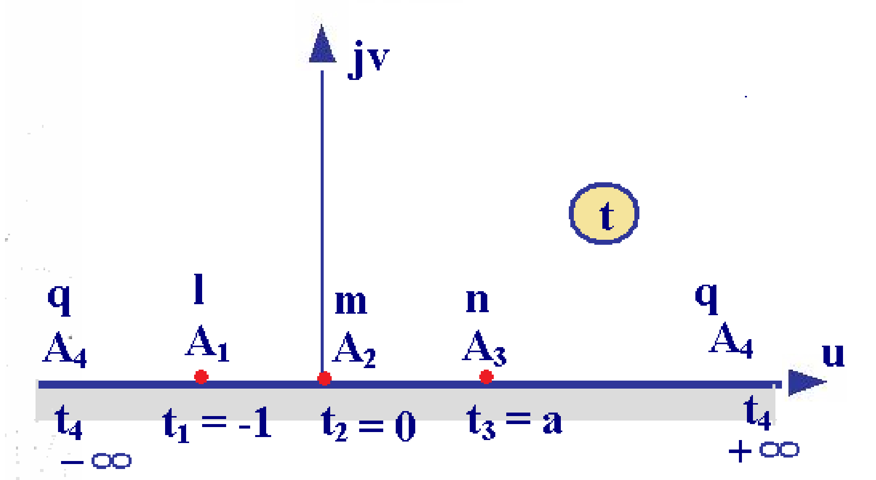
Выражение для функции преобразования координат позволяет перенести решение из плоскости *t* в плоскость *z*

$$z = \frac{2\delta}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)$$

Т.е. найдя решение в плоскости *t* можно построить линии поля и перенести их в плоскость *z* «по точкам», получив картину поля в плоскости *z*

Чтобы найти значения величин поля в нужной точке в *z*, надо знать преобразование координат $t \to z$





К сожалению, выразить *t* через *z* аналитически не удается

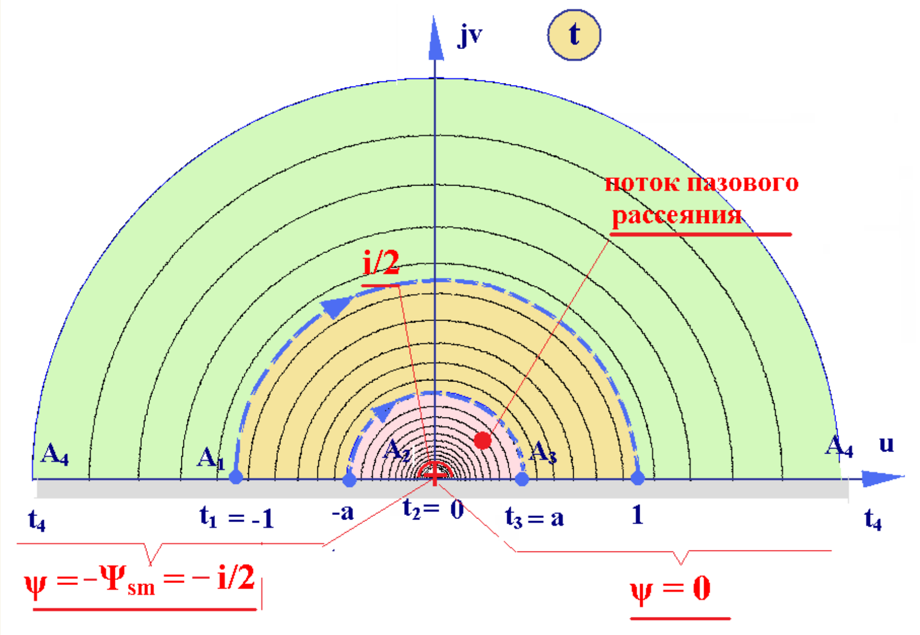
Четное и нечетное поля

<u>Нечетное поле</u> – поле от тока $i/2$ на дне паза (в точке m или $A_2 \rightarrow t_2 = 0$)

В плоскости t это поле тока $i/2$ в верхней полуплоскости: $w_t = \varphi + j\psi = \dfrac{i/2}{\pi}\ln t = \dfrac{\Psi_{sm}}{\pi}\ln t$

линии поля – полуокружности

В случае $b > \delta$ переменная $a = (\delta/b)^2 < 1$ и координата $t_3 = a < 1$



От $t_2 = 0$ до $t_3 = a$

– поток пазового рассеяния

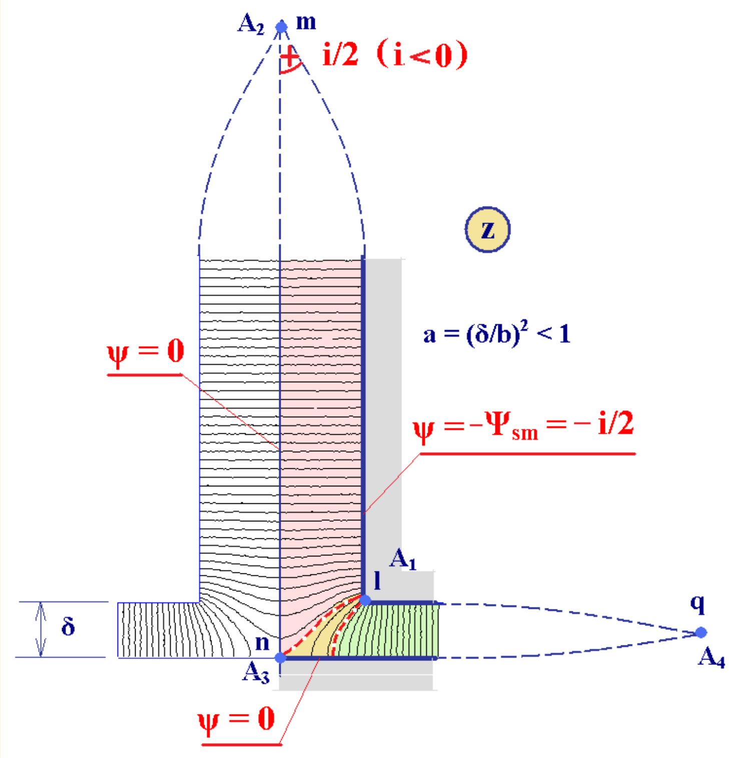
От $t_1 = -1$ до $t_4 = -\infty$

– поток взаимоиндукции

Для переноса решения в z используем преобразование

$$w_z = w_t(t) = w_t\left(F(z)\right)$$

по точкам или найдя $t = F(z)$



Ширинский С.В., каф. ЭМЭЭА, НИУ "МЭИ"

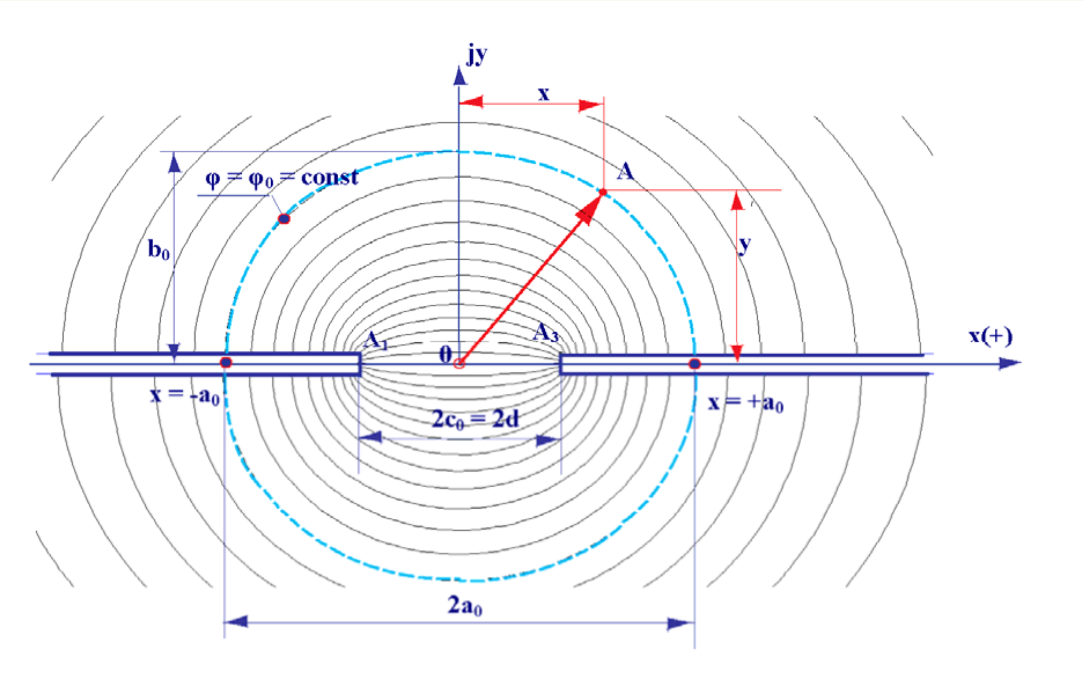
Четное поле – поле от возбужденного зубца

В плоскости t это поле двух намагниченных пластин:

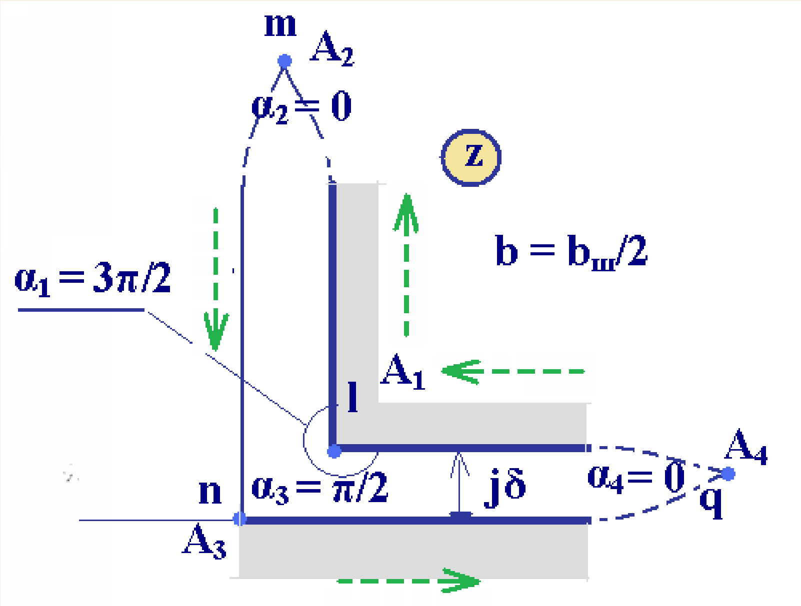
- зубец $A_4 - A_1 - A_2$ с $\psi = \psi_{cm} \to$ точки $t_4 - t_1 - t_2$
- сердечник $A_3 - A_4$ с $\psi = 0 \to$ точки $t_3 - t_4$

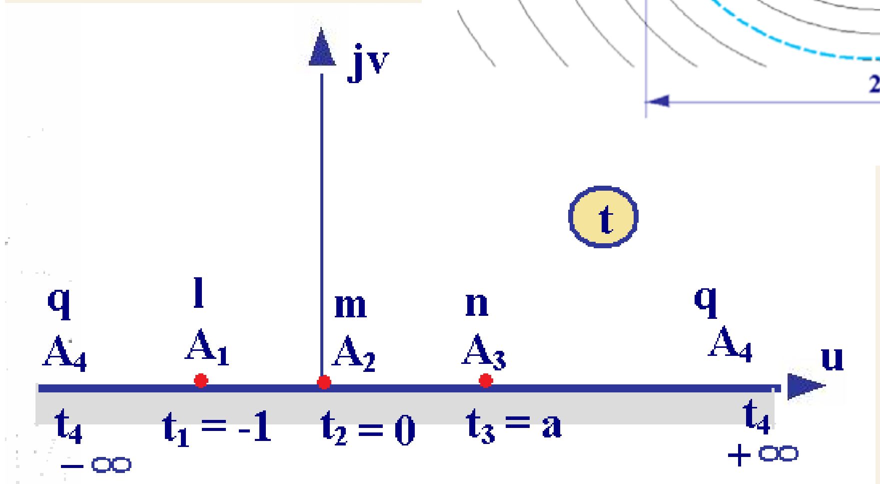
Решение задачи уже получено: $$w = \frac{\psi_0}{\pi} \operatorname{arch}\left(\frac{z}{d}\right)$$

Только его надо записать для плоскости t
и учесть сдвиг начала координат



Линии поля в форме эллипсов





Ширинский С.В., каф. ЭМЭЭА, НИУ "МЭИ"

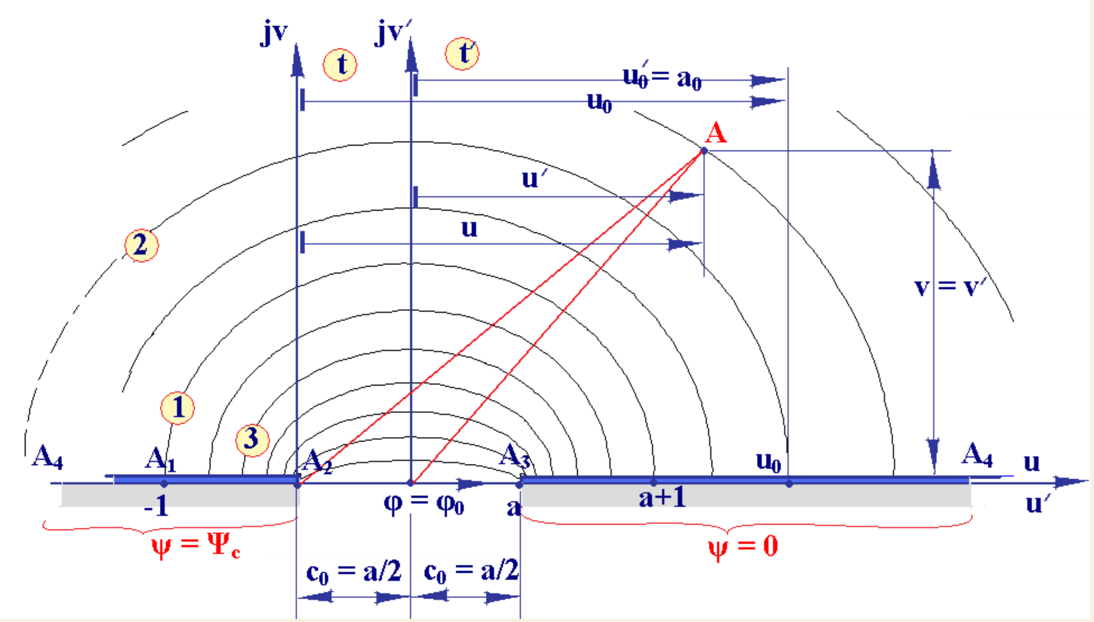
Четное поле – поле от возбужденного зубца

Для использования готового решения четное поле в плоскости t преобразуем в плоскость t' ($t' = t - a/2$) и запишем решение

$$w_{t'} = \frac{\psi_{cm}}{\pi}\operatorname{arch}\left(\frac{t'}{a/2}\right)$$

Чтобы перенести решение в t, надо подставить $t' = t - a/2$ и получить (линии поля – эллипсы)

$$w_t = \frac{\psi_{cm}}{\pi}\operatorname{arch}\left(\frac{2}{a}\left(t - \frac{a}{2}\right)\right)$$

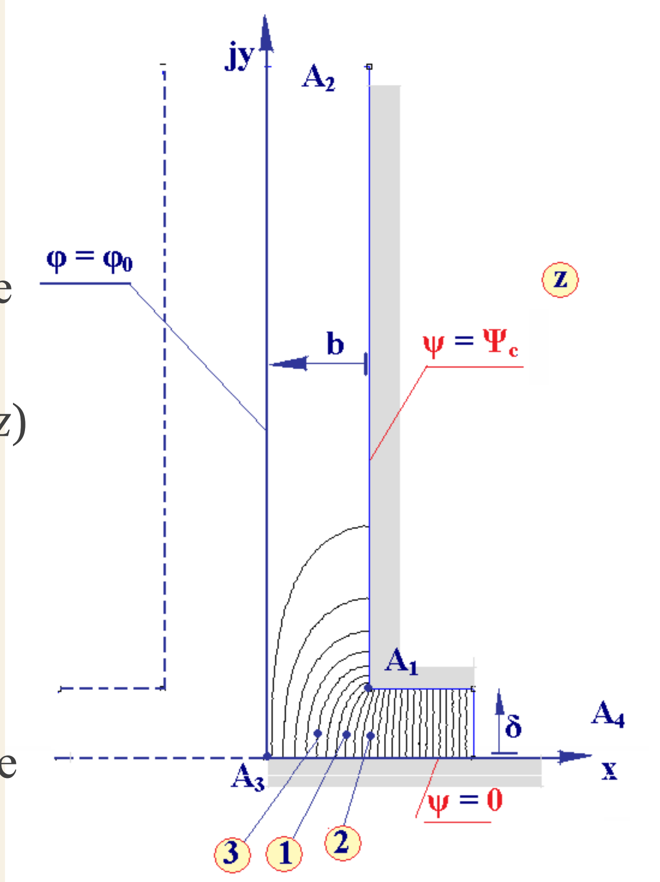


Для переноса решения в z используем преобразование

$$w_z = w_t(t) = w_t\left(F(z)\right)$$

по точкам или найдя $t = F(z)$

К сожалению, аналитическое выражение для w_z найти не удается, но можно найти выражение для производной



Напряженность магнитного поля

Найдем напряженность через комплексную потенциальную функцию w_z

По распределению напряженности магнитного поля можно будет найти индукцию $B = \mu_0 H$

Сопряженный комплекс напряженности магнитного поля связан с производной комплексной потенциальной функции $\bar{H} = j\dfrac{dw}{dz}$ тогда $H = \bar{\bar{H}}$

(Сопряженные комплексные числа имеют одинаковый модуль и одинаковые, но противоположные по знаку аргументы / одинаковую действительную часть и одинаковые, но разные по знаку мнимые части)

Ранее были найдены выражения для w в плоскости t,
но аналитическое выражение для w_z найти не удается

Выразим производную w как $\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{dw}{dt}\dfrac{dt}{dz}$

Выражение для производной dz/dt уже получено (уравнение Шварца-Кристоффеля)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S}{t}\sqrt{\frac{t+1}{t-a}} \qquad \text{где} \quad S = \frac{\delta}{\pi} \qquad a = \left(\frac{\delta}{b}\right)^2$$

Напряженность четного поля

Комплексная потенциальная функция $w_t = \frac{\Psi_{cm}}{\pi}\operatorname{arch}\left(\frac{2}{a}\left(t-\frac{a}{2}\right)\right) = \frac{\Psi_{cm}}{\pi}\operatorname{arch}\left(\frac{2t}{a}-1\right) = \frac{\Psi_{cm}}{\pi}\operatorname{arch}(t_1)$

Для нее
$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dt_1} = \dfrac{\Psi_{cm}}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{t_1^2-1}} = \dfrac{\Psi_{cm}}{\pi}\dfrac{a/2}{\sqrt{t(t-a)}} \\ \dfrac{dt_1}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{2t}{a}-1\right) = \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{a/2} \\ \dfrac{dt}{dz} = \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^{-1} = \dfrac{t}{S}\sqrt{\dfrac{t-a}{t+1}} \end{cases}$$

с учетом $S = \frac{\delta}{\pi}$ получим $\bar{H}_c = j\frac{dw}{dz} = j\frac{\Psi_{cm}}{\delta}\sqrt{\frac{t}{t+1}} = j\frac{\Psi_{cm}}{\delta}\beta_c$

Напряженность нечетного поля

Комплексная потенциальная функция $w_t = \frac{\Psi_{sm}}{\pi}\ln t$

Для нее $\frac{dw}{dt} = \frac{\Psi_{sm}}{\pi}\frac{1}{t}$ $\qquad \frac{dt}{dz} = \frac{\pi t}{\delta}\sqrt{\frac{t-a}{t+1}}$ $\qquad$ получим $\bar{H}_s = j\frac{dw}{dz} = j\frac{\Psi_{sm}}{\delta}\sqrt{\frac{t-a}{t+1}} = j\frac{\Psi_{sm}}{\delta}\beta_s$

Окончательно, модуль напряженности $|H| = |\bar{H}|$ и аргумент $\arg(H) = -\arg(\bar{H})$

Распределение напряженности вдоль гладкого сердечника

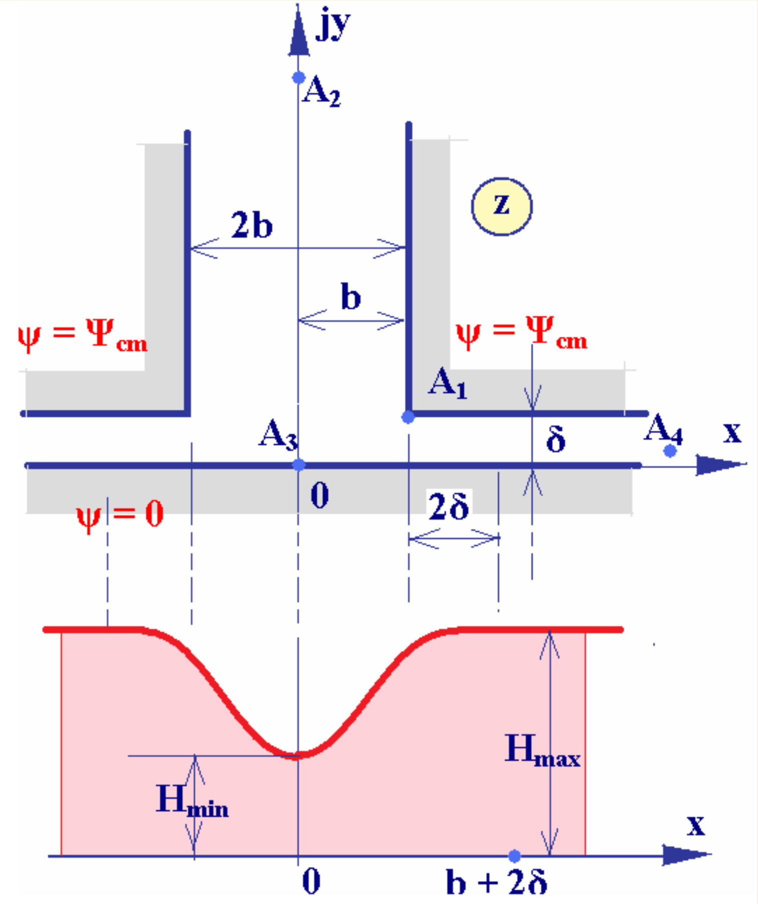
Рассмотрим четное поле $\bar{H} = j\dfrac{\Psi_{cm}}{\delta}\sqrt{\dfrac{t}{t+1}} = j\dfrac{\Psi_{cm}}{\delta}\beta_c$

Вдоль гладкого сердечника аргумент напряженности везде равен -π/2, т.е. линии поля входят перпендикулярно, нормальная составляющая напряженности равна ее модулю

- задаемся β_c в диапазоне от $\sqrt{\dfrac{a}{a+1}}$ до 1
- находим соответствующую координату $t = \dfrac{\beta_c^2}{1-\beta_c^2}$
- вычисляем $\eta = \sqrt{\dfrac{t-a}{t+1}}$
- находим координату *x* через уравнение преобразования

$$x = z = \frac{2\delta}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)$$

- находим для этой точки модуль напряженности $\left|H_c\right| = \left|\dfrac{\Psi_{cm}}{\delta}\sqrt{\dfrac{t}{t+1}}\right|$
- ставим точку на кривой $H_c(x)$



Распределение $H_c(x)$ симметрично относительно оси паза

Распределение напряженности вдоль гладкого сердечника

Характерные точки

- точка A_3: ($x = 0$, $t = a$) $\quad |H_c| = |H_{\min}| = \left|\dfrac{\Psi_{cm}}{\delta}\sqrt{\dfrac{a}{a+1}}\right|$ $\quad$ где $a = \left(\dfrac{\delta}{b}\right)^2$

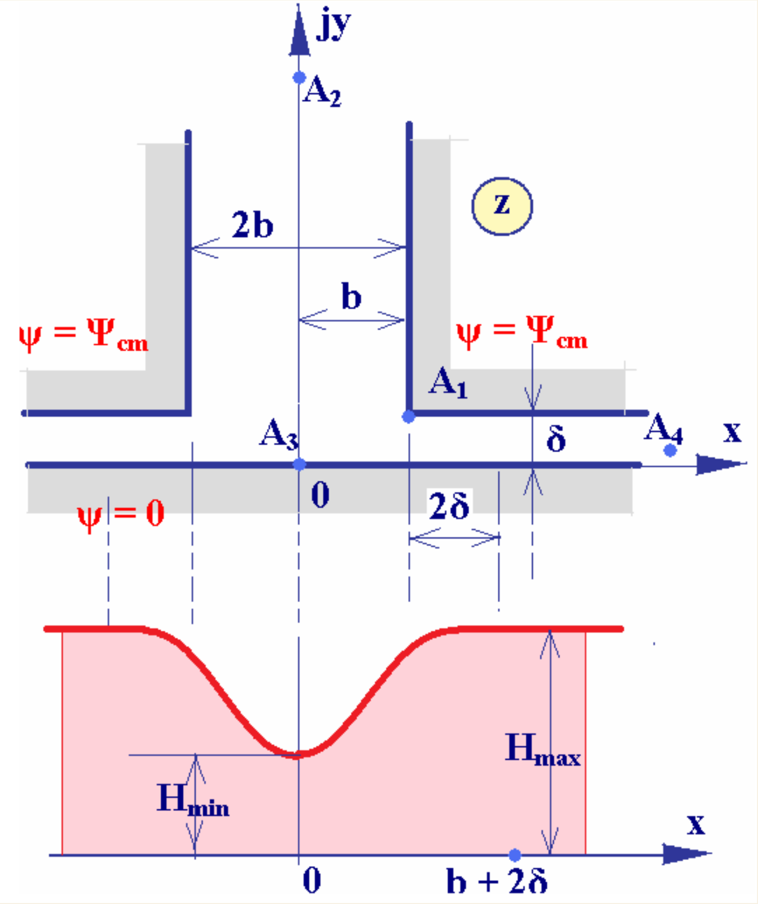
  Раскрытие паза уменьшает напряженность поля тем сильнее, чем больше b/δ

- точка A_4: ($x = \infty$, $t = \infty$) $\quad |H_c| = |H_{\max}| = \left|\dfrac{\Psi_{cm}}{\delta}\right|$

  Поле под зубцом максимально

- точка $x = b+2\delta$ $\quad |H_c| = 0.9995|H_{\max}|$

  Влияние паза на поле в зазоре быстро уменьшается под зубцом



Удельная магнитная проводимость зазора

Удельная магнитная проводимость зазора (в точке на ед.длины)
численно равна *H* на поверхности при единичной разности потенциалов [м$^{-1}$]

- для четного поля $$\lambda_c = \frac{H_{c(y=0)}}{\psi_{cm}} = \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{t}{t+1}}$$
- для нечетного поля $$\lambda_s = \frac{H_{s(y=0)}}{\psi_{sm}} = \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{t-a}{t+1}}$$

Максимальная удельная проводимость зазора – под зубцом

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{\delta}$$

$$\left(\lambda_{c\max} = \lambda_{c(t\to\infty)} = \lambda_{s\max} = \lambda_{\max}\right)$$

Относительная удельная магнитная проводимость зазора – относительно $\lambda_{\max}$

- для четного поля $$\frac{\lambda_c}{\lambda_{\max}} = \sqrt{\frac{t}{t+1}} = \beta_c$$
- для нечетного поля $$\frac{\lambda_s}{\lambda_{\max}} = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}} = \beta_s\,(=\eta)$$

$$\beta_{c\max} = \beta_{s\max} = 1$$

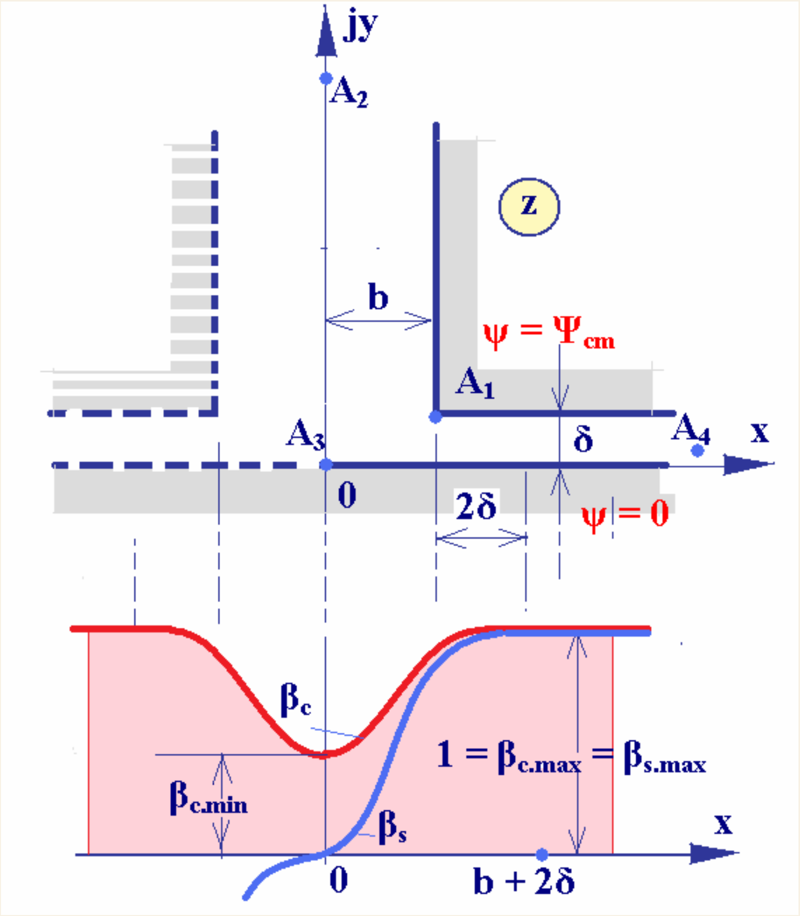
$$\beta_{c\min} = \sqrt{\frac{a}{a+1}} \qquad \beta_{s\min} = 0 \qquad a = \left(\frac{\delta}{b}\right)^2$$

Удельная магнитная проводимость зазора

Уравнение преобразования координат для поверхности гладкого сердечника ($y = 0$) можно переписать относительно функции β_s

$$z = x = \frac{2\delta}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{\beta_s}{\sqrt{a}} + \operatorname{arth}\beta_s\right)$$

$$= \frac{2\delta}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{\beta_s}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta_s}{1-\beta_s}\right) \qquad \text{где} \quad \beta_s = (0\ldots1)$$



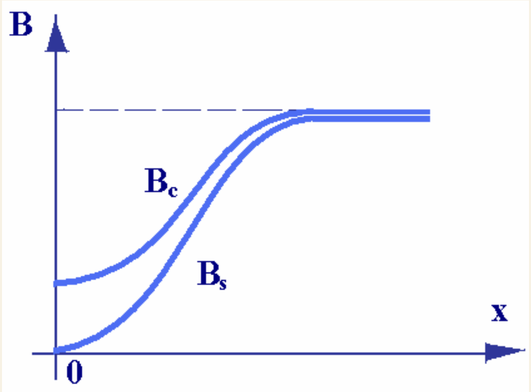
Построим графики функций β_c и β_s

По ним можно найти напряженность и индукцию магнитного поля на гладкой поверхности

$$H_c = \beta_c \cdot \lambda_{\max} \cdot \psi_{cm} \qquad B_c = \mu_0 H_c$$

$$H_s = \beta_s \cdot \lambda_{\max} \cdot \psi_{sm} \qquad B_s = \mu_0 H_s$$

Это путь к определению интегральных величин (B, H) в зазоре реальной ЭМ (при односторонней зубчатости)



Удельная магнитная проводимость зазора

Простой способ построения графиков функций β_c и β_s

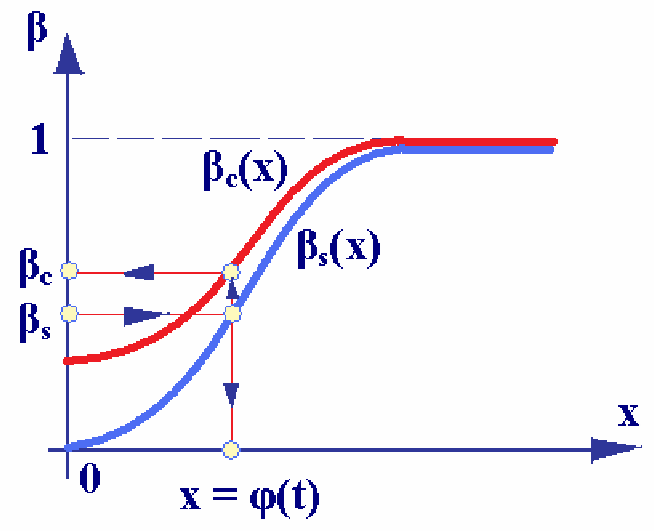
Найдем взаимную зависимость функций β_c и β_s с помощью координаты t

$$\beta_c = \sqrt{\frac{t}{t+1}} \to t = \frac{\beta_c^2}{1-\beta_c^2} \qquad \text{тогда} \qquad \beta_s = \sqrt{\beta_c^2(1+a)-a}$$

$$\beta_s = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}} \to t = \frac{\beta_s^2+a}{1-\beta_s^2} \qquad \text{тогда} \qquad \beta_c = \sqrt{\frac{\beta_s^2+a}{1+a}}$$

Строим графики:

- задаемся β_s (0…1)
- находим β_c
- находим соотв. x



Уравнение преобразования координат на поверхности гладкого сердечника можно выразить как

$$x = \frac{2\delta}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{\beta_s}{\sqrt{a}} + \operatorname{arth}\beta_s\right)$$

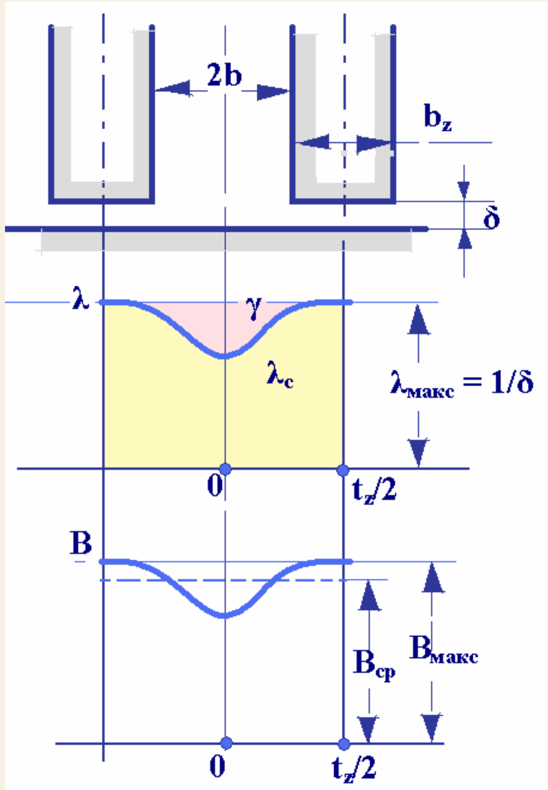
или

$$x = \frac{2\delta}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta_c^2(1+a)-a}{a}} + \operatorname{arth}\left(\beta_c^2(1+a)-a\right)\right)$$

Магнитная проводимость зубцового деления

Рассмотрим четное поле в пределах зубцового деления (между осями зубцов)

При $b_z > 3\delta$ влиянием соседних пазов можно пренебречь



При отсутствии паза удельная проводимость постоянна $\lambda_c(x) = \lambda_{\max} = 1/\delta$

Магнитная проводимость зубцового деления (от $-t_z/2$ до $t_z/2$)

$$\Lambda_{c\max} = 2\int_0^{t_z/2} \lambda_{\max} dx = t_z \lambda_{\max} = t_z \frac{1}{\delta}$$

Открытый паз снижает магнитную проводимость $\Lambda_c = 2\int_0^{t_z/2} \lambda_c dx$

Здесь рассматривается безразмерный коэффициент проводимости

Полная проводимость зубцового деления [Гн] $\Lambda_c = \mu_0 l_\delta \Lambda_c$

Поток униполярного намагничивания при МДС зазора $\Delta\psi$ $\Phi_{t_z} = \Delta\psi \cdot \mu_0 l_\delta \Lambda_c$

Найдем уменьшение проводимости, обусловленное влиянием паза

$$\Lambda_{c\max} - \Lambda_c = \gamma = 2\int_0^{t_z/2} (\lambda_{\max} - \lambda_c)\, dx$$

(можно интегрировать до ∞)

Магнитная проводимость зубцового деления

При интегрировании учтем $\lambda_{\max} = \dfrac{1}{\delta}$ $\lambda_c = \dfrac{1}{\delta}\sqrt{\dfrac{t}{t+1}}$ Из уравнения Ш-К $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\delta}{\pi}\dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{t+1}{t-a}}$

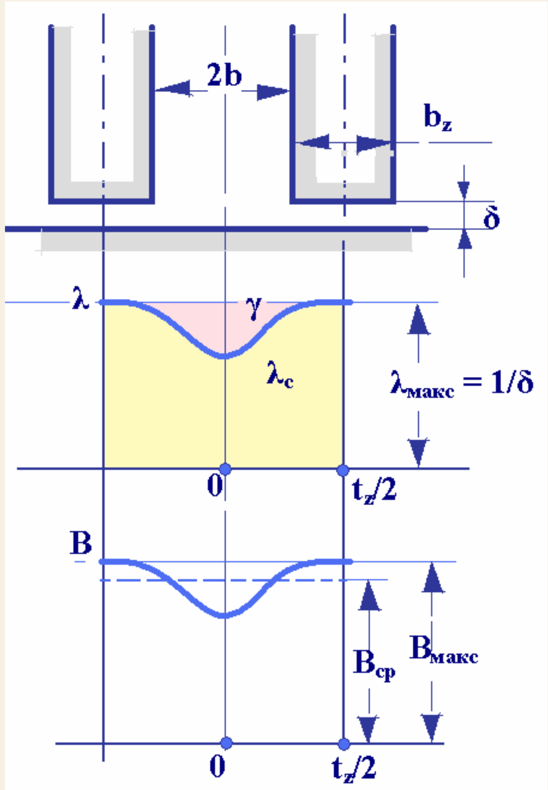
При интегрировании вдоль вещественной оси $dx = dz$

Тогда уменьшение проводимости найдем как

$$\gamma = 2\int_{x=0}^{x=\infty}(\lambda_{\max} - \lambda_c)\,dx = 2\int_{t=0}^{t=\infty}(\lambda_{\max} - \lambda_c)\frac{dz}{dt}dt$$

$$= 2\int_{t=0}^{t=\infty}\frac{1}{\delta}\left(1 - \sqrt{\frac{t}{t+1}}\right)\frac{\delta}{\pi t}\sqrt{\frac{t+1}{t-a}}dt$$

$$= 4\pi\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{a}} - \ln\sqrt{1+\frac{1}{a}}\right)$$



Степень уменьшения проводимости зубцового деления при униполярном намагничивании – коэффициент Картера $k_\delta = \dfrac{\Lambda_{\max}}{\Lambda_c}$

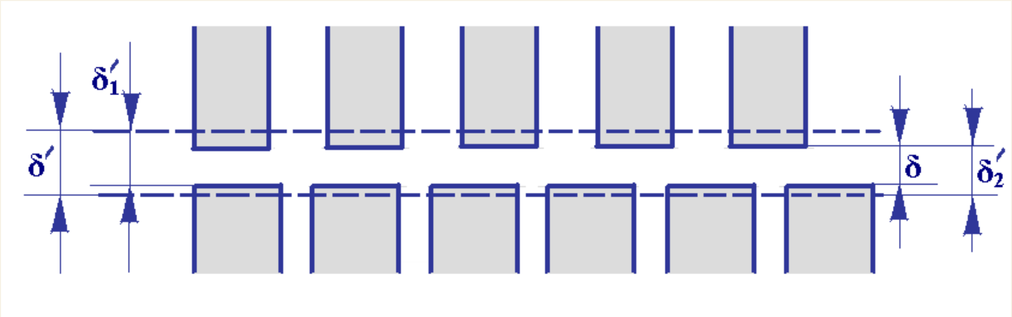
Также $k_\delta = \dfrac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\text{ср}}} = \dfrac{B_{\max}}{B_{\text{ср}}}$ характеризует уменьшение ср.индукции в зазоре при наличии пазов

Магнитная проводимость зубцового деления и коэффициент Картера

Можно записать проводимость зубцового деления при наличии паза как $\Lambda_c = \dfrac{\Lambda_{max}}{k_\delta} = \dfrac{t_z}{\delta k_\delta} = \dfrac{t_z}{\delta'}$

δ' – эквивалентный расчетный зазор, при котором поток зубцового деления в гладком зазоре такой же, как в реальном зазоре при наличии паза

k_δ позволяет в общей теории ЭМ перейти к анализу ЭМ с гладким зазором (но увеличенным до эквивалентного)



При двусторонней зубчатости используется $k_\delta = k_{\delta 1} \cdot k_{\delta 2}$ (Вольдек А.И.)

- $k_{\delta 1}$ учитывает зубчатость 1 сердечника
- $k_{\delta 2}$ учитывает зубчатость 2 сердечника

В инженерной практике считают $k_\delta = \dfrac{t_z}{t_z - \gamma}, \quad \gamma \approx \dfrac{\left(\dfrac{b_ш}{\delta}\right)^2}{5 + \left(\dfrac{b_ш}{\delta}\right)^2}$

Но мы теперь знаем как посчитать точно

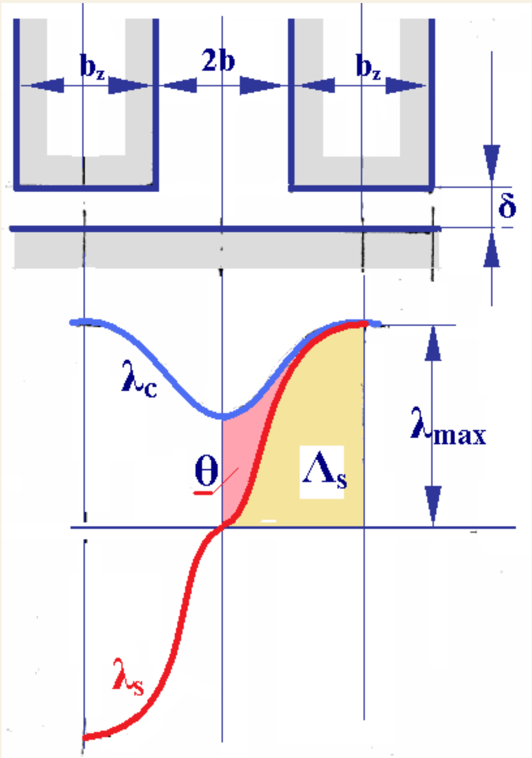
$$k_\delta = \frac{\Lambda_{max}}{\Lambda_c} = \frac{\Lambda_{max}}{\Lambda_{max} - \gamma}$$

Магнитная проводимость зубцового деления

Магнитную проводимость при нечетном поле определяют на половине зубцового деления

$$\Lambda_s = \int_0^{t_z/2} \lambda_s dx$$

Она, очевидно, меньше, чем для четного поля



Найдем разность проводимостей для четного и нечетного поля на половине t_z

$$\Theta = \frac{\Lambda_c}{2} - \Lambda_s = \int_0^{t_z/2} (\lambda_c - \lambda_s) dx = \int_0^{\infty} (\lambda_c - \lambda_s) dx$$

Мы определяли удельную проводимость как $\lambda_c = \dfrac{H_c}{\psi_{cm}}$ $\lambda_s = \dfrac{H_s}{\psi_{sm}}$

При одинаковых потенциалах зубца для четного и нечетного поля $\psi_{cm} = \psi_{sm} = \psi_1$

$$\Theta = \frac{1}{\psi_1} \int_0^{\infty} (H_c - H_s) dx = \frac{\varphi_c - \varphi_s}{\psi_1}$$

где $\varphi_c = \int H_c dx$ $\varphi_s = \int H_s dx$

– потоки вектора напряженности

Магнитная проводимость зубцового деления

Для точек, расположенных на вещественной оси, скалярный магнитный потенциал $\psi_c = \psi_s = 0$

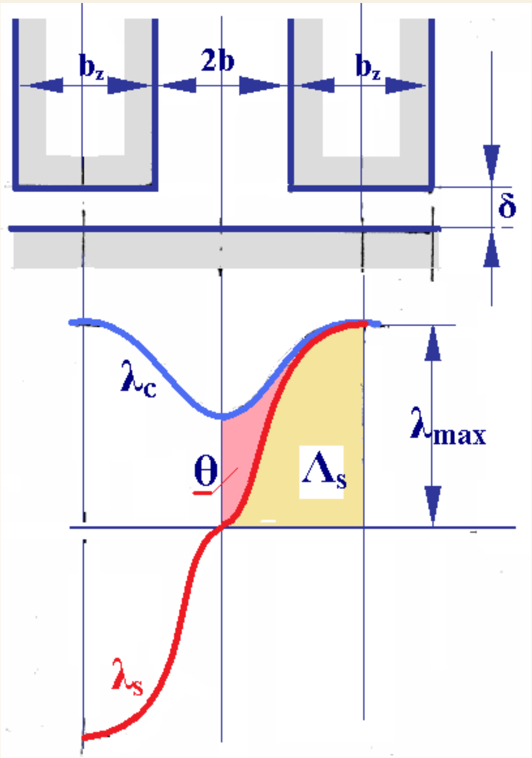
Тогда комплексная потенциальная функция для этих точек на оси

$$w_c = \frac{\Psi_{cm}}{\pi}\operatorname{arch}(t_1) = \frac{\Psi_{cm}}{\pi}\ln\left(t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1}\right) = \varphi_c + j\psi_c = \varphi_c \qquad \text{где} \quad t_1 = \frac{2t}{a} - 1$$

$$w_s = \frac{\Psi_{sm}}{\pi}\ln\frac{t}{a} = \varphi_s + j\psi_s = \varphi_s$$

и разность проводимостей

$$\Theta = \left.\frac{\varphi_c - \varphi_s}{\Psi_1}\right|_{x = t_z/2} = \left.\frac{\varphi_c - \varphi_s}{\Psi_1}\right|_{\substack{x\to\infty \\ t\to\infty}} = \left.\frac{w_c - w_s}{\Psi_1}\right|_{t\to\infty}$$



Подставим выражения w_c, w_s

$$\Theta = \left.\frac{1}{\pi}\ln\left(t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1}\right) - \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{t}{a}\right)\right|_{t\to\infty}$$

$$= \left.\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\left(\frac{2t}{a} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{2t}{a} - 1\right)^2 - 1}}{\frac{t}{a}}\right)\right|_{t\to\infty} = \left.\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{2t + 2t}{t}\right)\right|_{t\to\infty} = \frac{\ln(4)}{\pi} = 0{,}44127$$

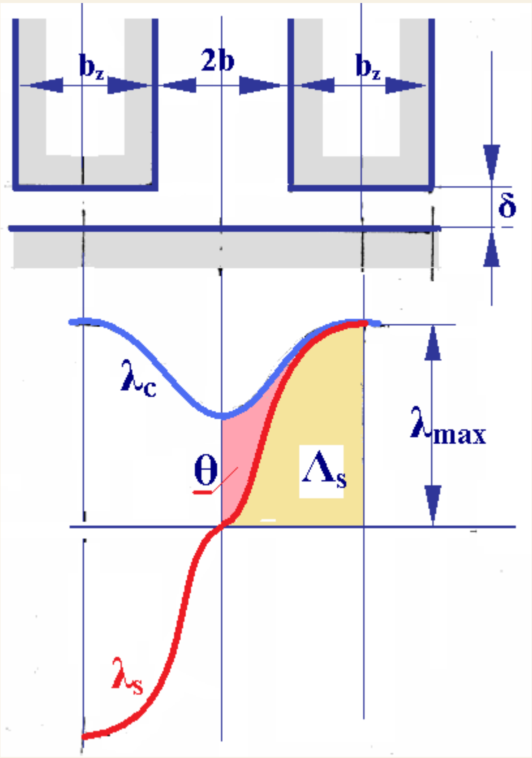
Магнитная проводимость зубцового деления

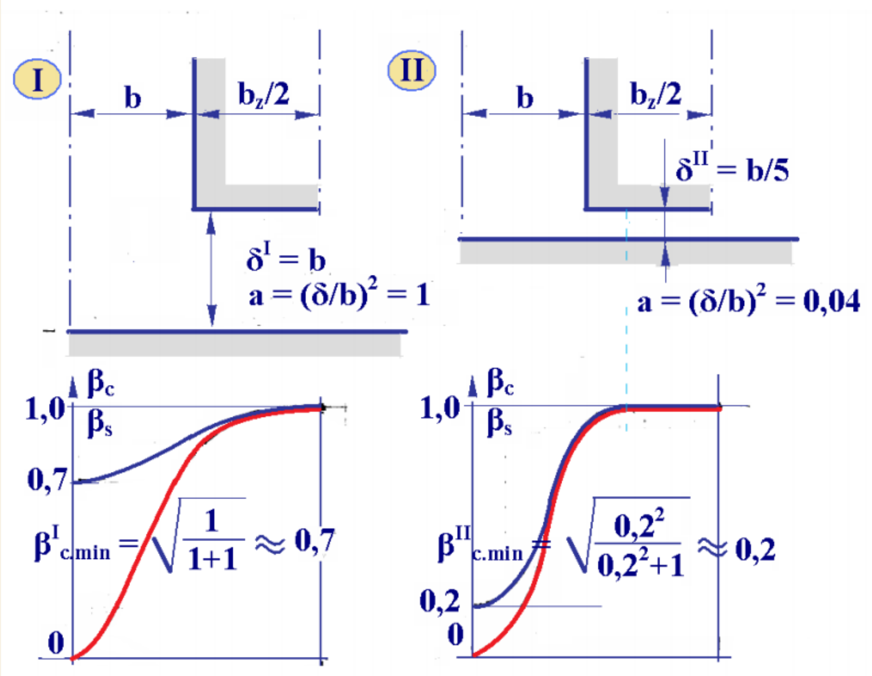
Разность проводимостей для четного и нечетного поля на половине t_z не зависит от размеров зубцовой зоны (Сорокер Т.Г.)

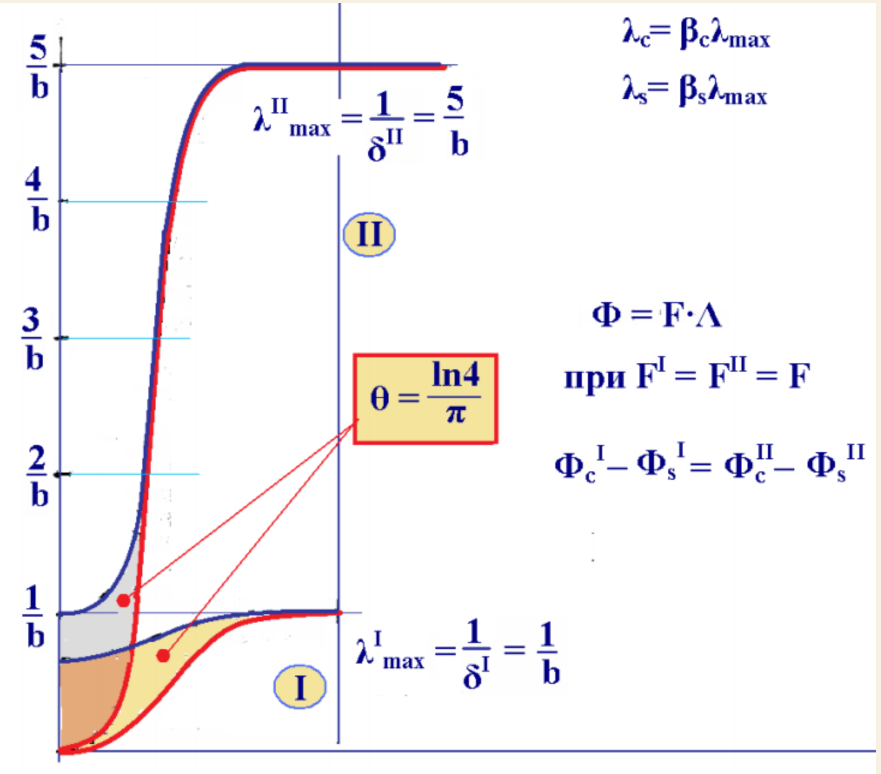
$$\Theta = \frac{\ln(4)}{\pi} = 0.44127$$

→ можно найти проводимость Λ_s как $\Lambda_s = \dfrac{\Lambda_c}{2} - \Theta = \dfrac{t_z}{2\delta k_\delta} - \dfrac{\ln 4}{\pi}$

(при $b_z > 3\delta$)







Магнитное поле в зазоре ЭМ

Итак, мы перешли от анализа сложного несимметричного поля в зазоре
к расчету интегральных величин – магнитных проводимостей

3D $\rightarrow$ 2D $\rightarrow$ поле паза $\rightarrow$ магнитные проводимости $\rightarrow$ кривая B на t_{zi} $\rightarrow$ распределение B_δ

Решена задача о распределении магнитного поля в зазоре ЭМ
Затем – гармонический анализ индукции, расчет потоков и потокосцеплений обмоток, расчет ЭДС
(связь электрической и магнитной цепей электрической машины через постоянные индуктивности)
Но при этом – линейная магнитная цепь (ненасыщенная)

Надо совместить точный анализ поля и учет насыщения отдельных элементов магнитной цепи
Для этого – специальная эквивалентная схема замещения магнитной цепи ЭМ на основе МЗК
(расчет цепи vs расчет поля)

Далее – Метод зубцовых контуров