

Конформные преобразования. Нечетное поле пазПредварительные замечания

Анализ поля в зоне раскрытия паз важен как для построения общей теории электрических машин, так и для разработки теории универсального метода расчета [1], первоначально названного методом зубцовых контуров [2]. Поле рассматривается на одном зубцовом делении сердечника при допущении бесконечной магнитной проницаемости стали и отсутствия пазов на противоположном сердечнике. При произвольных граничных условиях, т.е. при произвольно заданных значениях скалярного магнитного потенциала зубцов, ограничивающих рассматриваемый паз, задача не имеет аналитического решения. Однако в этом случае поле может быть представлено в виде суммы двух симметричных составляющих – *четного поля*, созданного источниками, внешними по отношению к рассматриваемому пазу (можно сказать, токами всех других пазов сердечника), и *нечетного поля*, созданного током рассматриваемого паз в предположении, что других источников поля нет. Смысл разложения заключается в том, что обе полевые задачи, соответствующие каждому из таких полей, могут быть решены аналитически.

При этом решении используется конформное преобразование исходной области, имеющей на плоскости оригинала z вид вырожденного четырехугольника, на верхнюю полуплоскость плоскости отображения t . Границы исходного четырехугольника, две вершины которого расположены в бесконечности, отображаются при этом на вещественную ось плоскости t . Перенесение заданных граничных условий из плоскости z в плоскость t приводит в случае четного поля к задаче о двух намагниченных пластинах, а в случае нечетного поля к задаче о поле линейного тока на поверхности плоского сердечника. Функция преобразования координат находится в результате решения дифференциального уравнения Шварца-Кристоффеля и имеет следующий вид:

$$z = \frac{2\delta}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\eta}{\sqrt{a}} \right) + \operatorname{arth}(\eta) \right] = f(t), \quad (1)$$

где $\eta = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}$, $a = \left(\frac{\delta}{b}\right)^2$, δ – воздушный зазор между сердечниками, b – половина ширины паза.

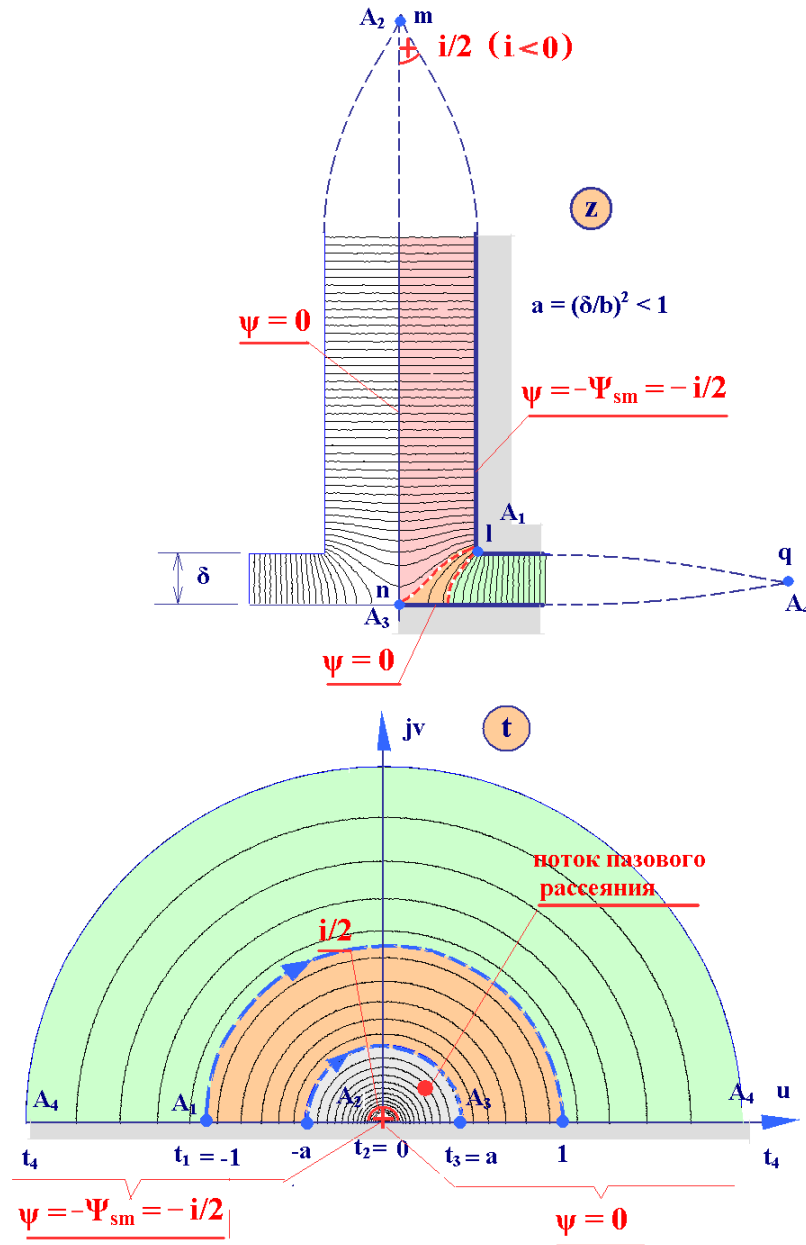


Рис. 1. Конформное преобразование области паза и картины поля, полученные в результате решения задачи о нечетном поле паза

На рис. 1, в верхней его части, показан исходный четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$, вершины A_2 и A_4 которого расположены в бесконечности (их коор-

динаты на комплексной плоскости z : $0 + j\infty$ и $\infty + j0$). При рассмотрении нечетного поля в вершине A_2 должен быть задан ток паза.

Покажем с помощью конечно-элементных моделей, что между полем в четырехугольнике $A_1A_2A_3A_4$ и полем верхней полуплоскости t , на которую он отображается, имеется соответствие, определяемое конформным преобразованием (1). Заметим только, что с учетом $\mathbf{arth}(\eta) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta}$, функция преобразования может быть представлена и в таком виде:

$$z = \frac{2\delta}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \mathbf{arctg} \left(\frac{\eta}{\sqrt{a}} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} \right] = f(t) \quad (2)$$

При формировании конечно-элементной модели, соответствующей исходной задаче, глубину паза зададим конечной, но достаточно большой (не менее полуторакратной ширины паза) для того чтобы исключить влияние тока, расположенного на дне паза, на распределение поля в зоне раскрытия паза. Таким же образом поступим с вершиной A_4 , расположив ее не в бесконечности, а на достаточном удалении от края зубца (на расстоянии не менее полуторакратного зазора). Однако задание конечного значения координаты точки A_4 в исходной плоскости z требует задания конечного значения координаты образа точки A_4 в плоскости t . Это значение координаты можно найти, решая уравнение преобразования координат (1) или (2). Сделать это удобно в программе *MathCAD*, задавая действительные значение t и постепенно приближаясь к известному значению z – заданной координате точки A_4 .

На рис. 2 показана конечно-элементная модель исходной области. Ток (равный половине тока паза) может быть задан в одной из точек на линии дна паза $A_2 A_2$, либо на участке в виде полосы, расположенной вблизи дна паза. На всех границах модели, кроме участка $A_4 A_4$, должно быть задано однородное условие Неймана, а на $A_4 A_4$ – условие Дирихле (можно задать $A = 0$).

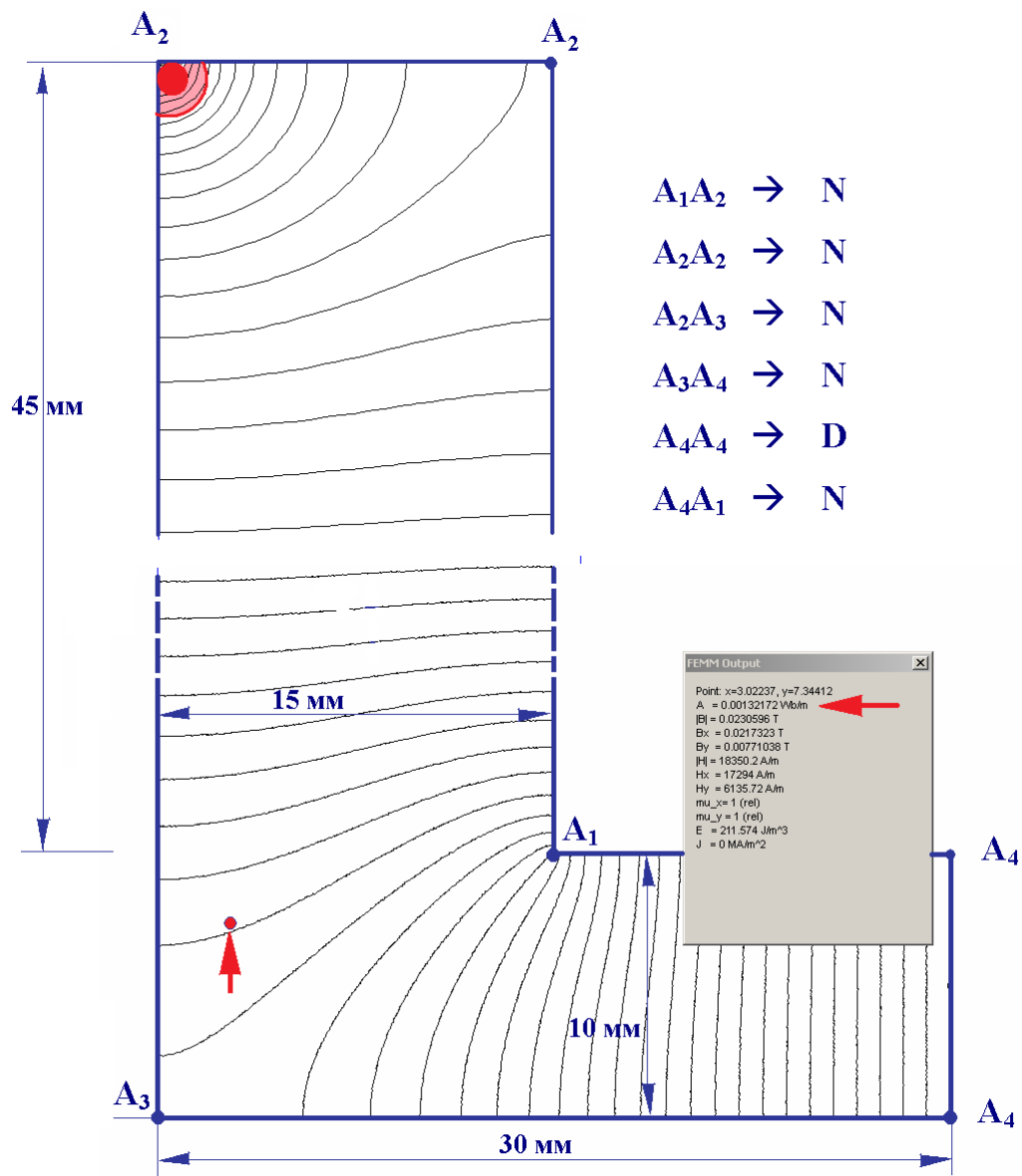


Рис. 2. Размеры и граничные условия конечно-элементной модели, картина поля, полученная в результате решения на этой модели задачи о нечетном поле паза

Модель, соответствующая конформному отображению четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$, и полученная на ней картина поля показаны на рис. 3. Следует сказать о некоторых особенностях формирования этой модели.

Во-первых, на этой модели должны быть воспроизведены отрезки существенно различной длины: если координаты образов точек A_1 и A_3 равны соответственно -1 и $a = 0,444$ (при формировании модели примем, что единица безразмерной координаты в плоскости t соответствует 1 мм), то коор-

дината образа точки A_4 равна 235,3 мм (результат расчета по (1)). Во-вторых, с учетом того, что поле в окрестности образов точек A_1 , A_2 и A_3 должно быть воспроизведено с наибольшей точностью, размеры конечных элементов в этой зоне следует задать достаточно малыми. В связи с этим область задачи в преобразованной плоскости разбита полуокружностями на несколько участков, в которых максимальные размеры конечных элементов изменяются от 0,01 до 5 мм. При таких условиях общее число узлов в модели получается довольно большим – более 400 тыс., что примерно на порядок больше, чем обычно рекомендуется для магнитоэлектростатических задач. Однако, поскольку рассматриваются линейные среды, такое увеличение числа узлов не приводит к недопустимому увеличению времени решения.

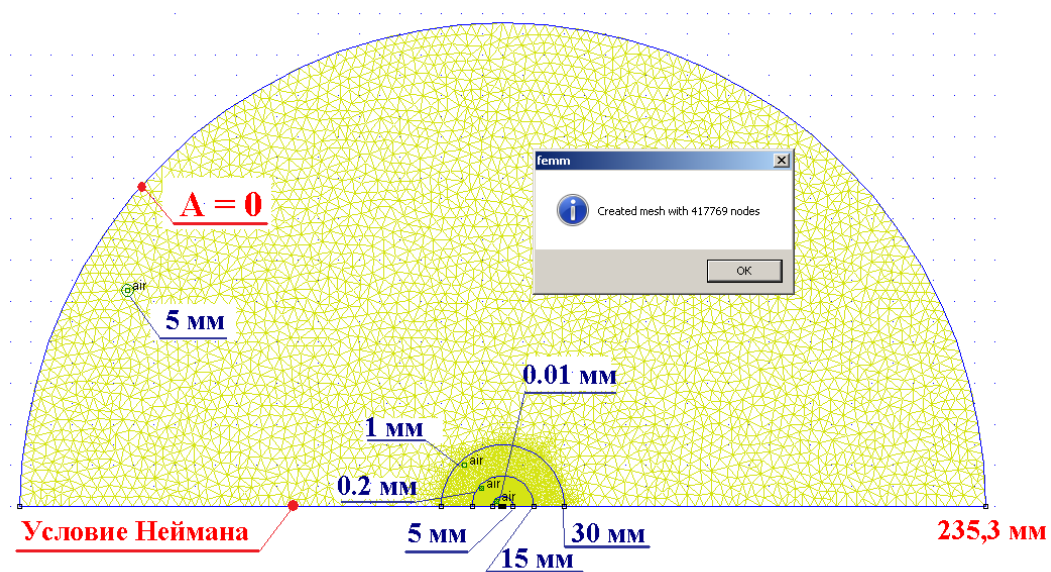


Рис. 3. Размеры и граничные условия конечно-элементной модели в преобразованной плоскости

На рис. 4 показан фрагмент полной модели, соответствующий центральной зоне (окрестности образов точек A_1 , A_2 и A_3). Там же показана произвольно выделенная точка с координатой $0,3 + j0,1$, для которой будет

найдена сходственная точка в плоскости z и будет произведено сравнение величин поля в сходственных точках обеих моделей

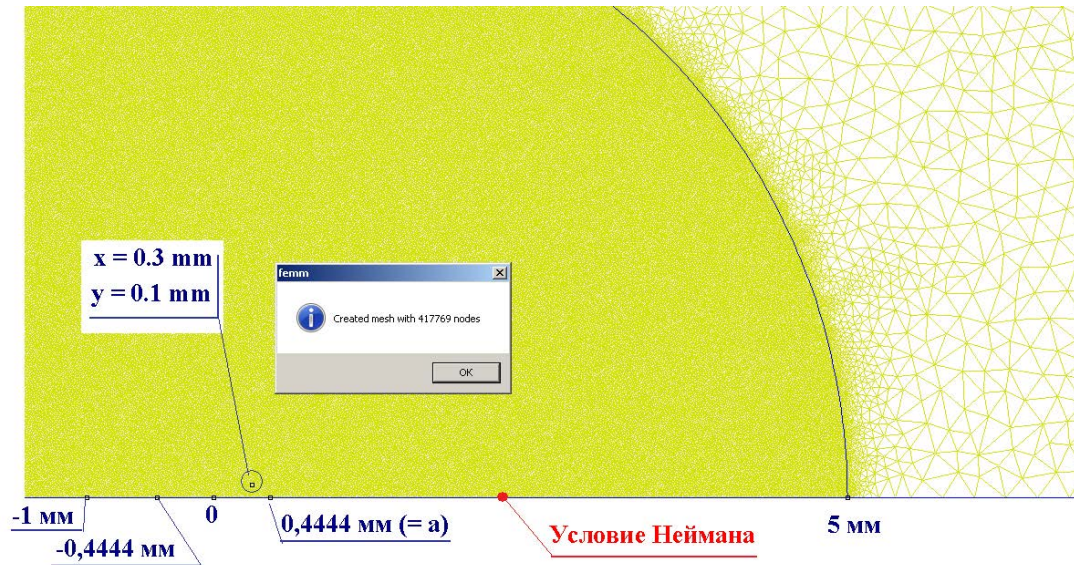


Рис. 4. Фрагмент модели, показанной на рис. 3

На рис. 5 показана картина поля, в центральной зоне модели. Значение векторного магнитного потенциала в выделенной точке равно 0,00132182 Вб/м, что менее чем на 0,05% отличается от значения векторного магнитного потенциала в сходственной точке (см. рис. 2).

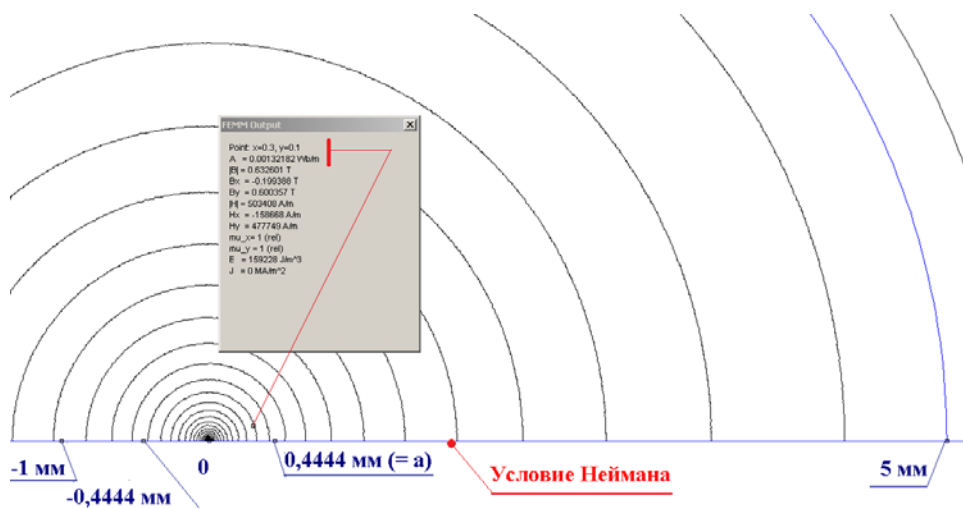


Рис. 5. Картина поля в центральной части модели в преобразованной плоскости

Сохранение значений векторного магнитного потенциала в сходственных точках объясняется тем, что при конформном преобразовании сохраняется значение комплексной потенциальной функции и, соответственно, значения ее действительной и мнимой компонент, т.е. функции потока φ , определенной, как известно, через векторный магнитный потенциал, и скалярного магнитного потенциала ψ . Кстати, из сохранения значений функции потока и векторного магнитного потенциала следует, что на сходственных участках сохраняются значения потоков. В этом легко убедиться, проинтегрировав на таких отрезках нормальную составляющую индукции.

Значения напряженности поля в сходственных точках не сохраняются, поскольку для этого требовалось бы сохранение *градиента* скалярного магнитного потенциала. Однако значения напряженности поля в исходной модели (на плоскости z) могут быть рассчитаны по известным значениям тока паза (или, другими словами, разности скалярных магнитных потенциалов сердечников) и координате образа рассматриваемой точки t :

$$|H_s| = \left| \frac{\Psi_{sm} \sqrt{t-a}}{\delta \sqrt{t+1}} \right|, \quad (3)$$

где $\Psi_{sm} = i/2$ – скалярный магнитный потенциал зубца в задаче о нечетном поле, i – ток паза, δ – зазор между сердечниками.

Программа работы

1. По данным, приведенным в таблице (вариант задания указывается преподавателем) построить исходную конечно-элементную модель, соответствующую половине зубцового деления. Выполнить моделирование магнитного поля.
2. Рассчитать координаты характерных точек модели, являющейся конформным отображением исходной модели на верхнюю полуплоскость. Построить эту модель. Выполнить моделирование магнитного поля.

3. Сравнить значения векторных магнитных потенциалов в сходственных точках (координаты точек t_A в плоскости отображения указаны в таблице).
4. Сравнить значения магнитных потоков на сходственных участках моделей (граничные точки указаны в таблице)
5. По координатам точки t_H (см. таблицу) вычислить координаты сходственной точки z_H в плоскости z , вычислить значение напряженности поля в точке z_H по выражению (3) и сравнить его с измеренным значением напряженности на исходной модели.
6. Оценить точность моделирования, полагая за истинные значения результаты расчетов по аналитическим выражениям.
7. Сделать выводы и составить отчет о проделанной работе.

Вариант		1	2	3	4	5	6	7
Ширина паза, b_p , мм		30	40	30	25	25	40	40
Зазор δ , мм		10	10	8	12	8	8	12
Координата точки t_A	x , мм	0,30	0,50	0,70	0,80	1,00	0,5	1,00
	y , мм	0,10	0,10	0,08	0,10	0,07	0,05	0,08
Границы сходственных участков		A_4-A_1	A_3-A_1	A_4-A_1	A_3-A_1	A_4-A_1	A_3-A_1	A_4-A_1
Координата точки t_H	x , мм	0,3	0,70	0,80	1,00	0,5	1,00	1,00
	y , мм	0,1	0,08	0,10	0,07	0,05	0,08	0,07

Примечание. При формировании исходной модели принять глубину паза равной полуторакратной ширине паза, а ширину зубца принять равной трем зазорам.