

Конформные преобразования. Поле линейного тока**Предварительные замечания**

Конформные преобразования – один из методов теории функций комплексного переменного, позволяющий получить аналитические решения для некоторых типов полевых (краевых) задач.

В традиционной теории электрических машин и в современных численных методах чаще всего используются результаты решения полевых задач методом разделения переменных и методом Шварца-Кристоффеля.

Рассмотрим одну из наиболее простых задач – о поле тока, расположенного на одной из сторон двуугольника, внутренние углы которого равны $\pi/2$ и $-\pi/2$ (см. разделы 9 и 10 конспекта лекций по ЭМР).

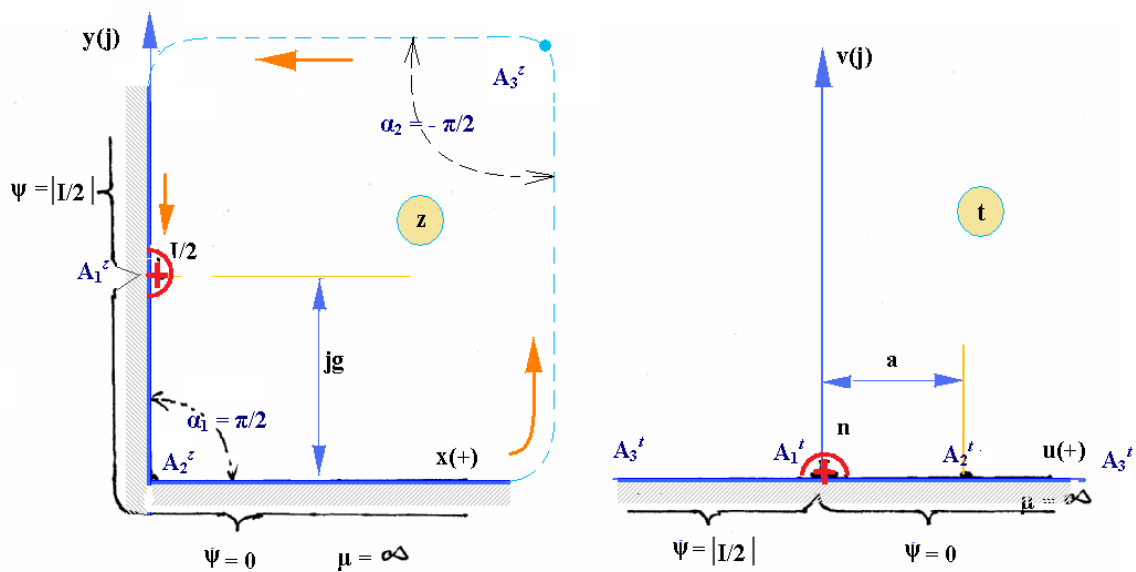


Рис. 1. Слева: к формулировке задачи в исходной комплексной плоскости z ; справа: преобразованная задача в плоскости t

На рис. 1 показаны исходная (в плоскости z) и преобразованная (в плоскости t) задачи. В соответствии с принятым правилом выбора положительных направлений токов и направлений обхода контуров ток, заданный

на стороне двуугольника $A_3^z-A_2^z$, следует считать отрицательным. Если принять, что скалярный магнитный потенциал на участке $A_1^z-A_2^z-A_3^z$ внешней границы области задачи в плоскости z равен нулю, то потенциал на участке $A_3^z-A_1^z$ должен быть положительным и равным модулю тока. Соответственно этому назначаются и граничные условия в плоскости преобразования t

Задача в плоскости t представляется значительно более простой – это не что иное, как рассмотренная ранее задача о поле тока, расположенного в вершине ферромагнитного угла, точнее, частный случай этой задачи, в котором этот угол равен π . Решение для комплексной потенциальной функции в плоскости t имеет вид:

$$w = \frac{I}{2\pi} \ln t \quad , \quad (1)$$

где I – «полный» ток (см. задачу о поле линейного тока), в данном случае вдвое больший заданного тока.

Поскольку значения скалярного магнитного потенциала ψ и функции потока ϕ при конформном преобразовании в сходственных точках сохраняются, решение полевой задачи может быть перенесено из плоскости t в плоскость z .

На рис. 2 показаны картины поля, которые могут быть получены на основе аналитических решений для обеих задач. Выражение для комплексной потенциальной функции в плоскости z и, следовательно, для функций ϕ и ψ , могут быть найдены, если в (1) подставить выражение координаты t через координату z . Однако приведенные картины поля получены с помощью конечно-элементной программы *FEMM*, в которой, как известно, силовые линии магнитного поля строятся как эквипотенциали векторного магнитного потенциала. Поэтому одной из целей этой лабораторной работы является подтверждение того, что в сходственных точках областей, связанных конформным преобразованием, значения ϕ и ψ действительно сохраняются. Кроме того, при моделировании предстоит выявить некоторые геометриче-

ские особенности областей, получаемых в результате конформного преобразования.

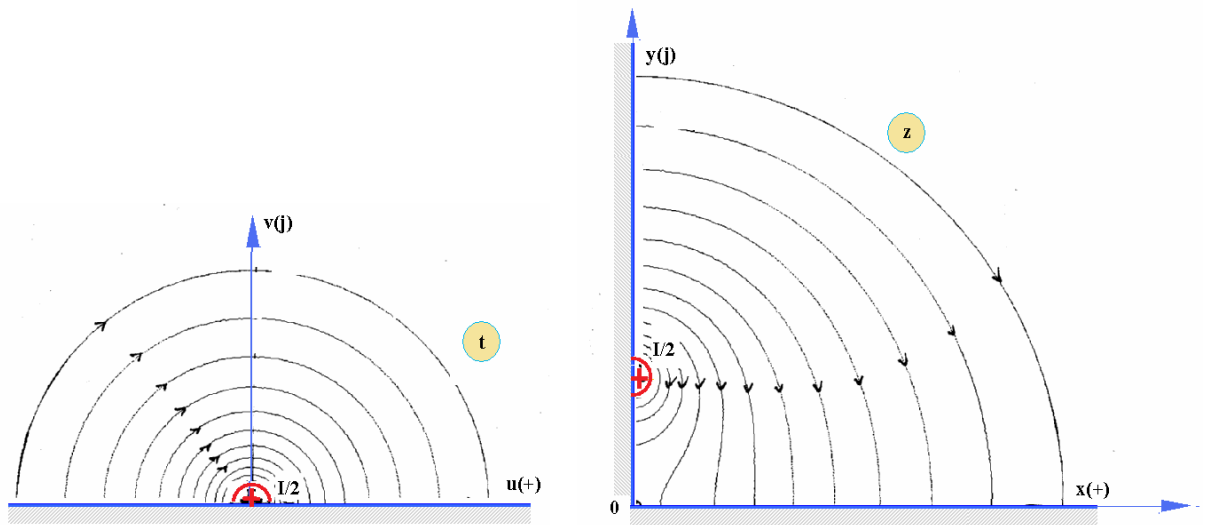


Рис. 2. Картины поля в преобразованной и исходной областях задачи

Модель в плоскости t , полностью отражающая область задачи в плоскости z , должна представлять собой половину круга с радиусом, равным, в соответствии с формулой преобразования координат, примерно квадрату длины заданной стороны прямого угла в плоскости z . При длине стороны угла 100 мм радиус полукруга равен 10000 мм. В то же время, в t -модели должна быть достаточно подробно представлена зона, соответствующая сравнительно небольшим значениям z : $|z| \leq (20 \div 30) \text{ мм}$, т.е. $|t| \leq (400 \div 900) \text{ мм}$. Это означает, что для того чтобы число конечных элементов в t -модели не было чрезмерным и, в то же время, точность моделирования поля в упомянутой зоне малых значений координат была достаточно высокой, размеры элементов должны изменяться в широком диапазоне, постепенно увеличиваясь от центра к периферии области. На рис. 3 показан фрагмент конечно-элементной структуры t -модели, состоящей из нескольких кольцевых зон. Радиус полуокружности, служащей внешней границей, равен 10000 мм, радиусы границ кольцевых зон с различной дробностью

сетки – 50, 150, 250, 500 и 10000 мм; общее число узлов составляет примерно 159 тыс., время решения – несколько секунд на ПК средней производительности.

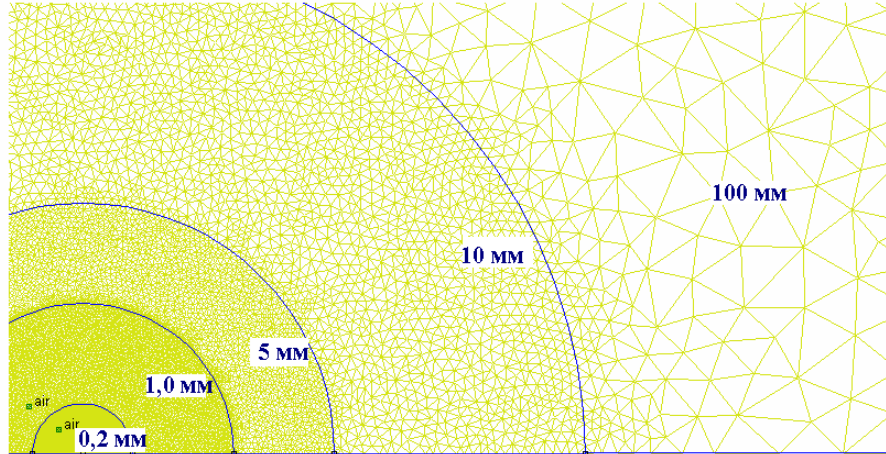


Рис. 3 Конечно-элементная структура модели в плоскости t .

Выражение, позволяющее рассчитать координату z точки, сходственной с выбранной точкой в плоскости t :

$$z = \sqrt{t \cdot \text{мм} - g^2} \quad (2)$$

О достаточно хорошем совпадении значений векторного магнитного потенциала в сходственных точках свидетельствуют данные таблицы 1.

Таблица 1

Плоскость z		Плоскость t	
Координата z , мм	Значение потенциала A_z , Вб/м	Координата t , мм	Значение потенциала A_t , Вб/м
20	0,0001197	500	0,0001197
10	0,0001564	200	0,0001564
7,071i	0,0002118	50	0,0002119
12,247i	0,0002118	-50	0,0002119
2,014 + 12,412i	0,0001979	-50 + 50i	0,0001980
14,426 + 10,398i	0,0001328	200 + 300i	0,0001328
36,396 + 20,607i	0,0000685	1000 + 1500i	0,0000685
72,957 + 20,56i	0,0000215	5000 + 3000i	0,0000217

Покажем, как, пользуясь численным решением, полученным в конформно преобразованной плоскости, найти в исходной комплексной плоскости координаты точек, лежащих на одной эквипотенциали скалярного магнитного потенциала (напомним, что программа *FEMM* оперирует с векторным магнитным потенциалом).

Способ построения эквипотенциали в плоскости z .

В плоскости t эквипотенциали представляют собой прямые, проходящие через точку приложения тока, т.е. через начало координат. Угол наклона эквипотенциали к оси абсцисс определяется значением потенциала. Выделив на выбранной эквипотенциали ряд точек, с помощью формулы преобразования координат можно вычислить координаты сходственных им точек в плоскости z . Рекомендуется построить эти точки на z -модели, затем решить задачу, получив картину силовых линий, и убедиться в том, что линия, проходящая через построенные точки, ортогональна по отношению к силовым линиям.

Пример *mcd*-файла, в котором вычисляются координаты сходственных точек и строится график эквипотенциали скалярного магнитного потенциала в плоскости z .

Зададимся значением потенциала и найдем угол наклона эквипотенциали к оси абсцисс.

$$\psi := \frac{I}{3} \quad \psi = 33.333 \text{ A} \quad \alpha_\psi := \frac{\pi}{3} \quad \alpha_\psi = 1.047$$

Модуль радиус-вектора точки на окружности, ограничивающей рассматриваемую часть области задачи в плоскости t :

$$\text{modr}_t := 1000 \cdot \text{мм} \quad \text{modr}_t = 1 \times 10^3 \text{ мм} \quad i := \sqrt{-1} \quad i = i$$

Число точек на эквипотенциали в плоскости t и их координаты:

$$n_{t,\text{max}} := 150 \quad n := 1..n_{t,\text{max}}$$

$$t(n) := \frac{\text{mod } r_t}{n_{t,\text{max}}} \cdot n \cdot (\cos(\alpha_\psi) + \sin(\alpha_\psi) i)$$

**Координаты сходственных точек
в плоскости z:**

$$z(n) := \sqrt{t(n) \cdot \text{MM} - g^2}$$

$$x_{1,n} := \text{Re}(z(n))$$

$$y_{1,n} := \text{Im}(z(n))$$

	1		1
1	3.33+5.77i	MM	0.29+9.84i
2	6.67+11.55i		0.6+9.68i
3	10+17.32i		0.91+9.53i
4	13.33+23.09i		1.23+9.39i
5	16.67+28.87i		1.56+9.26i
6	20+34.64i		1.89+9.14i
7	23.33+40.41i		2.24+9.04i
8	26.67+46.19i	MM	2.58+8.94i
9	30+51.96i		2.93+8.87i
10	33.33+57.74i		3.28+8.8i
11	36.67+63.51i		3.63+8.75i
12	40+69.28i		3.98+8.71i
13	43.33+75.06i		4.32+8.68i
14	46.67+80.83i		4.66+8.67i
15	50+86.6i		5+8.66i
16	53.33+92.38i		5.33+8.66i

x =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	MM
1	0.29	0.6	0.91	1.23	1.56	1.89	2.24	2.58	2.93	3.28	

x =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	MM
1	0.29	0.6	0.91	1.23	1.56	1.89	2.24	2.58	2.93	3.28	

y =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	MM
1	9.84	9.68	9.53	9.39	9.26	9.14	9.04	8.94	8.87	8.8	

y =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	MM
1	9.84	9.68	9.53	9.39	9.26	9.14	9.04	8.94	8.87	8.8	

**Изображение эквипотенциали в плоскости z (координаты точки приложения тока:
x = 0 мм, y = 10 мм)**

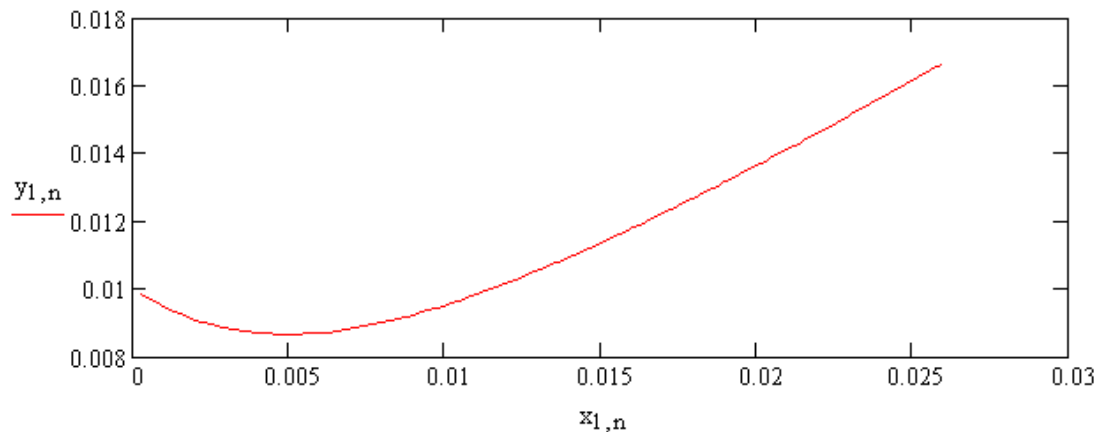


Рис. 4. К построению эквипотенциали скалярного магнитного потенциала в исходной плоскости

Здесь показан ход эквипотенциали на начальном участке - при ограничении области в плоскости t радиусом 1000 мм. Это сделано для того, чтобы более подробно показать, как проходит эквипотенциаль в ближайшей окрестности тока. По этим же соображениям число точек на эквипотенциали выбрано довольно большим - 150, что было бы неудобно при ручном вводе координат точек на z -модели, но не вызывает затруднений при пользовании *MathCAD*'ом. При необходимости границы области, в которой строится эквипотенциаль, и число точек, фиксируемых на ней, легко изменить.

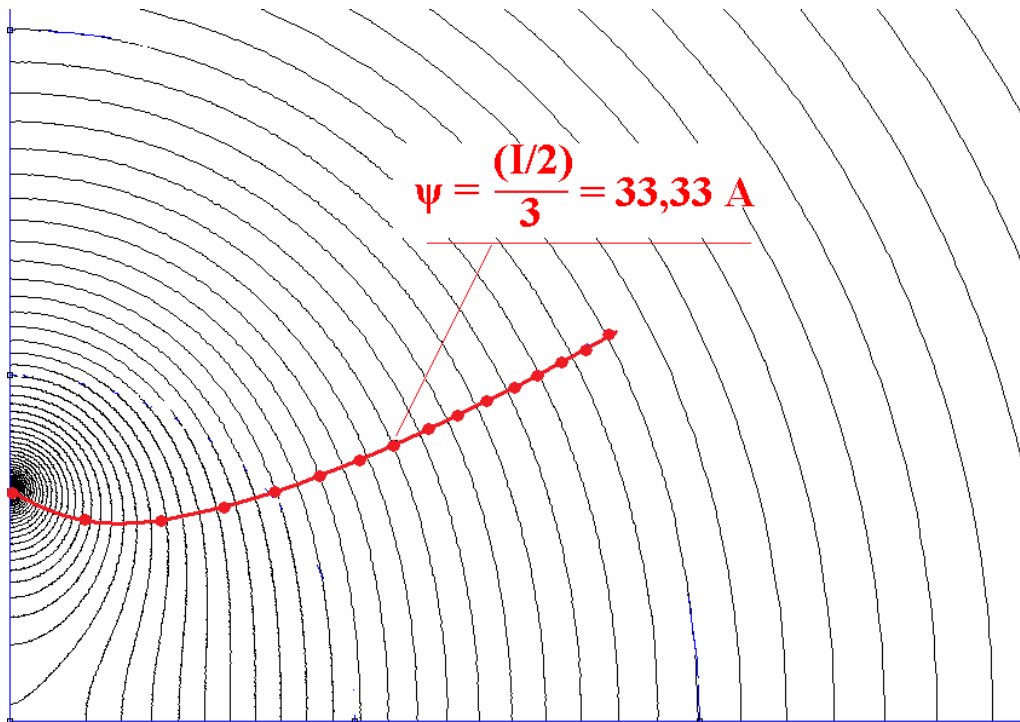


Рис. 5. Эквипотенциаль скалярного магнитного потенциала в исходной плоскости z

Программа работы.

1. Ознакомиться с теоретическим материалом (разделы 8 -11 конспекта лекций по ЭМП)
2. Решить полевую задачу по данным, приведенным в таблице.

