

Магнитные поля в электрических машинах – введение

Можно по-разному ответить на вопрос «Что такое магнитное поле?». Электромехаников вполне устроило бы такое определение: это *пространство, обладающее свойствами, делающими возможным электромеханическое преобразование энергии, т.е. силовое взаимодействие токов, движущихся зарядов и постоянных магнитов (магнитных диполей)*.

Мы привыкли к тому, что магнитное поле может быть изображено в виде *картины поля*, получить которую можно разными способами, например, опытным путем – насыпав железные опилки на лист бумаги, под которым помещен магнит.

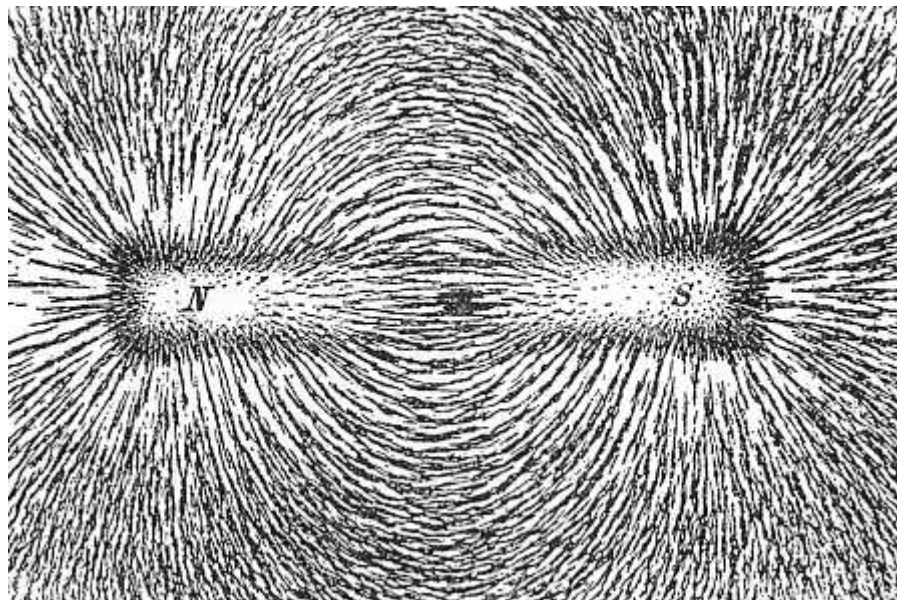


Рис. 1. Картина поля магнита, полученная с помощью железных опилок. Из статьи «Магнитное поле» в Википедии (источник: *Newton Henry Black, Harvey N. Davis (1913), Practical Physics*)

Рассматривая эту фотографию, можно заметить, что мелкие опилки, под действием неких *сил* притягиваются друг к другу, образуя удлиненные скопления, ориентирующиеся вдоль линий, которые, вполне уместно назвать *силовыми*. Интуиция подсказывает также, что наибольшая концентрация опилок наблюдается на участках наибольшей интенсивности поля, т.е. в тех зонах, где на опилки действуют наибольшие силы.

Из сказанного можно сделать вывод о том, что нарисованная *по определенным правилам* картина поля может нести в себе количественную информацию, полезную при анализе (расчете) конкретного электротехнического устройства, в частности, электрической машины.

Напомним эти правила, заодно дав некоторые определения, многие из которых, впрочем, хорошо известны.

Вектор магнитной индукции показывает направление и (в определенном масштабе) величину силы, действующей на пробный элемент (малый магнит или малую катушку с током), внесенный в магнитное поле.

Силовой линией магнитного поля является такая линия, в каждой точке которой вектор индукции направлен по касательной к ней (первое основное правило построения картины поля).

Силовой трубкой поля назовем часть пространства, ограниченную замкнутой поверхностью, образованной множеством силовых линий.

Следствия: 1) на поверхности силовой трубки магнитного поля вектор индукции всегда направлен по касательной к поверхности; 2) ни проходящие внутри трубки силовые линии, ни проходящие вне ее, не пересекают поверхность трубки; 3) если связать каждую силовую линию внутри трубки с определенной частью ее поперечного сечения, можно утверждать, что число силовых линий на всем протяжении трубки постоянно. Это эквивалентно утверждению, что магнитный поток в силовой трубке постоянен; 4) плоско-параллельное поле может быть представлено плоской картиной поля, на которой силовые линии являются следами поверхностей, ограничивающих силовые трубки.

Принято на картине поля изображать силовые линии, соответствующие трубкам, по которым проходят одинаковые магнитные потоки.

На втором рисунке также показана картина поля постоянного магнита, но получена она уже расчетным путем. Поговорим немного о методе расчета. Он заключается в решении дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, например, такого:

$$\frac{\partial^2 A_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z(x, y)}{\partial y^2} = -\mu j_z(x, y) \quad (1)$$

Это уравнение описывает распределение некоторой функции $A_z(x, y)$ в двумерной области, расположенной в плоскости xOy . Функция $j_z(x, y)$ считается заданной и вместе с заданными *граничными условиями* определяет распределение искомой функции $A_z(x, y)$. Поскольку речь идет о нахождении поля значений функции $A_z(x, y)$, будем называть решение уравнения (1) решением *полевой задачи*.

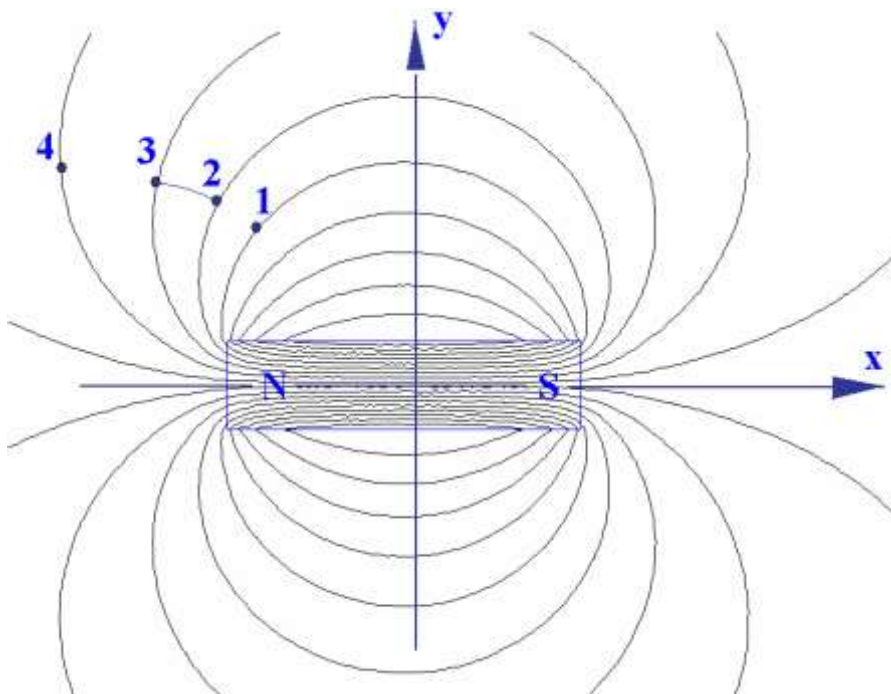


Рис. 2. Картина поля магнита, рассчитанная с помощью конечно-элементной программы *FEMM*. Картина поля построена так, что магнитные потоки, соответствующие трубкам, ограниченными линиями 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 и т.д., одинаковы

Картина магнитного поля, показанная на рис. 2, является решением полевой задачи, сформулированной в терминах *векторного магнитного потенциала* \bar{A} . Мы в дальнейшем будем рассматривать только двумерные плоско-параллельные и осесимметричные поля. В данном случае найдено решение для плоско-параллельного (для краткости иногда говорят плоского) поля, и постоянный магнит следует представлять в этом случае в виде бес-

конечно длинного (протяженного вдоль оси z) бруска с поперечным сечением, показанным на рисунке.

Векторный магнитный потенциал это некоторая вспомогательная функция, введение которой позволяет сформулировать *уравнения Максвелла* в виде дифференциальных уравнений типа (1), методы решения которых (аналитические или численные) математиками достаточно хорошо разработаны. С вектором магнитной индукции векторный магнитный потенциал связан следующим образом:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad (2)$$

что можно считать его определением.

Можно показать, что векторный магнитный потенциал двухмерного поля имеет только одну составляющую, направленную перпендикулярно плоскости поля. Так, если силовые линии поля располагаются в плоскости xOy , как на рис. 2, векторный магнитный потенциал имеет только z -ю составляющую $\vec{A}_z = \bar{q}_z A_z$, где \bar{q}_z - орт. Можно показать также, что в этом случае силовая линия поля является *эквипотенциалью* векторного магнитного потенциала, т.е. вдоль всей силовой линии потенциал имеет одно и то же значение.

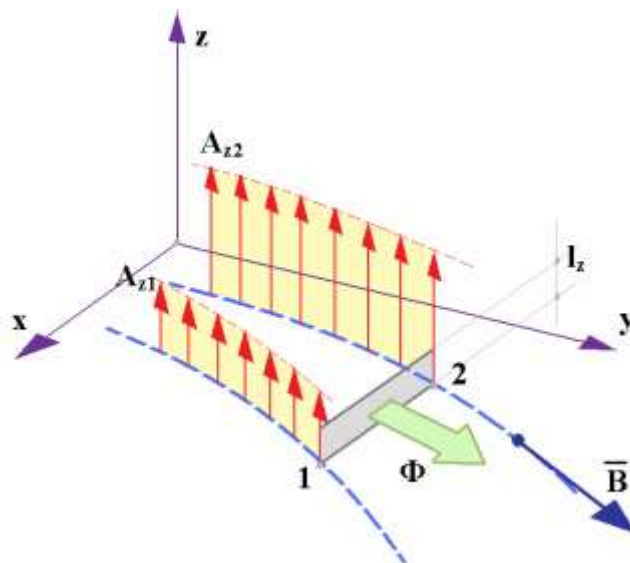


Рис. 3. Векторный магнитный потенциал плоско-параллельного поля

Рис. 3 позволяет получить ясное представление о физическом смысле векторного магнитного потенциала плоско-параллельного поля. Картина поля располагается в плоскости xOy . Две силовые линии, проходящие через точки 1 и 2, являются следами поверхностей, ограничивающих трубку поля, и, как было сказано, являются эквипотенциалами векторного магнитного потенциала – на одной из них он имеет значение \bar{A}_{z1} , а на второй – \bar{A}_{z2} . Можно показать, что модуль разности значений векторного магнитного потенциала $|\bar{A}_{z1} - \bar{A}_{z2}|$ равен потоку вектора индукции (т.е. магнитному потоку) силовой трубки, приходящемуся на единицу длины вдоль оси z .

Обратимся вновь к рис. 2. Силовые линии изображенного на нем поля выбраны таким образом, что разности векторных магнитных потенциалов любых двух соседних линий одинаковы. Другими словами, одинаковы магнитные потоки всех изображенных силовых трубок, для которых силовые линии являются ограничителями. Таким образом, плотность силовых линий оказывается пропорциональной индукции поля (точнее, модулю вектора индукции на рассматриваемом участке поля). Зная значения векторного магнитного потенциала на линиях, проходящих через две точки, например, 2 и 3, и расстояние между этими линиями, отсчитанное по кривой, ортогональной по отношению к силовым линиям (т.е. проведенной так, что вектор индукции в каждой точке этой линии направлен по нормали к ней), можно определить среднее значение индукции на отрезке 2-3. Так, если $A_{z2} = 0,001866$ Вб/м, $A_{z3} = 0,001360$ Вб/м и $l_{23} = 7,2$ мм,

$$B_{cp,23} = \frac{|A_{z2} - A_{z3}|}{l_{23} \cdot l_z} = \frac{0,001866 - 0,00136}{7,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1} = 0,070 \text{ Тл,}$$

где l_z – размер силовой трубки в направлении оси z . Поскольку значения векторного магнитного потенциала даны в Вб/м, размеры l_{23} и l_z при вычислении площади должны подставляться в метрах.

Решение полевой задачи, проиллюстрированное рисунком 2, получено с помощью *конечно-элементной* программы *FEMM*, разработанной про-

фессором Дэвидом Микером (*David Meeker*), США [1]. Эта программа доступна для пользователей сети Интернет и овладение ей настоятельно рекомендуется всем студентам-электромеханикам. Все полевые расчеты, результаты которых приведены в настоящем пособии, выполнены с помощью этой программы.

1. Простейшие полевые задачи. Программа *FEMM*

1.1. Равномерное поле

Начнем с самого простого. Рассмотрим плоский воздушный зазор между двумя стальными сердечниками, магнитная проницаемость которых бесконечно велика. Сформулируем такие условия задачи, при которых в зазоре было бы создано равномерное магнитное поле с заданным значением индукции и с заданным направлением вектора индукции. Напомним, что мы будем рассматривать только двумерные поля.

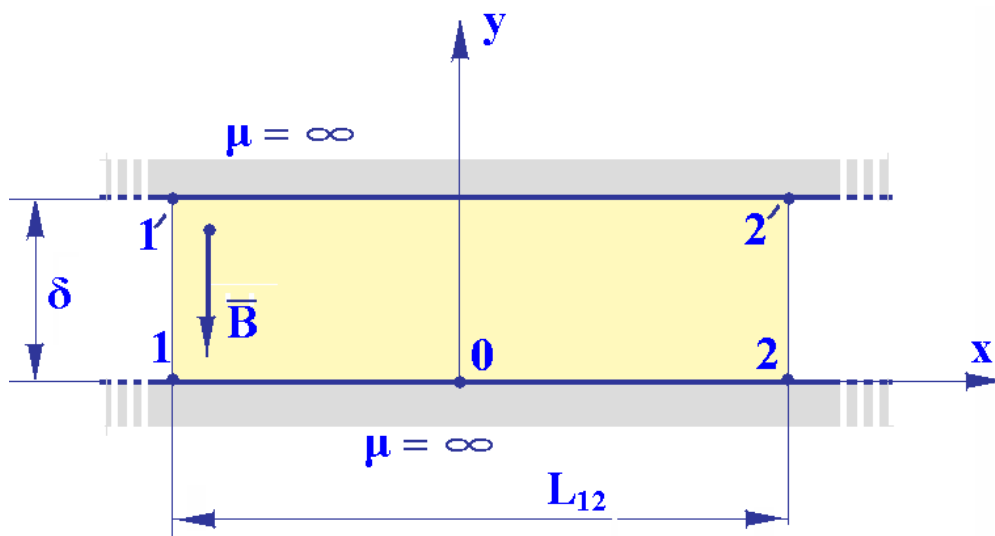


Рис. 4. Требуется построить поле в плоском зазоре с заданным значением индукции

Итак, задано направление вектора индукции сверху вниз: $\vec{B} = -\bar{q}_y B_y$. Это означает, что силовые линии поля в зазоре также направлены параллельно

лельно оси ординат и, соответственно, перпендикулярны поверхностям верхнего и нижнего сердечников. Поскольку силовые линии являются эквипотенциалами векторного магнитного потенциала, можно утверждать, что на боковых границах выделенной прямоугольной области $1-2-2'-1'$, совпадающих с силовыми линиями, должны быть заданы значения потенциала, т.е. должны быть выполнены *граничные условия Дирихле (Dirichlet)*, а на нижней и верхней границах должно быть задано условие $\partial A_z / \partial n = 0$, т.е. выполнены *однородные граничные условия Неймана (Neumann)*. В отсутствие источников поля в области задачи распределение векторного магнитного потенциала описывается *уравнением Лапласа*

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Посмотрим теперь, какие значения векторного магнитного потенциала должны быть заданы на левой и правой границах области. Определена может быть разность этих значений. Для этого кроме значения индукции должен быть задан размер L_{12} . Действительно, в этом случае поток через площадь шириной L_{12} и «глубиной» 1 м (в дальнейшем, как и в программе *FEMM*, будем употреблять этот термин без кавычек), определяется заданной индукцией, в свою очередь, определяет разность потенциалов:

$$\Phi_{12} = B \cdot (L_{12} \cdot l_z) = |A_{z1} - A_{z2}| \cdot l_z, \quad (4)$$

где $l_z = 1$ м.

Для определенности одним из значений потенциала следует задаться.

Пусть $B = 1$ Тл и $L_{12} = 200$ мм. Тогда в соответствии с (4) разность потенциалов равна 0,2 Вб/м и, задавшись $A_{z,лев} = -0,1$ Вб/м, найдем, что $A_{z,прав} = +0,1$ Вб/м.

На рис. 5 представлены результаты решения этой полевой задачи с помощью программы *FEMM*. На рисунке показана область задачи, указаны граничные условия (*D* – Дирихле, *N* – Неймана), картина поля, которую строит постпроцессор программы на экране компьютера, показано значение

индукции в произвольно выбранной точке (одна из возможностей анализа решения, также предоставляемая постпроцессором).

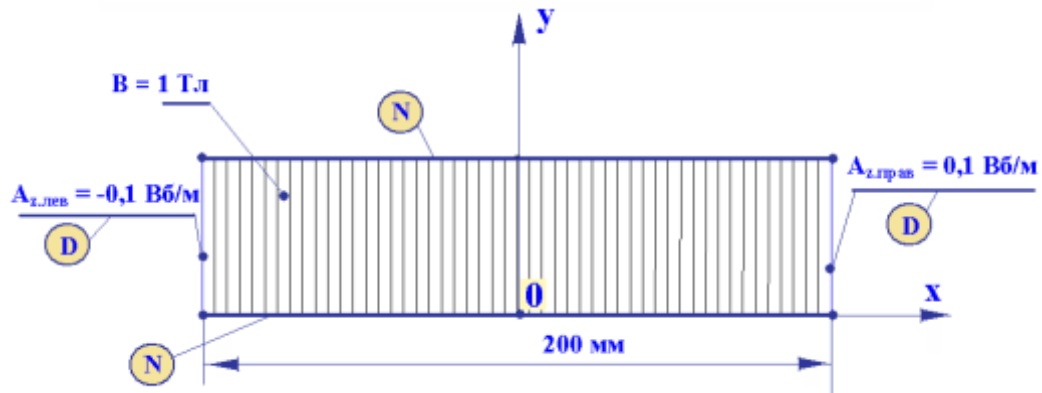


Рис. 5. Граничные условия и результат решения задачи о равномерном поле в плоском зазоре

О программе *FEMM* поговорим немного подробнее.

Построение области задачи, задание внешних граничных условий и свойств участков области, соответствующих различным средам, и формирование конечно-элементной сетки производится при работе с препроцессором программы.

Геометрические построения осуществляются в результате операций с объектами трех типов: *точками*, *отрезками прямых* и *дугами окружностей* (см. рис. 6). Выбор типа объекта производится нажатием соответствующей кнопки на панели операционного поля программы на экране компьютера.

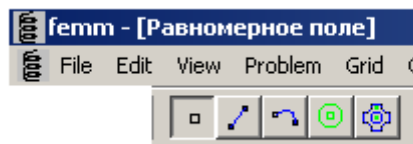


Рис. 6. Фрагмент верхней панели операционного поля программы *FEMM*. Основные типы объектов, с помощью которых производятся геометрические построения. В данном случае выбран объект «точка»

Задавать положение выбранного объекта можно во всплывающем окне, появляющемся на экране после нажатия клавиши табуляции. Удобно также при построениях пользоваться средствами редактирования (рис. 7). Эти операции выполняются после выделения объекта с помощью правой клавиши мыши и после нажатия кнопки *Edit*.

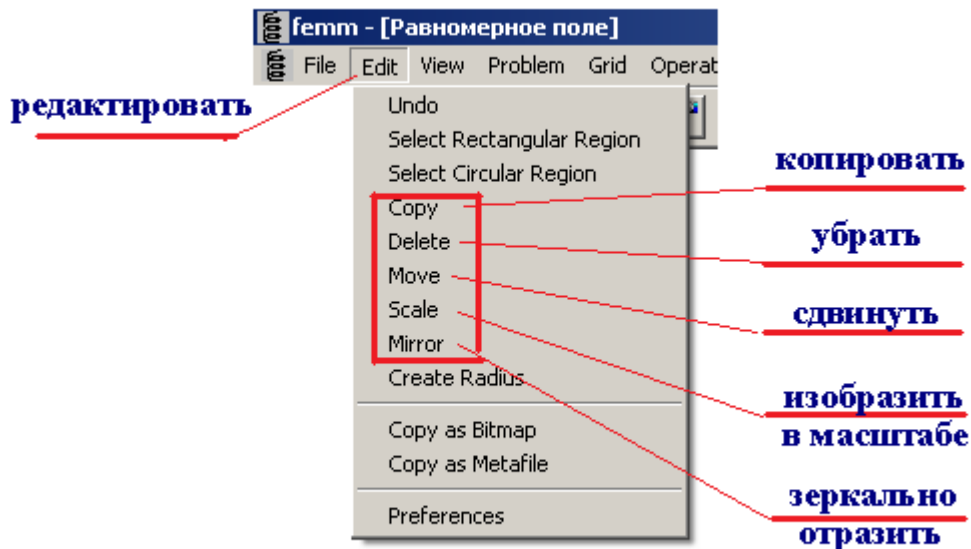


Рис. 7. Средства редактирования при формировании области задачи

Нажатие четвертой слева кнопки на рис. 5 (две зеленых концентрических окружности) позволяет задать выбранному **блоку** определенные свойства. Блоком называется односвязная подобласть области задачи. Задание свойств производится для **выделенного** блока.

Кроме выделения объектов одного типа с помощью правой клавиши мыши можно выделить объекты **всех** типов, нажав пятую слева, из показанных на рис. 5, кнопку и затем охватив подлежащее выделению прямоугольным контуром или контуром в виде окружности (выбор типа контура – с помощью кнопок, расположенных на той же панели правее).

На рис. 8 показано, как можно задать имя и свойства блока. Последовательность действий: *Properties* (Свойства) → *Materials* (Материалы) → *Add property* (Добавить свойство). При решении **магнитоэлектростатических** за-

доч требуется определить: относительную магнитную проницаемость по обеим осям (*Relative μ_x* и *Relative μ_y*), если она постоянна (линейный в магнитном отношении материал – (*Linear Material Properties*)), кривую намагничивания (*B-H curve*) для ферромагнетика с нелинейными свойствами (*Nonlinear Material Properties*), коэрцитивную силу (*Coercivity*), если заданы свойства постоянного магнита, плотность тока (*J*), если определяемый блок представляет поперечное сечение провода или катушечной стороны, по которым протекает ток источника (*Source current*). Важно отметить, что материалы (имена и свойства) можно брать из библиотеки материалов (*Materials Library*), которую, в свою очередь, можно пополнять новыми данными.

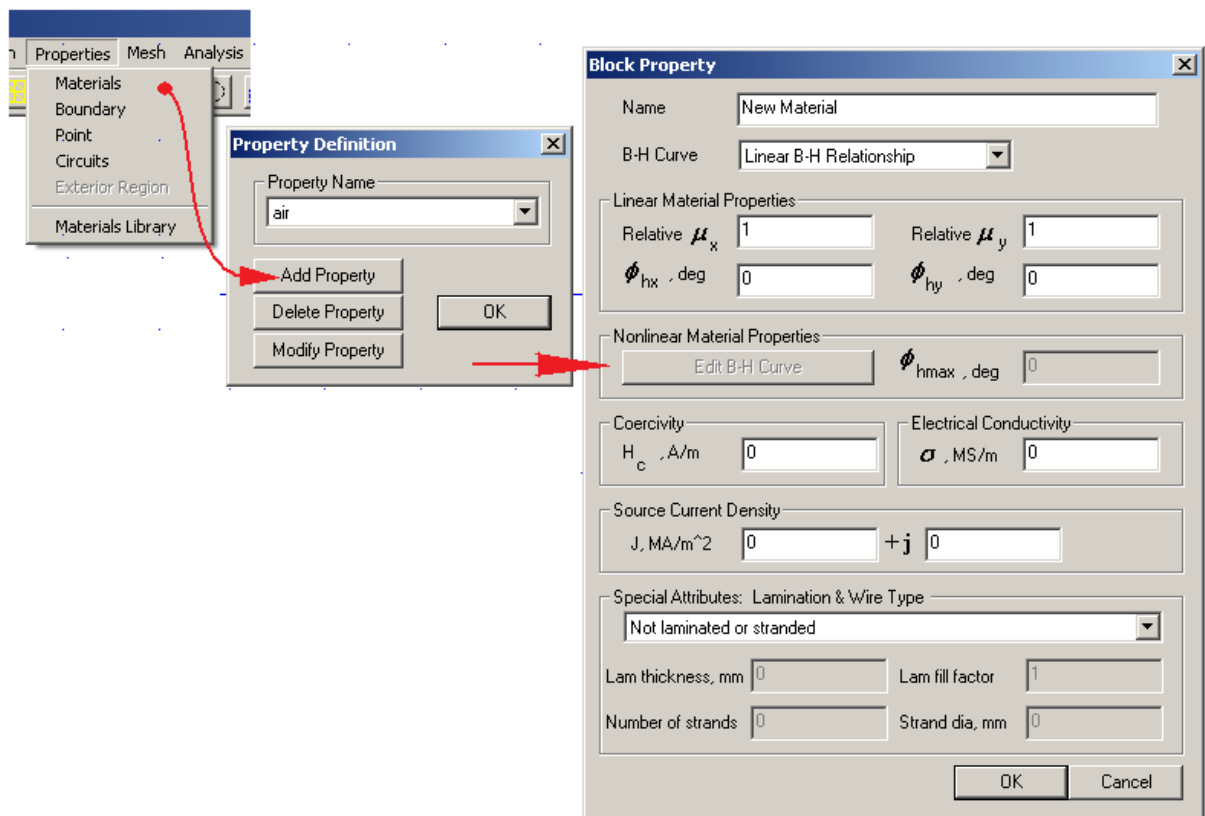


Рис. 8. Задание свойств блока. В данном случае должно быть добавлено новое имя блока и определены его свойства. По умолчанию относительная магнитная проницаемость равна единице

Задание граничных условий производится таким же образом: *Properties* → *Boundary* (Граница) → *Add property* → Выбор типа граничных условий (*BC Type*).

Для решения магнитостатических задач обычно используются следующие типы границ: *Prescribed A* (Заданное (в виде степенного полинома с коэффициентами A_0, A_1, A_2 ,) распределение векторного магнитного потенциала A , эквивалентно условию Дирихле), *Small skin depth* (Малая глубина проникновения, для магнитостатических задач эквивалентно однородному условию Неймана), *Periodic* (Периодические), *Anti-periodic* (Анти-периодические). Два последние типа граничных условий используются, когда очевиден периодический характер поля, они позволяют, иногда очень существенно, уменьшить область задачи.

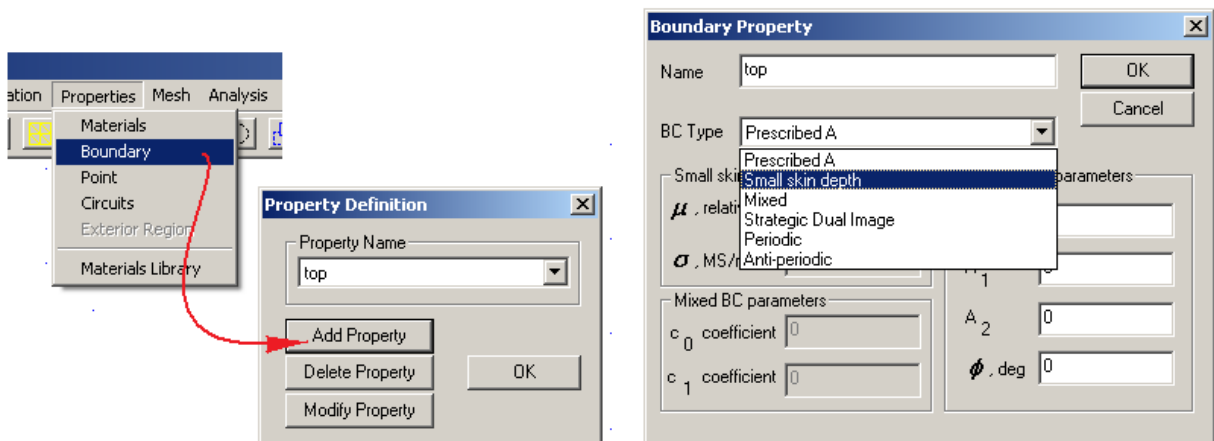


Рис. 9. Задание типа границы. Имя верхней границы – “*top*”. Тип границы “*Small skin depth*” (Малая глубина проникновения) для магнитостатических задач эквивалентен однородному условию Неймана

Плотность сетки конечных элементов определяется при назначении выделенному блоку предварительно описанных свойств и имени. Последовательность действий: нажать «зеленую» кнопку (левой клавишей мыши) → выделить блок (правой клавишей мыши) → нажать клавишу пробела (*Space*) → выбрать имя блока → погасить флажок в опции *Let Triangle choose Mesh Size* → задать максимальный размер конечного элемента в окошке *Mesh size*

(Размер сетки). Если флажок не будет погашен, встроенная программа триангуляции *Triangle* автоматически построит сетку треугольных элементов, однако эта сетка не всегда оказывается удовлетворительной.

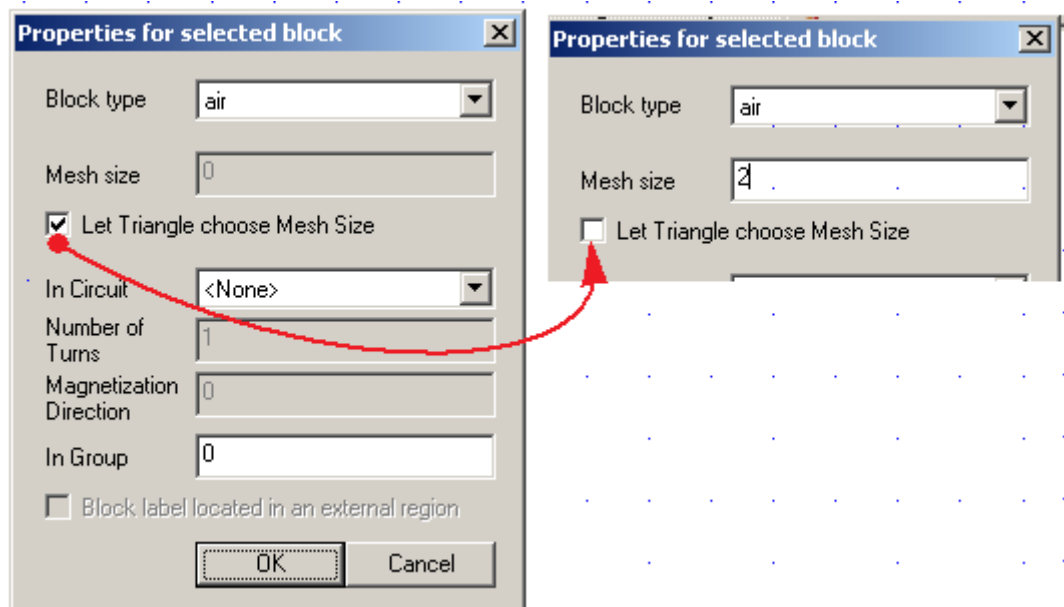


Рис. 10. Задание имени и свойств блока и максимального размера конечного элемента

1.2. Провод с током в равномерном внешнем поле

Рассмотрим еще одну задачу. Найдем силу, действующую на провод с током, находящийся во внешнем равномерном поле с заданной индукцией.

В центр прямоугольной области, в которой создано равномерное поле с индукцией 1 Тл, поместим провод с круглым поперечным сечением. Плотность тока в проводе постоянна и равна 10 А/мм^2 , диаметр провода равен 4 мм. Построим также на модели вспомогательный контур в виде окружности, представляющий собой след цилиндрической поверхности, охватывающей провод. Интегрируя на этом контуре *максвелловские натяжения*, можно определить силу, действующую на провод с током.

На рис. 11 показан фрагмент области задачи. Для обеспечения высокой точности решения окружности поперечного сечения и вспомогательного

контура сформированы из малых сегментов – по одному градусу (окно *Max. segment, Degrees*).

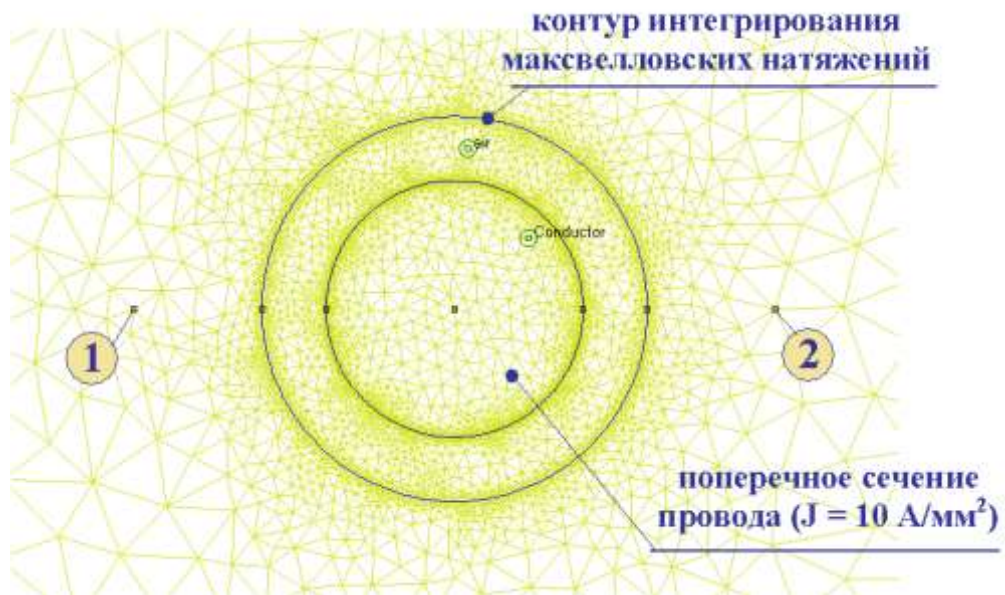


Рис. 11. Фрагмент области задачи о проводе с током во внешнем поле.

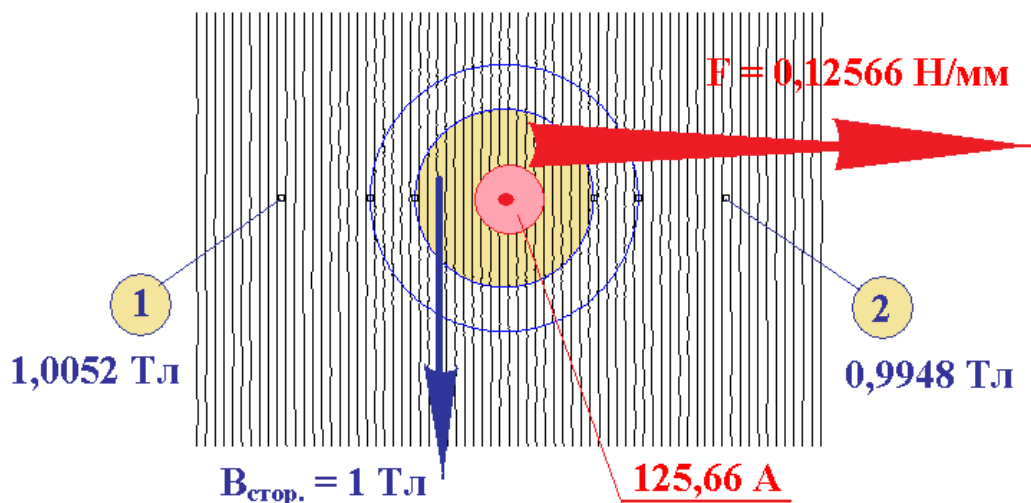


Рис. 12. Решение задачи о проводе с током во внешнем поле

На рис. 12 приведен фрагмент картины результирующего поля. На первый взгляд, поле по-прежнему является равномерным. Однако в действительности это не так. Измерение индукции в точках 1 и 2, отстоящих на

равные расстояния от провода (5 мм вправо и влево от центра сечения), дает значения индукции, отличающиеся от индукции стороннего поля 1 Тл на одну и ту же величину, представляющую собой вклад в общее поле магнитного поля провода с током.

Легко убедиться в том, что на построенной нами конечно-элементной модели с высокой точностью воспроизводятся токи, индукции и электромагнитные силы, для расчета которых в этом простом случае могут быть применены хорошо известные аналитические выражения. Заметим, что, *если относительная магнитная проницаемость материала провода равна единице*, постпроцессор программы *FEMM* дает возможность определить электромагнитную силу, действующую на провод с током, *тремя* способами. Первый состоит в том, что на *контуре*, охватывающем поперечное сечение провода, интегрируются максвелловские натяжения (клавиша *выделения контура* → выделение контура → клавиша *интегрирования* → выбор опции *Force from Stress Tensor* (определение силы по тензору натяжений)). При этом для получения правильного результата контур интегрирования надо выбирать так, чтобы он замыкался в направлении часовой стрелки. В рассматриваемом случае в правильности выбора направления контура можно убедиться, воспользовавшись известным правилом левой руки.

Два других способа определения силы связаны с выделением *блока* (действия: клавиша *выделения блока* → выделение блока → клавиша *интегрирования* → выбор опции *Lorentz force* или опции *force via Weighted Stress Tensor*). В первом случае электромагнитная сила рассчитывается как интеграл векторного произведения индукции и плотности тока (удельных сил Лоренца), во втором – как среднее значений сил, рассчитанных по максвелловским натяжениям на множестве автоматически выбранных контуров интегрирования.

В рассматриваемом примере все три значения силы с погрешностью менее двух сотых процента (расхождение – в две единицы пятого знака) совпадают со значением силы, рассчитанным по формуле Ампера.

В том случае, если магнитная проницаемость материала провода отлична от единицы, рассчитывать электромагнитную силу интегрированием удельных сил Лоренца нельзя.

Закончим рассмотрение этого примера, решив задачу при плотности тока в проводе, увеличенной в 100 раз – до 1000 А/мм^2 , что близко к максимально достижимой плотности тока в сверхпроводнике Nb_3Sn при температуре 4,2 К. В этом случае картина результирующего поля выглядит иначе, чем на рис. 12, поскольку поле провода становится сравнимым по индукции с внешним полем.

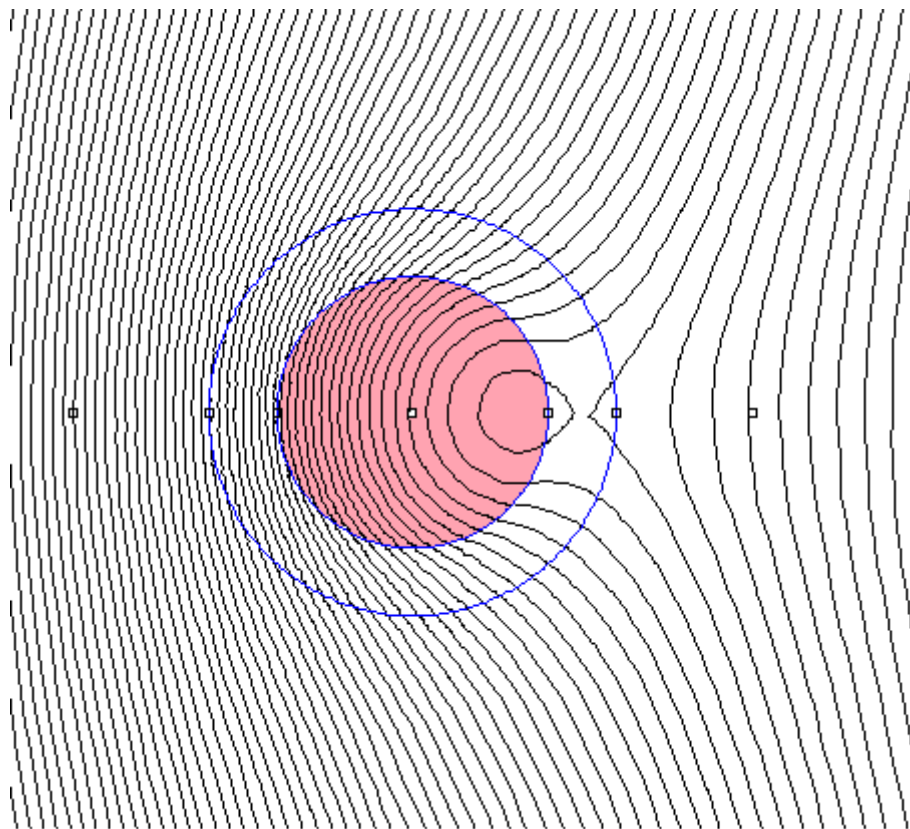


Рис. 13. Поле провода с током при плотности тока 1000 А/мм^2 при наличии внешнего поля с индукцией 1 Тл

По картине результирующего поля, фрагмент которой приведен на рис. 13, легко установить, что сила действует на проводник в направлении слева направо. Точность при определении электромагнитной силы остается по-прежнему высокой.

1.3. Ферромагнитное тело в неравномерном внешнем поле

Вначале описанным ранее способом на прямоугольной области создадим равномерное поле. Затем сформируем поперечное сечение ферромагнитного тела (например, стальной шины) с магнитной проницаемостью, отличной от единицы. Убедимся в том, что в равномерном поле на ферромагнитное тело с равномерно распределенной по его объему магнитной проницаемостью сила не действует. После этого, воспользовавшись опцией *Move* (сдвинуть) пункта меню *Edit*, сместим угловые точки на верхней границе области к центральной части, оставив граничные условия прежними. Поле в этом случае станет неравномерным. Определив теперь по максвелловским натяжениям силу, действующую на шину, обнаружим, что она направлена в сторону возрастания (*по модулю*) индукции внешнего поля. Кстати, этот результат объясняет, почему на рис. 1 плотность скопления опилок больше у поверхности магнита.

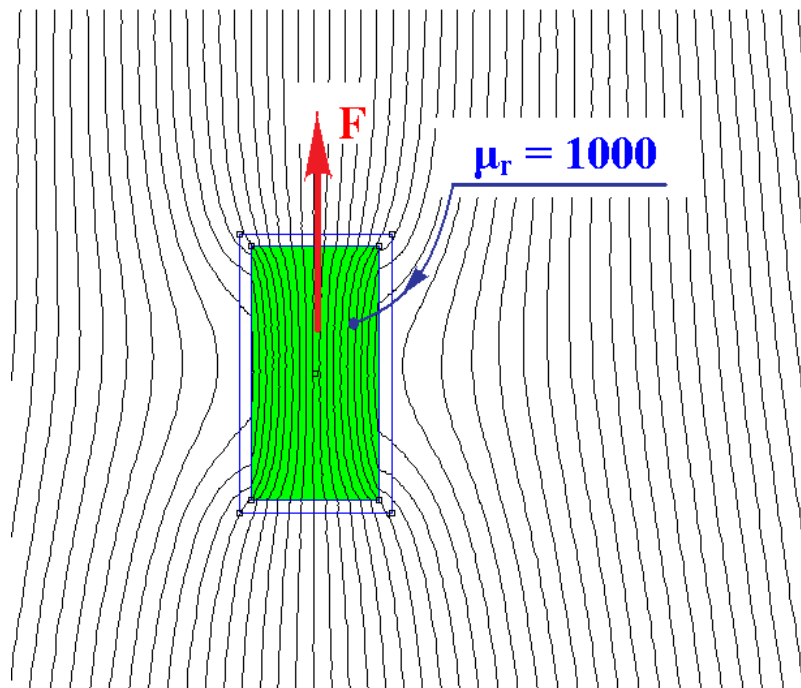


Рис. 14. Ферромагнитное тело во внешнем неравномерном поле

1.4. Индуктивность катушек

Будем пользоваться такими выражениями для собственной и взаимной индуктивностей двух многовитковых катушек:

$$L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{i_1} \quad \text{и} \quad L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}, \quad L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2}$$

где буквой Ψ обозначено потокосцепление катушки, причем первый индекс соответствует номеру катушки, для которой определено потокосцепление, а второй индекс указывает на катушку, током которой создано магнитное поле; индекс при обозначении тока i указывает на катушку, по которой ток протекает. Потокосцепление рассматривается здесь как сумма потоков, пронизывающих каждый из витков катушки. Если витки катушки выполнены из провода с относительно малым поперечным сечением и при этом достаточно плотно примыкают друг к другу, потокосцепление катушки можно рассчитывать как произведение числа витков на общий для них поток Φ .

Смоделируем поле кольцевой катушки с током. Воспользуемся для этого цилиндрической системой координат (пункт меню *Problem* → выбор опции *Axisymmetric* в пункте *Problem Type* всплывающего меню *Problem Definition*).

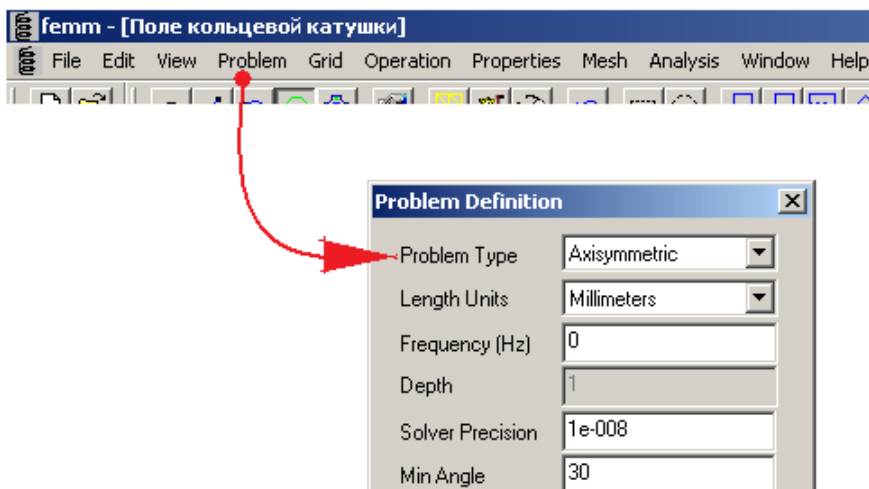


Рис. 15. Выбор цилиндрической системы координат для осесимметричной задачи

Внешнюю границу области выберем удаленной от катушки и зададим на ней условие Дирихле (размеры прямоугольной области задачи в примере, проиллюстрированном рисунком 16: 200 x 200 мм). Средний диаметр катушки возьмем равным 30 мм, диаметр поперечного сечения катушки – 10 мм, среднюю плотность тока на поперечном сечении – 10 А/мм².

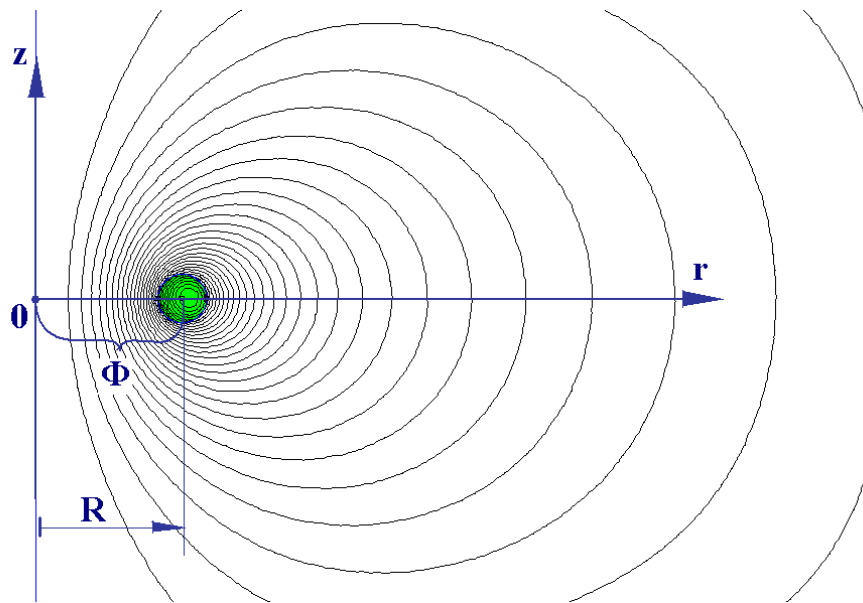


Рис. 16. Магнитное поле кольцевой катушки с током

Для простоты будем считать, что катушка состоит из одного витка. Определим вначале потокосцепление как поток, полученный интегрированием нормальной составляющей индукции на длине контура от точки **0** до центра поперечного сечения провода. Разделив полученный результат на ток катушки, получим:

$$L_{11} = \frac{\Psi_{11}}{i_1} = \frac{\Phi}{i_1} = \frac{7,0108 \cdot 10^{-7}}{785,358} = 8,927 \cdot 10^{-8} \text{ Гн}$$

Индуктивность тороидальной катушки может быть рассчитана по известной аналитической формуле:

$$L = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{r} - 2 + \frac{1}{4} \mu_i \right),$$

где μ_i - относительная магнитная проницаемость материала провода катушки.

Эта формула приводится во многих учебниках и справочных пособиях (см., например, П.Л. Калантаров и Л.А. Цейтлин, Расчет индуктивностей, Энергоатомиздат, Ленинград, 1986, [2]) и, в частности, имеется в *Help*'е программы *FEMM*. Расчет по этой формуле дает результат, меньший на 11,6%: $7,997 \cdot 10^{-8}$ Гн.

Рассчитаем индуктивность еще одним способом, указанным в *Help*'е программы *FEMM*:

$$L = \frac{\int A \cdot j \cdot dv}{i^2}$$

Здесь интегрирование средствами постпроцессора выполняется по выделенному блоку поперечного сечения катушки. Такой способ в рассматриваемом случае дает практически точный результат: $8,003 \cdot 10^{-8}$ Гн (расхождение с расчетом по аналитической формуле всего 0,1%)

Погрешность в 12%, конечно, нельзя считать удовлетворительным результатом. Объясняется такая большая погрешность, во-первых, недостаточной удаленностью внешней границы и, во-вторых, сравнительно большим отношением диаметра провода к среднему диаметру катушки. Так, при увеличении радиуса катушки в 6 раз и при соответствующем удалении внешней границы погрешность расчета собственной индуктивности по первому способу снижается до 6%.

Заметим также, что определение индуктивности по первому способу становится практически точным, если рассматриваются катушки, размещенные на стальных сердечниках.

При расчете взаимных индуктивностей определение потокосцепления катушки, по которой не протекает ток, может быть найдено по разности средневзвешенных значений векторного магнитного потенциала начальной

и конечной катушечной сторон. Эти значения потенциалов находятся интегрированием по выделенным участкам поперечных сечений, используя одну из опций постпроцессора программы *FEMM*.

2. Гармонический анализ поля в воздушном зазоре

2.1. Встроенная функция пакета *MathCAD FFT(Fast Fourier Transform)* – быстрое преобразование Фурье)

Определение гармонического состава поля в воздушном зазоре электрической машины, – выделение основной гармоники индукции и гармоник высших и низших порядков, – является одной из главных задач электромагнитного расчета. Результаты гармонического анализа используются при расчете рабочих характеристик, потерь, электромагнитных сил и вращающих моментов.

Выполнить гармонический анализ при расчете поля в поперечном сечении электрической машины можно следующим образом. При формировании конечно-элементной модели на участке, соответствующем воздушному зазору между сердечниками машины, создается контур протяженностью в один или несколько периодов поля. После того, как расчет поля закончен, средствами постпроцессора программы формируется текстовый файл, в который заносятся значения «измеряемой» величины и координаты точек контура, в которых эти измерения производятся. Обычно интерес представляет распределение нормальной составляющей индукции в воздушном зазоре. Заметим, что число точек измерения следует выбирать равным 2^N , где N – целое число. Полученный текстовый файл затем считывается программой, осуществляющей гармонический анализ. Удобно для этих целей воспользоваться пакетом *MathCAD*, в котором имеется встроенная функция *fft (Fast Fourier transform)* – быстрое преобразование Фурье).

Поясним сказанное на примере. Допустим, требуется выполнить гармонический анализ поля в зазоре трехфазного асинхронного двигателя. Для простоты рассмотрим режим холостого хода, причем ротор будем считать гладким. На рисунке показана картина поля, соответствующая моменту времени, в который ток в фазе $A-X$ имеет максимальное значение. Если токи фаз образуют симметричную трехфазную систему, значения токов в фазах $B-Y$ и $C-Z$ в этот момент времени равны половине максимального значения и направлены противоположно току в фазе $A-X$. Это означает, что если в начальных сторонах A этой фазы будет задана положительная плотность тока, то в сторонах B и C должны быть заданы отрицательные ее значения.

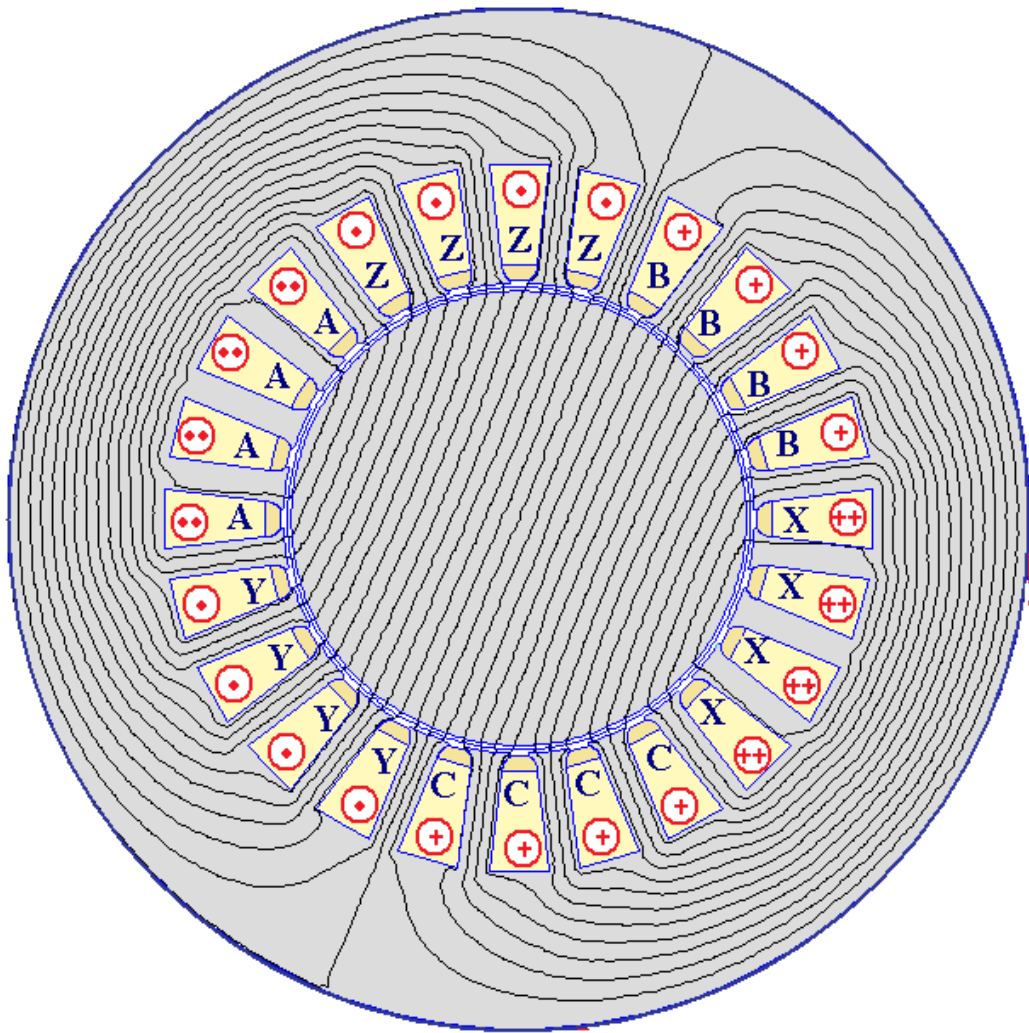


Рис. 17. Магнитное поле обмотки якоря трехфазного асинхронного двигателя небольшой мощности при холостом ходе

В приведенном примере плотность тока на участках, соответствующих начальным сторонам фазы $A-X$, задана равной 4 А/мм^2 , что при коэффициенте заполнения паза медью, равном примерно $0,4$, соответствует плотности тока в проводах обмотки ок 7 А/мм^2 (при диаметре расточки 60 мм зазор намеренно выбран большим, чем обычно в таких машинах – 1 мм). Наибольшие индукции в зубцах и в ярме при этом оказываются равными $1,75$ и $1,46 \text{ Тл}$ (в качестве материала сердечников выбрана сталь 2411).

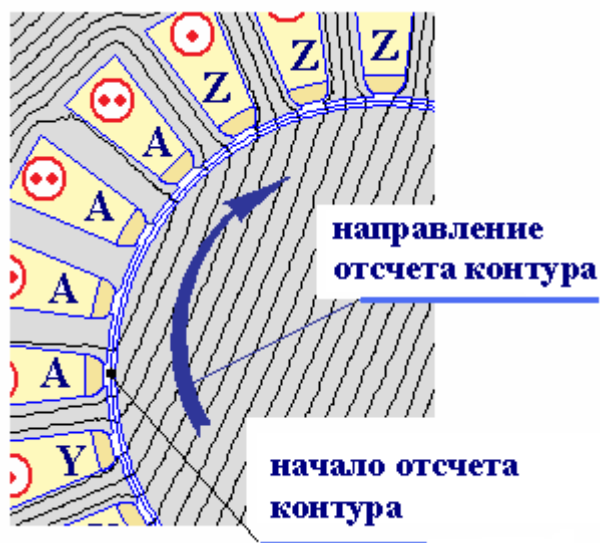


Рис. 18. Выбор контура, на котором снимается распределение индукции в воздушном зазоре электрической машины

На рис. 18 показано, как можно выбрать контур в воздушном зазоре. Обычно его проводят по средней линии зазора. При формировании конечно-элементной структуры нужно следить за тем, чтобы дискретизация этого участка модели была достаточно подробной. Удовлетворительная точность гармонического анализа и измерений электромагнитного момента достигается, при числе слоев конечных элементов в зазоре не менее четырех.

При создании текстового файла со значениями индукции в заданном числе точек контура надо, находясь в режиме постпроцессора, выполнить следующие действия:

– выделить контур, нажав кнопку с отрезком прямой (поз. 1 на рис. 19) на верхней панели окна, и щелкая левой клавишей мыши последовательно у каждой точки контура (поз. 2) в направлении его обхода. Удобно, если на контуре будет минимально возможное число точек, о чем следует позаботиться при формировании модели. Выбор положительного направления контура (направления отсчета) также существенен;

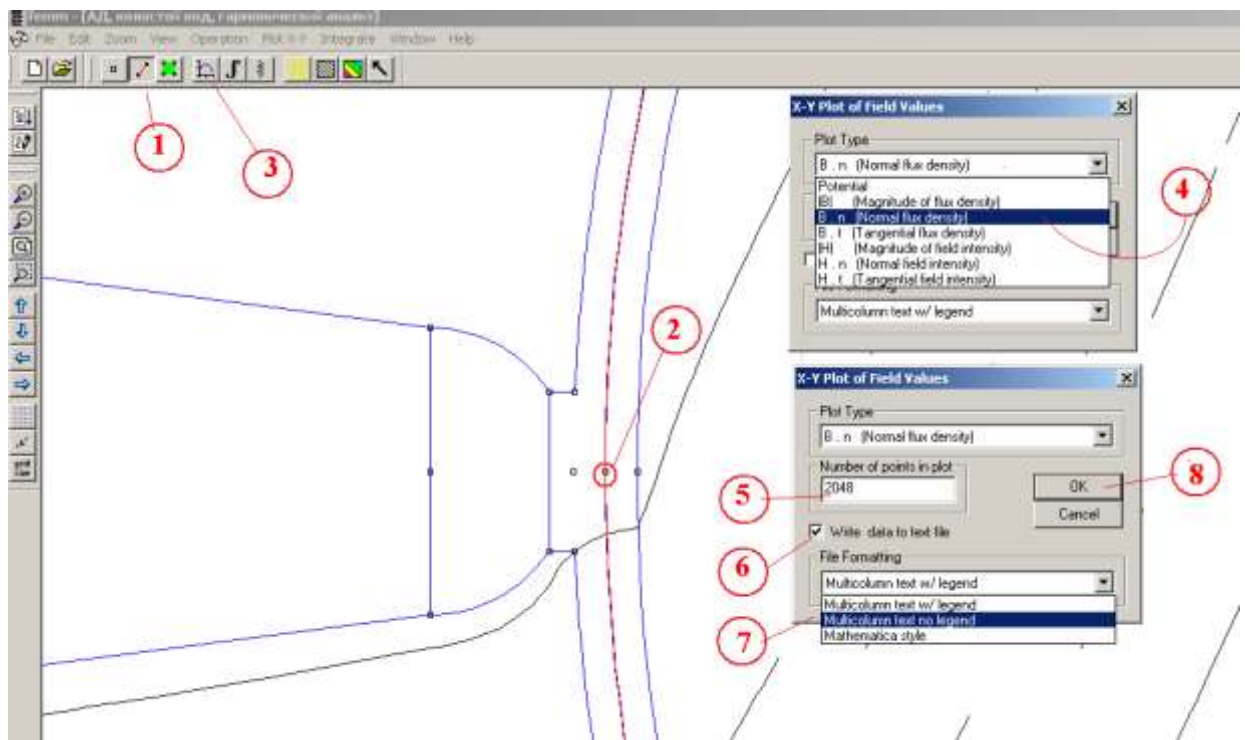


Рис. 19. Последовательность операций при формировании текстового файла с результатами измерений на контуре воздушного зазора

– нажать на верхней панели кнопку построения графиков (поз. 3), во всплывающем меню *X-Y Plot of Field Values* (графики величин поля в декартовых координатах) выбрать обозначение нормальной составляющей индукции B_n (поз. 4), в окне *Number of points in plot* (число точек на графике) задать число точек (в примере – $2^{11} = 2048$, поз. 5), подтвердить, что данные будут записаны в файл (флажок в окне *Write data to text file*) (поз. 6), в окне *File Formatting* (форма записи файла) выбрать форму записи без наименования столбцов (*Multicolumn text no legend*) (поз. 7), нажать кнопку *OK* (поз. 8)

и во всплывающем окне (рис. 20) задать имя текстового файла (латиницей) (поз. 9) и нажать кнопку «Сохранить» (поз. 10). На поле окна появится сообщение о сохранении текстового файла (поз. 11). Удобно сохранять файл в той же папке, в которой содержится файл задачи.

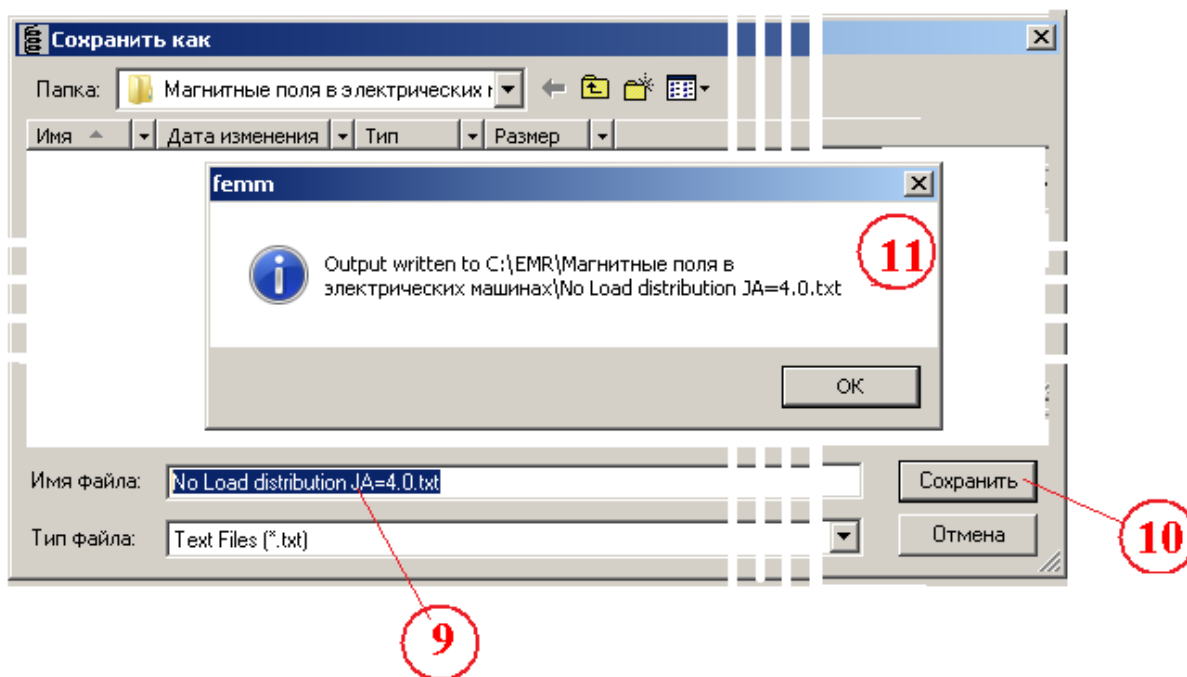


Рис. 20. Сохранение текстового файла с результатами измерений

Сохраненный файл результатов работы программы *FEMM* в дальнейшем используется для гармонического анализа. В среде *MathCAD* он может быть выполнен, как уже упоминалось, с помощью встроенной функции *fft*. Ниже приводится пример обработки текстового файла *No Load distribution JA=4.0.txt* (*распределение при холостом ходе* при плотности тока $4,0 \text{ А/мм}^2$; при назначении имени файла, особенно при проведении серии расчетов, следует делать его по возможности наиболее информативным, указывая в нем некоторые исходные данные задачи).

ORIGIN := 1
 ~~~~~

**Число элементов в считываемом файле:**

$m_k := 11$        $k_{max} := 2^{m_k}$        $k_{max} = 2.048 \times 10^3$        $k := 1..k_{max}$

$B_{\delta_{dat}} := \text{READPRN}(\text{"No Load distribution JA=4.0.txt"})$       **<----- Считывание данных**

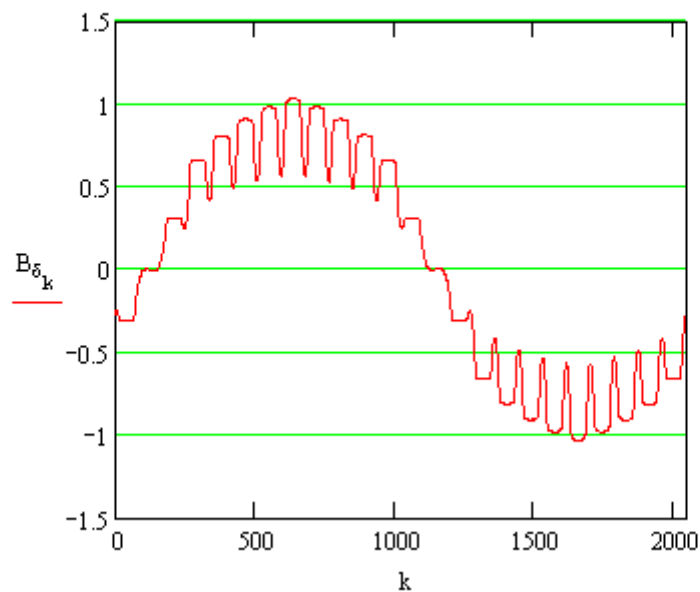
$$B_{\delta_{dat}}^T =$$

|   | 1      | 2      | 3     | 4      | 5      | 6      |
|---|--------|--------|-------|--------|--------|--------|
| 1 | 0      | 0.091  | 0.181 | 0.272  | 0.362  | 0.453  |
| 2 | -0.273 | -0.266 | -0.26 | -0.254 | -0.251 | -0.248 |

$$B_{\delta_k} := (B_{\delta_{dat}}^T)_{2,k}$$

$$B_{\delta}^T =$$

|   | 1      | 2      | 3     | 4      | 5      | 6      |
|---|--------|--------|-------|--------|--------|--------|
| 1 | -0.273 | -0.266 | -0.26 | -0.254 | -0.251 | -0.248 |



**Рис. 21. Гармонический анализ. (фрагмент MathCAD'овского файла)**

Считываются оба столбца файла данных – и координаты точек, и значения индукции в этих точках. Функция *fft* применяется только к столбцу значений индукции. Координаты точек отсчитываются от начала контура (см. рис. 18).

### Гармонический анализ:

$$B_{\delta\_harm} := \text{fft}(B_{\delta})$$

← применение функции FFT

$$B_{\delta\_harm}^T =$$

|   | 1                       | 2              | 3            |
|---|-------------------------|----------------|--------------|
| 1 | -4.669·10 <sup>-3</sup> | -8.206+19.888i | 0.011-0.015i |

Число элементов в файле, полученном после преобразования Фурье:

$$kk\_max := 1 + 2^{m\_k-1}$$

$$kk\_max = 1.025 \times 10^3$$

$$kk := 1..kk\_max$$

Обработка результатов применения функции fft для выделения амплитуд и фазовых углов гармоник:

$$B_{\delta\_harm\_Re\_kk} := \text{Re}(B_{\delta\_harm\_kk})$$

$$B_{\delta\_harm\_Im\_kk} := \text{Im}(B_{\delta\_harm\_kk})$$

$$B_{\delta\_harm\_mod\_kk} := \sqrt{(B_{\delta\_harm\_Re\_kk})^2 + (B_{\delta\_harm\_Im\_kk})^2}$$

$$B_{\delta\_harm\_mod\_red\_kk} := \frac{B_{\delta\_harm\_mod\_kk}}{\sqrt{2^{m\_k-2}}}$$

$$B_{\delta\_harm\_mod\_red}^T =$$

|   | 1      | 2      | 3      | 4     | 5      | 6      |
|---|--------|--------|--------|-------|--------|--------|
| 1 | 0.0002 | 0.9508 | 0.0008 | 0.072 | 0.0006 | 0.0105 |

Рис. 22. Гармонический анализ (фрагмент MathCAD'овского файла, продолжение)

Первым элементом вектора  $B_{\delta\_harm\_mod\_red}$  является значение постоянной составляющей. В рассматриваемом случае, поскольку в силу симметрии постоянная составляющая должна быть равна нулю, величина 0,0002 представляет собой погрешность моделирования. По той же причине малы четные гармоники индукции (им соответствуют нечетные номера элементов).

Число периодов основной гармоники на рассматриваемом интервале

$p\_fund := 1$

**|<--- Присвоить!**

Индекс, соответствующий рассматриваемой гармонике:

$harm := 1 \quad i_{harm} := harm \cdot p\_fund + 1 \quad i_{harm} = 2$

**|<--- Присвоить!**

Амплитуда и фазовый угол рассматриваемой гармоники:

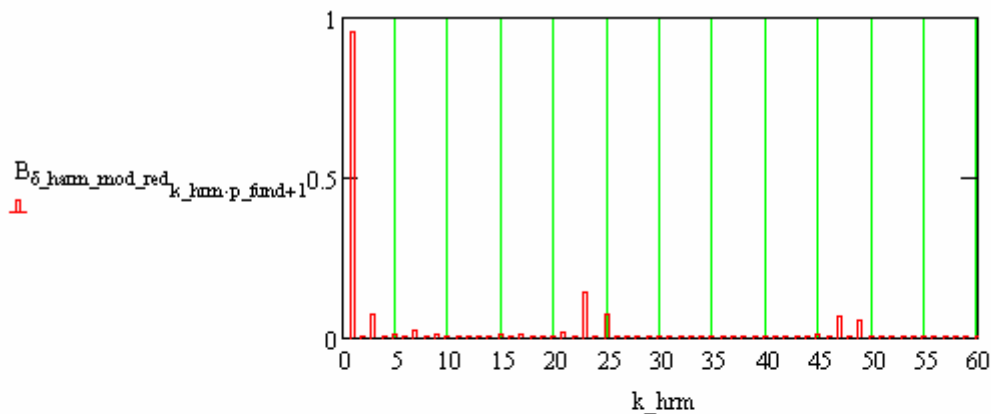
$$B_{\delta\_harm\_mod\_red\_i_{harm}} = 0.951 \quad \phi_{\_harm\_i_{harm}} := \left( \operatorname{atan} \left( \frac{B_{\delta\_harm\_Re\_i_{harm}}}{B_{\delta\_harm\_Im\_i_{harm}}} \right) \right) \cdot \left( \frac{180}{\pi} \right)$$

$$\phi_{\_harm\_i_{harm}} := \phi_{\_harm\_i_{harm}} + \operatorname{if} \left( B_{\delta\_harm\_Im\_i_{harm}} < 0, 180, 0 \right)$$

$k\_harm\_max := 60$

**|<--- Число рассматриваемых гармоник!**

$k\_harm := 1..k\_harm\_max$



Фазовые углы гармоник в рассматриваемом диапазоне:

$$B_{\delta\_harm\_Im\_kk} := \operatorname{if} \left( \left| B_{\delta\_harm\_Im\_kk} \right| < 0.00001, 0.00001, B_{\delta\_harm\_Im\_kk} \right)$$

$$\phi_{\_harm\_kk} := \left( \operatorname{atan} \left( \frac{B_{\delta\_harm\_Re\_kk}}{B_{\delta\_harm\_Im\_kk}} \right) \right) \cdot \left( \frac{180}{\pi} \right) \quad \phi_{\_harm\_i_{harm}} = -22.422$$

$$\phi_{\_harm\_kk} := \phi_{\_harm\_kk} + \operatorname{if} \left( B_{\delta\_harm\_Im\_kk} < 0, 180, 0 \right) \quad \phi_{\_harm\_i_{harm}} = -22.422$$

Рис. 23. Гармонический анализ (фрагмент *MathCAD*'овского файла, продолжение)

Полезно распечатать значения амплитуд отдельных гармоник:

**Амплитуда и фазовый угол отдельной гармоники:**

$$i_h := 1 \quad B_{\delta\_harm\_mod\_red\_i\_h\_p\_fund+1} = 0.95084 \quad \text{Тесла}$$

$$\phi\_harm\_i\_h\_p\_fund+1 = -22.422 \quad \text{эл. градусов}$$

**Амплитуды наиболее важных гармоник:**

|                         |                                                                  |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------|
| постоянная составляющая | $(0.5 \cdot B_{\delta\_harm\_mod\_red})_{0\_p\_fund+1} = 0.0001$ |
| первая гармоника        | $B_{\delta\_harm\_mod\_red\_1\_p\_fund+1} = 0.95084$             |
| третья гармоника        | $B_{\delta\_harm\_mod\_red\_3\_p\_fund+1} = 0.07201$             |
| пятая гармоника         | $B_{\delta\_harm\_mod\_red\_5\_p\_fund+1} = 0.01049$             |
| седьмая гармоника       | $B_{\delta\_harm\_mod\_red\_7\_p\_fund+1} = 0.02029$             |
| одиннадцатая гармоника  | $B_{\delta\_harm\_mod\_red\_11\_p\_fund+1} = 0.00608$            |
| тринадцатая гармоника   | $B_{\delta\_harm\_mod\_red\_13\_p\_fund+1} = 0.00575$            |
| семнадцатая гармоника   | $B_{\delta\_harm\_mod\_red\_17\_p\_fund+1} = 0.00931$            |
| девятнадцатая гармоника | $B_{\delta\_harm\_mod\_red\_19\_p\_fund+1} = 0.00405$            |
| 23-я гармоника          | $B_{\delta\_harm\_mod\_red\_23\_p\_fund+1} = 0.13941$            |
| 25-я гармоника          | $B_{\delta\_harm\_mod\_red\_25\_p\_fund+1} = 0.07132$            |
| 47-я гармоника          | $B_{\delta\_harm\_mod\_red\_47\_p\_fund+1} = 0.06536$            |
| 49-я гармоника          | $B_{\delta\_harm\_mod\_red\_49\_p\_fund+1} = 0.05418$            |

**Рис. 24. Гармонический анализ. Вывод значений амплитуд гармоник (фрагмент MathCAD'овского файла, продолжение)**

В последних четырех строках приведены значения так называемых зубцовых гармоник, порядок которых зависит от числа пазов на полюс и фазу  $q$ , в данном случае достаточно большого, равного четырем. 23-я и 25-я – зубцовые гармоники первого порядка, 47-я и 49-я – второго.

Таким же образом могут быть выведены фазовые углы гармоник:

### Фазовые углы гармоник (в ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ градусах)

первая гармоника  $\phi_{\text{harm1.p\_fund+1}} = -22.422$   
 третья гармоника  $\phi_{\text{harm3.p\_fund+1}} = -67.568$

Рис. 25. Гармонический анализ. Вывод значений фазовых углов гармоник (фрагмент *MathCAD*'овского файла, продолжение)

Полезно также составить программу, позволяющую по результатам гармонического анализа восстановить исходное распределение индукции.

#### Номера восстанавливаемых гармоник:

$k_{\text{harm}_1} := 1$   $k_{\text{harm}_2} := 3$   $k_{\text{harm}_3} := 5$   $k_{\text{harm}_4} := 7$   $k_{\text{harm}_5} := 9$   
 $k_{\text{harm}_6} := 11$   $k_{\text{harm}_7} := 13$   $k_{\text{harm}_8} := 15$   $k_{\text{harm}_9} := 17$   $k_{\text{harm}_{10}} := 19$   
 $k_{\text{harm}_{11}} := 21$   $k_{\text{harm}_{12}} := 23$   $k_{\text{harm}_{13}} := 25$   $k_{\text{harm}_{14}} := 47$   $k_{\text{harm}_{15}} := 49$

#### Флажки восстанавливаемых гармоник (1 - учитывать, 0 - не учитывать)

$fl_{\text{harm}_1} := 1$   $fl_{\text{harm}_2} := 0$   $fl_{\text{harm}_3} := 0$   $fl_{\text{harm}_4} := 0$   $fl_{\text{harm}_5} := 0$   
 $fl_{\text{harm}_6} := 0$   $fl_{\text{harm}_7} := 0$   $fl_{\text{harm}_8} := 0$   $fl_{\text{harm}_9} := 0$   $fl_{\text{harm}_{10}} := 0$   
 $fl_{\text{harm}_{11}} := 0$   $fl_{\text{harm}_{12}} := 0$   $fl_{\text{harm}_{13}} := 0$   $fl_{\text{harm}_{14}} := 0$   $fl_{\text{harm}_{15}} := 0$

☞ Справочная информация: C:\EMR\Магнитные поля в электрических машинах

\Восстановление исходного распределения.mcd(R)

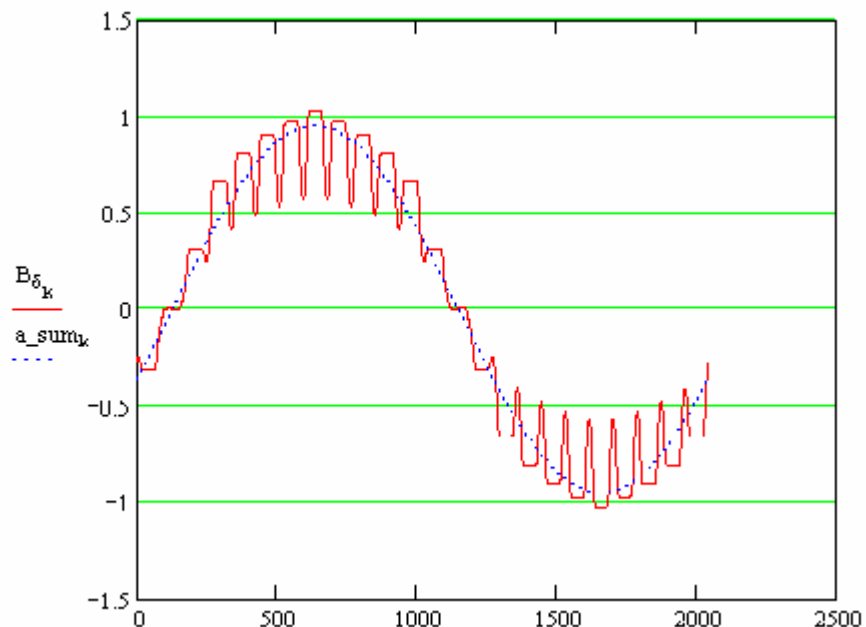


Рис. 26. Восстановление гармоник после гармонического анализа (фрагмент *MathCAD*'овского файла, продолжение)

### 3. Магнитные поля в синхронных машинах

Рассмотрим вначале поля во вращающихся электрических машинах.

#### 3.1. Поле возбуждения

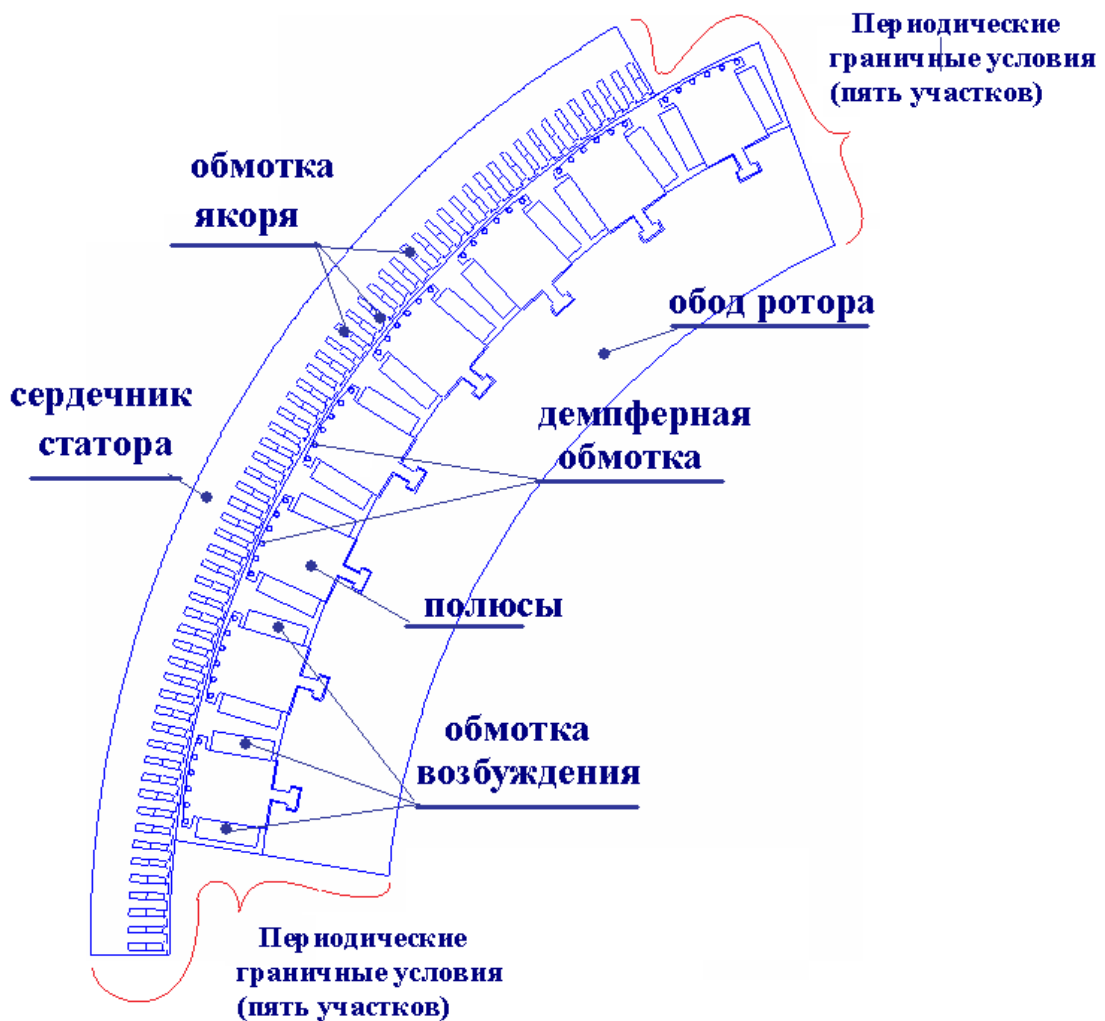
##### 3.1.1. Явнополюсные синхронные машины.

В синхронных машинах классической конструкции поле создается *обмотками возбуждения*, расположенными на роторе. При этом они могут быть как сосредоточенными и крепиться на т. наз. явновыраженных полюсах (*явнополюсная* конструкция, характерная для большинства гидрогенераторов), так и распределенными, уложенными в пазы *неявнополюсного* ротора (такая конструкция характерна для турбогенераторов и быстроходных синхронных двигателей)

Выполним моделирование поля возбуждения 48-полюсного гидрогенератора мощностью 26,2 МВА, подробный пример расчета которого приведен в книге А.И. Абрамова и А.В. Иванова-Смоленского «Проектирование гидрогенераторов и синхронных компенсаторов» [3]. Обмотка якоря этого генератора уложена в 378 пазов, что при 24 парах полюсов соответствует числу пазов на полюс и фазу  $q_1$ , равному  $21/8$ , т.е. не является целым числом. При этих условиях поперечное сечение машины содержит 6 одинаковых зон и, воспользовавшись тем, что при формировании конечно-элементной модели в программе *FEMM* предусмотрена возможность задания *периодических* граничных условий (*Periodic Boundary Conditions*), можно ограничиться моделированием только одной такой зоны. Это существенно сокращает процессорное время при расчете поля

При моделировании поля обмотки возбуждения плотность тока надо задать только на участках модели, соответствующих поперечным сечениям катушек этой обмотки. По обмотке якоря ток не протекает (режим холостого хода генератора). Будем считать также, что токи не протекают и по стержням демпферной обмотки (ее еще называют иногда успокоительной). Эти токи индукционного происхождения при холостом ходе обусловлены пульсациями магнитного потока из-за зубчатости статора, рассчитывать их

довольно сложно, а моделирование требует обращения к программам, работающим с полями, изменяющимися во времени. На рис. 27 показана модель упомянутого выше гидрогенератора.

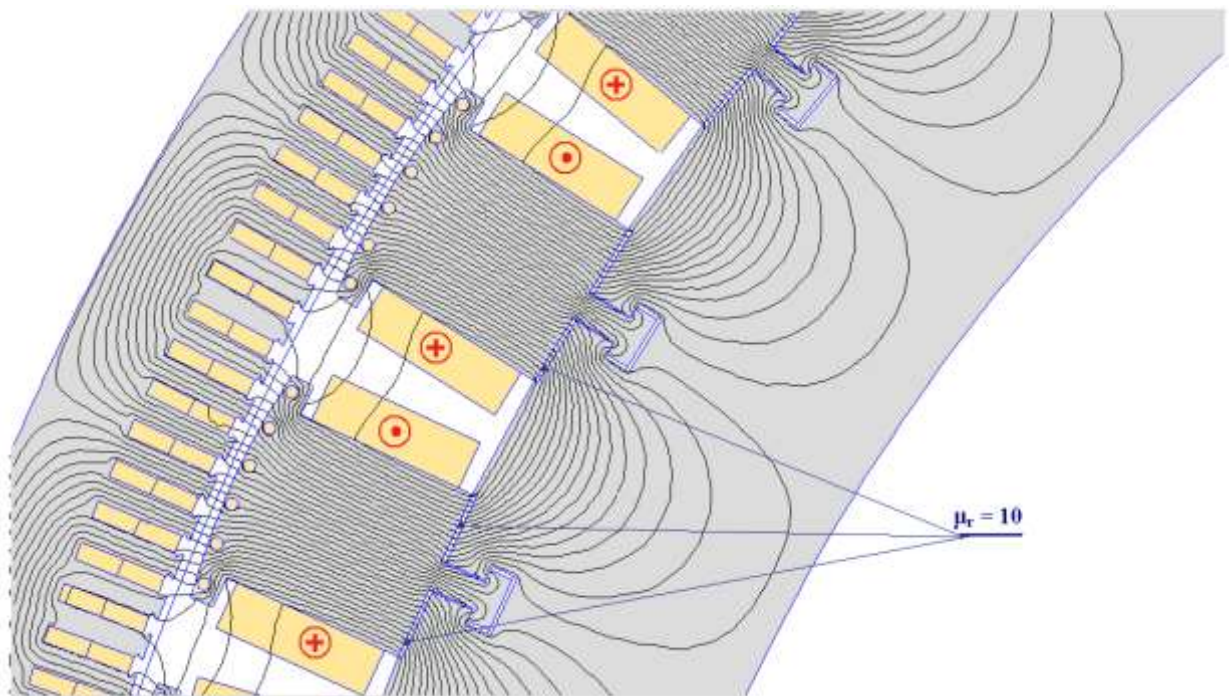


**Рис. 27. Модель трехфазного 48-полюсного синхронного гидрогенератора мощностью 26,2 МВА**

На рис. 28 показано поле генератора при холостом ходе.

При формировании модели гидрогенератора применен один прием, о котором стоит упомянуть. Стыки между телами полюсов и ободом ротора, несмотря на то, что они малы, все же влияют на величину тока возбуждения

при холостом ходе и обычно учитываются при проектных расчетах. Однако моделирование таких малых немагнитных зазоров требует создания на соответствующих им участках очень мелкой сетки конечных элементов, что может привести к значительному увеличению общего их числа и тем самым к увеличению времени расчета. Поэтому в модели на рис. 28 стыки смоделированы увеличенными в 10 раз, но для того чтобы магнитное сопротивление этих участков осталось неизменным, во столько же раз увеличена их относительная магнитная проницаемость.



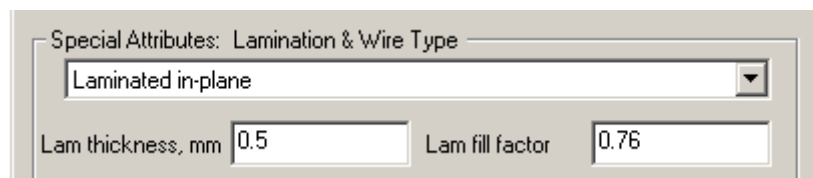
**Рис. 28. Картина поля при холостом ходе 48-полюсного синхронного гидрогенератора мощностью 26,2 МВА**

При моделировании машин с шихтованными сердечниками, и в особенности машин с радиальными вентиляционными каналами, необходимо учитывать неоднородность структуры магнитной цепи в аксиальном направлении (т.е. в направлении оси  $z$ ). Поскольку в этом случае сталь лишь частично заполняет сердечник, средняя индукция по его длине оказывается меньше, чем в листах сердечника. Это обстоятельство можно учесть при формировании модели, скорректировав кривую намагничивания стали – при



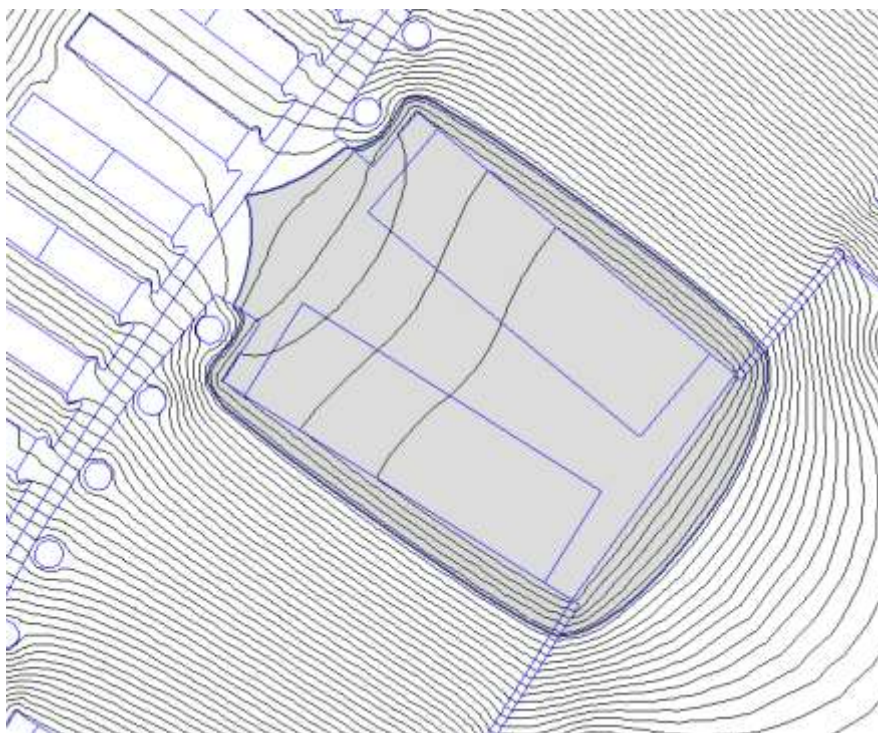
тех же значениях напряженности поля значения индукции следует умножить на коэффициент заполнения сердечника сталью (с учетом каналов). При моделировании правильно воспроизводятся значения напряженности поля, а полученные значения индукции в стали оказываются меньше действительных. Это необходимо учитывать при анализе результатов.

Коррекция кривой намагничивания может быть произведена и средствами программы *FEMM*: при задании свойств материала сердечника в окне *Lam fill factor* (коэффициент заполнения сердечника) раздела меню *Special Attributes: Lamination & Wire Type* (специальные свойства: шихтовка и тип провода) следует указать значение этого коэффициента, а в расположенном над ним окне выбрать характер шихтовки (в примере, приведенном на рис. 29, используется декартова система координат и шихтовка сердечника выполнена в плоскости модели (*Laminated in-plane*)). При моделировании магнитостатических полей указывать толщину листов сердечника (*Lam thickness*) необязательно.



**Рис. 29.** Коррекция кривой намагничивания стали с помощью задания коэффициента заполнения сердечника

При моделировании поля обмотки возбуждения достаточно просто может быть определен ее коэффициент рассеяния, расчет которого, особенно с учетом насыщения стали, требует принятия ряда допущений и в связи с этим может быть не всегда точным. На рис. 30 показано, что часть выделенного потока рассеяния проходит по стали *тела полюса* и *полюсного наконечника*, причем на участке возле нижней кромки полюсного наконечника насыщение может быть довольно сильным.



**Рис.30. Поле рассеяния обмотки возбуждения гидрогенератора**

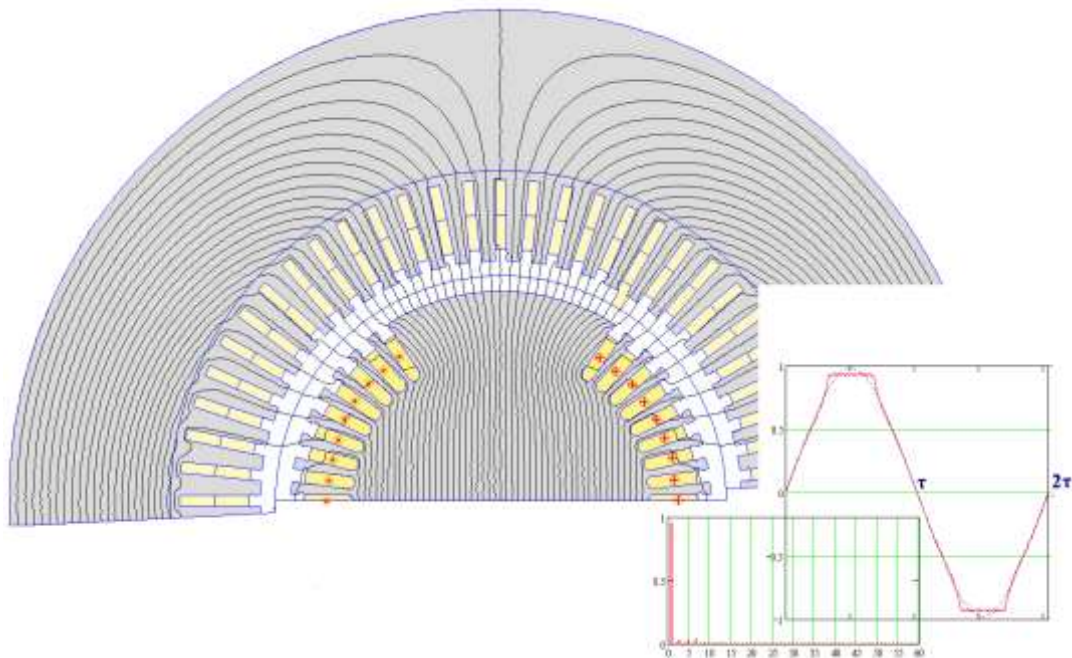
### **3.1.2. Неявнополюсные синхронные машины.**

На рисунке 31 показано поле возбуждения двухполюсного турбогенератора мощностью 200 МВт, пример расчета которого приведен в книге В.И. Извекова, Н.А. Серихина и А.И. Абрамова «Проектирование турбогенераторов» (Москва, Издательство МЭИ, 2005, [4]).

При формировании этой модели было учтено, что сердечник статора набран из листов холоднокатаной, т.е. анизотропной стали, причем в ярме направление прокатки совпадает с направлением потока, а в зубцах, напротив, поток направлен поперек направления прокатки. В связи с этим поперечное сечение сердечника статора разделено на две зоны (на рис. 31 видна разделяющая эти зоны окружность), в которых заданы две различные характеристики одной и той же стали, соответствующие лучшим (в ярме) и худшим (в зубцах) ее магнитным свойствам.

На рис. 31 приведены также результаты гармонического анализа поля в зазоре этого турбогенератора, из которых видно, что обмотка возбуждения создает поле, довольно близкое к синусоидальному, и что из-за большого зазора зубчатость статора, в отличие от гидрогенератора, значительно меньше влияет на форму кривой поля.

В модели, показанной на рис. 31, воспроизводилась только половина поперечного сечения машины с использованием *антипериодических* граничных условий (по 8 участков на левой и правой частях нижней границы). Приведенные график и спектральный состав индукции в зазоре получены на полной модели, воспроизводящей не одно, а два полюсных деления. Можно выполнить гармонический анализ и по данным, полученным на одном полюсном делении, несколько усложнив продемонстрированный выше *MathCAD*'овский текст и распространив снятое распределение индукции на весь период.



**Рис.31. Поле обмотки возбуждения турбогенератора ТВВ200-2**

### 3.1.3. Синхронные машины с возбуждением от постоянных магнитов.

Магнитоэлектрические машины в последнее время находят все более широкое применение. Объясняется это более высокой удельной мощностью, характерной для этих машин, отсутствием потерь на возбуждение, отсутствием скользящих контактов. Свойственны этим машинам и недостатки: трудности бывают связаны с регулированием магнитного потока, с влиянием температуры на магнитные свойства некоторых типов магнитов, во многих случаях проблему представляют высокие пульсации электромагнитного момента.

На рис. 32 показана картина поля, созданного системой возбуждения в активной зоне шестиполусной магнитоэлектрической машины с *поверхностными* постоянными магнитами на роторе. Магниты намагничены предварительно (до сборки) в равномерном поле, так что векторы намагниченности в пределах одного магнита параллельны друг другу.

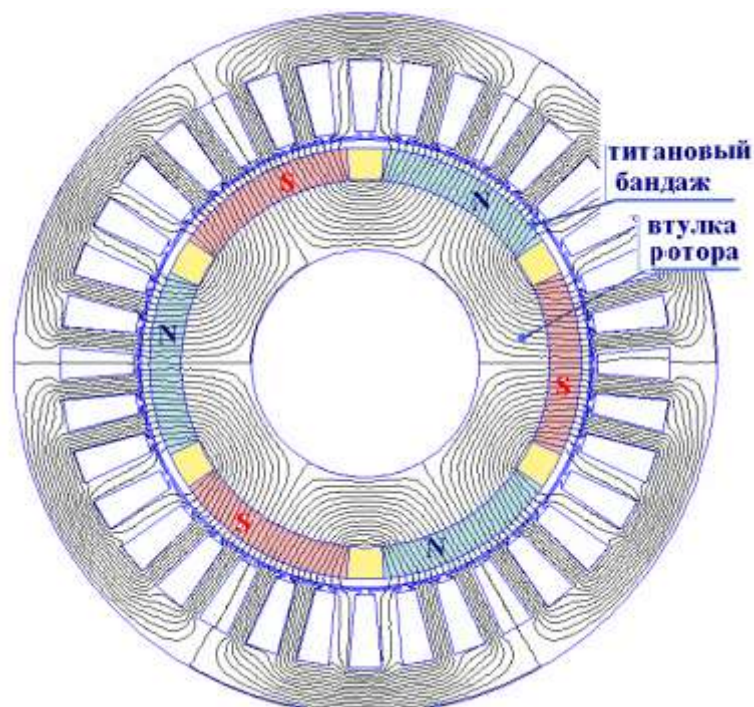
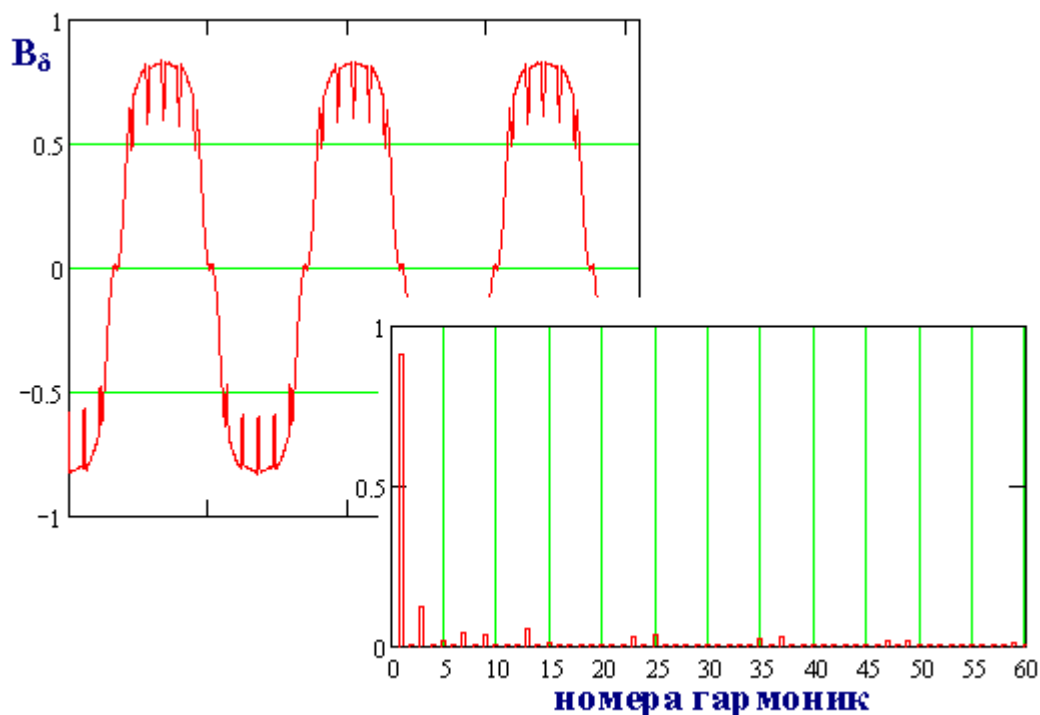


Рис.32. Поле, созданное поверхностными постоянными магнитами

На рис. 33 приведено распределение индукции на средней линии воздушного зазора и его гармонический состав.



**Рис. 33.** Распределение индукции в зазоре магнитоэлектрической машины, поперечное сечение которой показано на рис. 32, и его гармонический состав

Назовем еще два недостатка, свойственных машинам с поверхностными магнитами: во-первых, большой немагнитный зазор между стальными сердечниками и, во-вторых, необходимость бандажирования магнитов в том случае, если центробежные силы, действующие на них, становятся опасно большими. Обе эти проблемы в значительной мере могут быть решены, если применять на роторе т. наз. *встроенные* магниты (в англоязычной технической литературе обычно используется термин *IPM Machines – Interior Permanent Magnets Machines*). На рис. 34 показан один из вариантов такой конструкции – магниты вставлены в прямоугольные пазы, выполненные тем или иным образом в массивном или шихтованном сердечнике ротора.

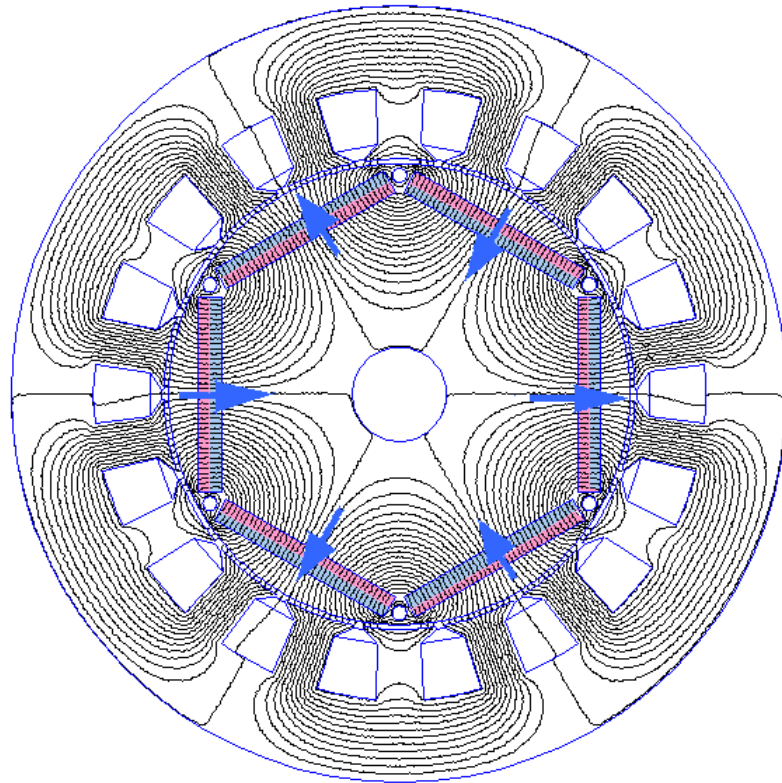


Рис. 34. Распределение поля в поперечном сечении магнитоэлектрической машины с встроенными постоянными магнитами. Подобная конструкция описана в статье *Chunting Mi, Mariano Filippa, Weiguo Liu and Ruiqing Ma “Analytical Method for Predicting the Air-Gap Flux of Interior-Type Permanent-Magnet Machines”, IEEE Trans. on Magn. Vol. 40, No. 1, Jan. 2004, [5]*

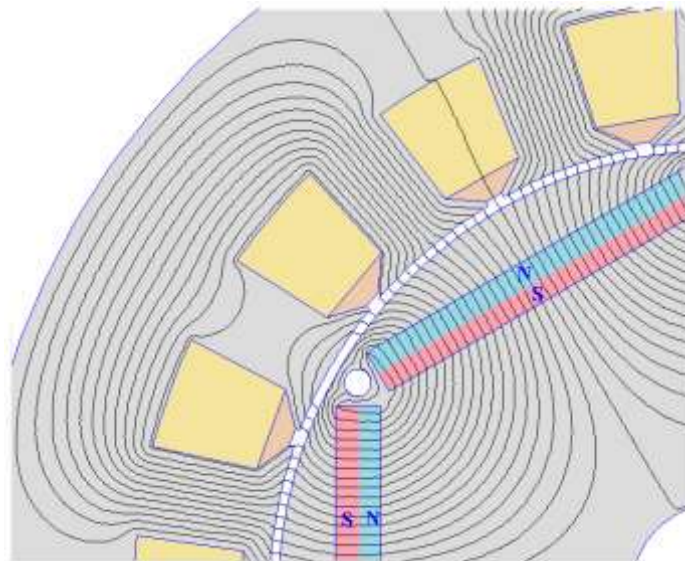


Рис. 35. Фрагмент картины поля, приведенной на рис. 34

На фрагменте картины поля, приведенном на рис. 35, видно, что на участках ротора между магнитами проходят потоки рассеяния, оказывающие размагничивающее действие. Для уменьшения этих потоков перемычки между магнитами желательно сделать по возможности более тонкими (в конструкции, показанной на рисунках 34 и 35, с этой целью выполнены круглые отверстия). Однако если сделать перемычки слишком тонкими, появляется опасность отрыва периферийных частей ротора под действием центробежных сил. Таким образом, возникает задача, требующая компромиссного решения – с одной стороны, необходимо обеспечить достаточную механическую прочность ротора при максимальных скоростях вращения, а с другой стороны, надо создать наибольшее магнитное сопротивление на пути потоков рассеяния.

При исследовании этой проблемы найдено несколько очень интересных инженерных решений. Так, например, в [6] предложена конструкция роторных полюсов, показанная на рис. 36. Половина полюсов ротора выполняются в виде отдельных блоков, имеющих форму ласточкиных хвостов.

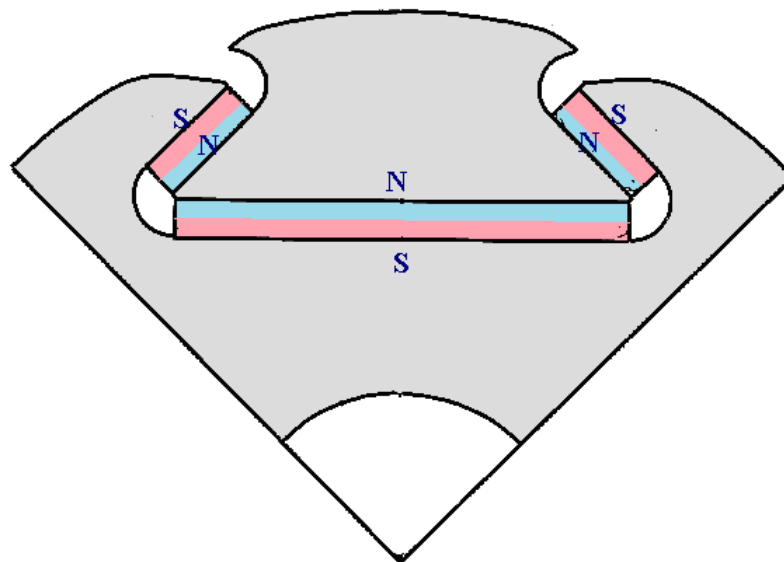


Рис. 36. Конструкция полюса ротора в форме ласточкина хвоста, предложенная в [6]

При вращении ротора возникающие центробежные силы воспринимаются достаточно прочными боковыми выступами полюсов, соседних по отношению к полюсам в форме ласточкиных хвостов. Малые магниты при этом работают на сжатие. На рис. 37 показана картина поля в полном поперечном сечении машины.

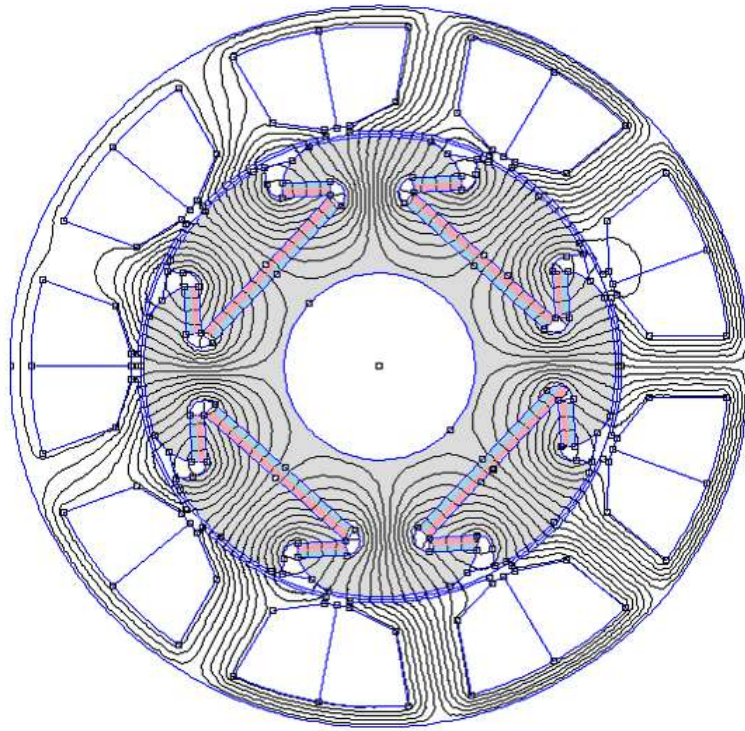


Рис. 37. Картина поля в поперечном сечении

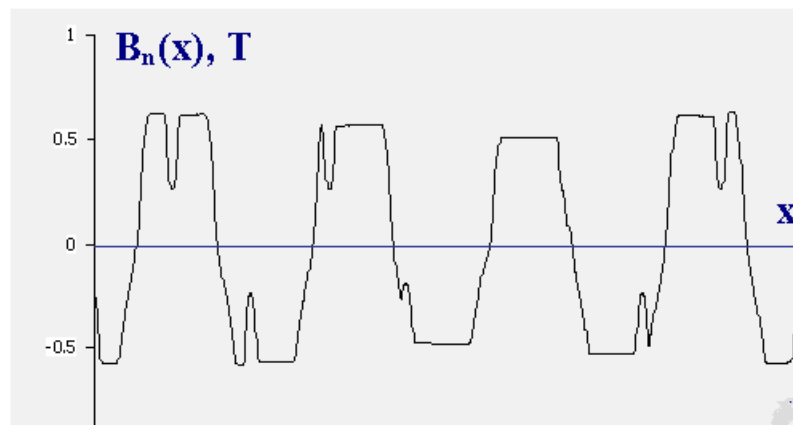
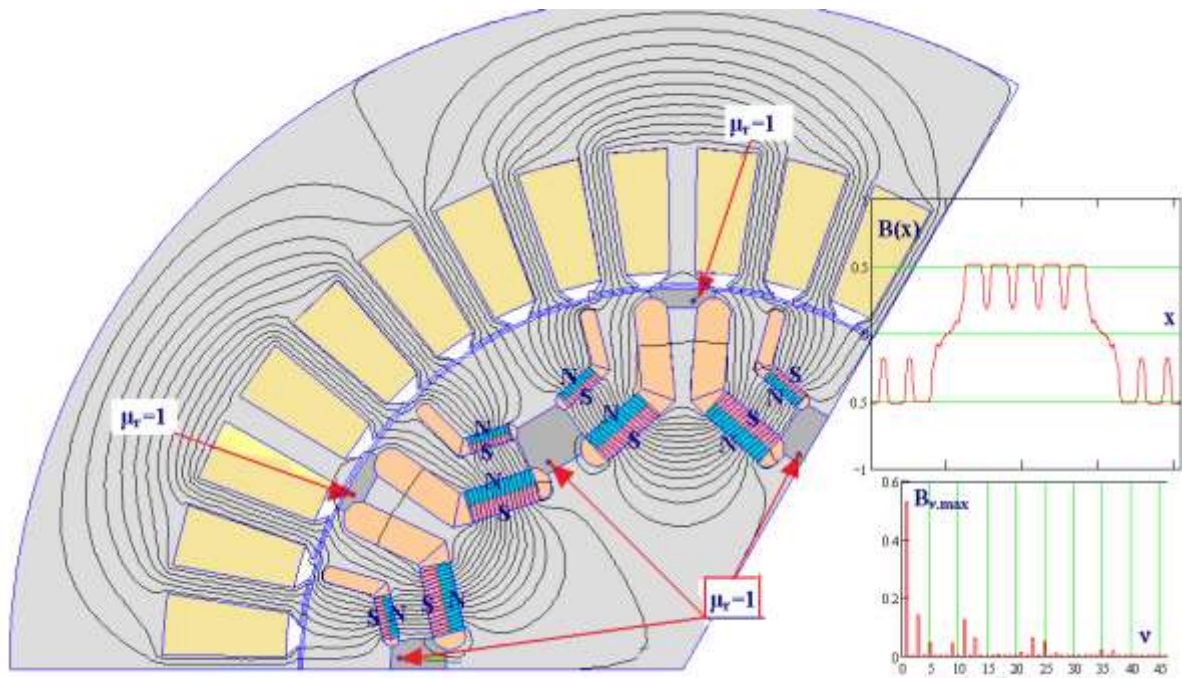


Рис. 38. Распределение индукции в воздушном зазоре машины, поперечное сечение которой показано на рис. 37



В [7] для решения проблемы механической прочности роторов с встроенными магнитами предлагается выполнять сердечник ротора из материала, который в результате локального нагрева до температуры ок.  $1100^{\circ}\text{C}$  теряет свои магнитопроводящие свойства и не восстанавливает их при последующем охлаждении. Таким образом, появляется возможность с помощью локальных нагревов создавать немагнитные барьеры на пути потоков рассеяния, причем отпадает необходимость делать эти барьеры очень тонкими.

На рис. 39 показано поле, созданное магнитами системы возбуждения в поперечном сечении магнитоэлектрической машины, изготовленной по описанной технологии.



**Рис. 39.** Картина поля в поперечном сечении и распределение индукции в воздушном зазоре машины с ротором, сердечник которого набран из листов, подвергнутых локальным нагревам. На рисунке показано, что относительная магнитная проницаемость участков локальных нагревов равна единице

### 3.2. Поле обмотки якоря

При рассмотрении способов гармонического анализа поля в зазоре в качестве примера был выбран двигатель переменного тока небольшой мощности с однослойной трехфазной обмоткой (параграф 2.1, рис. 17). Сделаем несколько замечаний о том, как следует моделировать обмотку, уложенную в пазы сердечника статора.

В машинах переменного тока средней и большой мощности обмотки статора обычно выполняются двухслойными, причем в машинах большой мощности они укладываются в пазы прямоугольной формы, имеющие постоянную ширину, а в машинах средней и малой мощности – в трапецевидальные пазы. Если обмоточные данные машины известны, т.е. заданы число фаз, полюсность, число параллельных ветвей и шаг обмотки по пазам, определенным оказывается расположение катушечных сторон на поперечном сечении активной зоны машины.

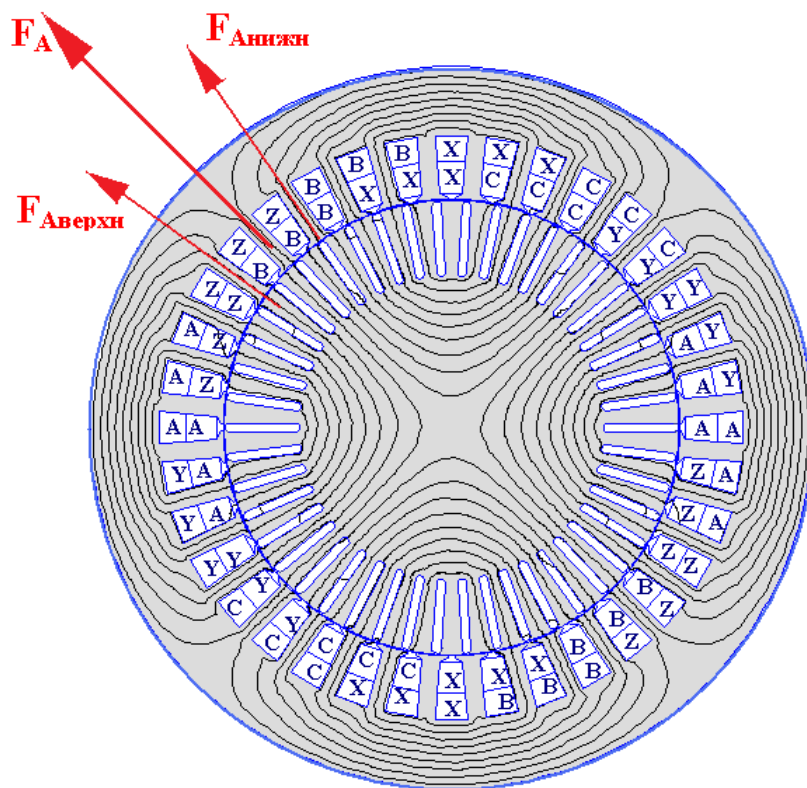
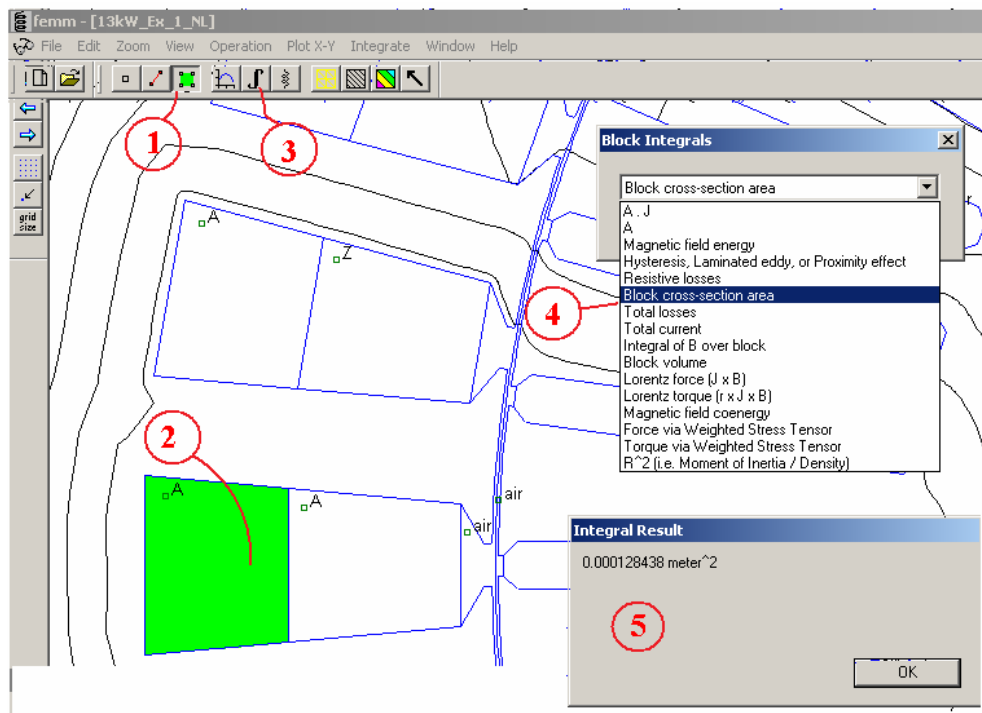


Рис. 40. Поле обмотки статора асинхронного двигателя мощностью 13 кВт при холостом ходе.  $m = 3$ ,  $2p = 4$ ,  $q = 3$ ,  $Z_1 = 36$ ,  $\beta = y/\tau = 7/9 = 0,778$

На рис. 40 показана картина поля, созданного двухслойной трехфазной обмоткой с укороченным шагом. Моделировался режим холостого хода – на участках поперечного сечения, соответствующих пазам ротора, плотность тока задавалась равной нулю. Картина поля соответствует моменту времени, в который ток в фазе *A* достигает положительного максимума, а в фазах *B* и *C* токи вдвое меньше и отрицательны. При этом условии магнитная ось всей обмотки совпадает с магнитной осью фазы *A*. Как видно на рисунке, вектор МДС фазы можно определить как сумму векторов верхнего и нижнего слоев обмотки. Картины поля для других моментов времени могут быть получены при соответствующем изменении задаваемых мгновенных значений плотности тока.

При моделировании двухслойной обмотки необходимо следить за тем, чтобы площади участков, соответствующих сторонам одной и той же катушки, расположенным в верхней и нижней частях пазов, были одинаковыми.



**Рис. 41. Определение площади участка модели, соответствующего катушечной стороне, средствами постпроцессора программы FEMM**

Проверить равенство этих площадей можно в режиме постпроцессора, выделив блок, площадь которого измеряется (позиции 1 и 2 на рис. 41), и выбрав операцию определения площади интегрированием (*Block cross-section area*, позиции 3 и 4). Результаты интегрирования можно посмотреть в окне *Integral Result* (позиция 5). Положение средней линии, разделяющей паз на верхний и нижний участки, можно определить при заданных размерах паза, решив несложное квадратное уравнение.

### **3.3. Определение пульсаций электромагнитного момента в машинах с постоянными магнитами**

Большие пульсации момента, возникающие в машинах с постоянными магнитами и обусловленные зубчатостью сердечников, являются существенным недостатком этих машин. Снижению зубцовых пульсаций момента в последние несколько лет посвящено множество публикаций. Приведем здесь результаты только одной публикации – работы французских авторов [8], опубликованной в 2010 г. Статья эта интересна, прежде всего, тем, что в ней результаты аналитического решения полевой задачи, сформулированной на поперечном сечении активной зоны электрической машины, подтверждаются расчетом на конечно-элементной модели.

На рис. 42 показано поперечное сечение двигателя, для которого выполнены расчеты. Заданы радиусы: втулки ротора, внешний магнитов, точки статора, нижней границы катушечных сторон в пазах. Угловые размеры:  $\alpha$  – относительная ширина магнитов,  $\beta$  – угловая ширина пазов.

На рис. 43 показаны зависимости электромагнитного момента от углового положения ротора, рассчитанные по аналитической методике, разработанной авторами (сплошная линия), и полученные на конечно-элементной модели (точки).

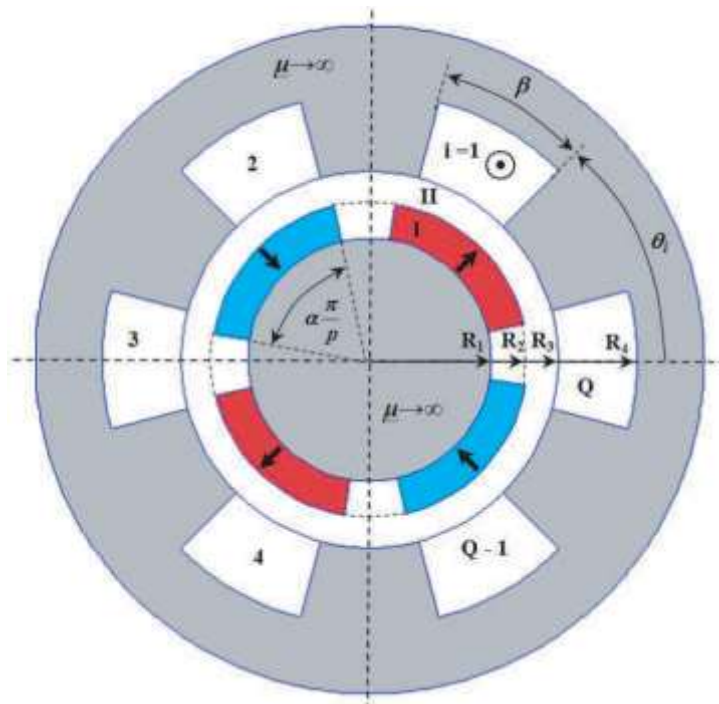


Рис. 42. Поперечное сечение трехфазного магнитоэлектрического двигателя с поверхностными магнитами на роторе и с зубцовыми обмотками на статоре. Рисунок заимствован из [8]

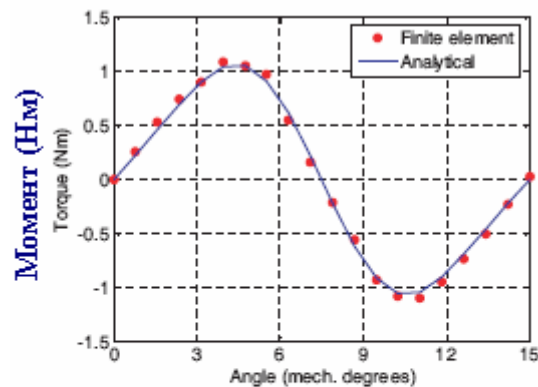


Figure 9. Cogging torque for  $\beta = 7.5^\circ$  ( $Q = 24$  slots).

**Зубцовые пульсации момента  
при  $\beta = 7,5$  град ( $Z = 24$ )**

Рис. 43 . Зависимости электромагнитного момента от углового положения ротора. Рисунок заимствован из [8]

В [8] аналитическая методика расчета основана на решении полевых задач в отдельных зонах поперечного сечения машины методом разделения переменных. При условии, что магнитная проницаемость сердечников принята равной бесконечности, таких зон три: зазор (решается уравнение

Лапласа), сечения постоянных магнитов и пазов статора (решается уравнение Пуассона). Как видно на рис. 43, результаты расчета зубцовых пульсаций момента по методике авторов хорошо совпадают с результатами, полученными по методу конечных элементов. Так же хорошо совпадают с результатами моделирования зависимости момента, рассчитанные с учетом реакции якоря. В дальнейшем эта аналитическая модель была распространена авторами на машины с полузакрытыми пазами [9].

В большинстве работ, посвященных аналитическим моделям для расчета поля в электротехнических устройствах, оценку точности их предлагается выполнять, либо проводя численные расчеты поля, либо сравнивая расчетные результаты с данными физического эксперимента. При этом обычно в качестве численного метода используется метод конечных элементов. Известны и другие подходы к численному анализу полей. Например, в монографии А.А. Афанасьева, изданной в 2011 г. [10] изложена теория и приводятся многочисленные примеры применения метода сопряжения конформных отображений. Суть этого метода заключается в том, что область задачи разбивается на достаточное число подобластей, в которых распределение поля может быть найдено по предварительно полученным с помощью конформных преобразований аналитическим выражениям. Решение для всей области находится в результате согласования граничных условий на подобластях. Такой же подход, использующий аналитические решения в численных расчетах, продемонстрирован в монографии П.А. Курбатова и С.А. Аринчина «Численный расчет электромагнитных полей» [11].

### **3.4. Определение коэффициентов формы поля**

Электромагнитный расчет синхронных машин основывается на теории двух реакций Blondеля. Суть этой теории заключается в том, что в ненасыщенной машине результирующее поле, созданное всеми обмотками при любой нагрузке, может быть представлено в виде суммы полей, ориентированных по продольной и поперечной осям машины. Каждое из этих полей сим-

метрично относительно соответствующей оси и может быть рассчитано по известным токам обмоток *при использовании системы коэффициентов формы поля*, зависящих от соотношения характерных размеров поперечного сечения. Определение этих коэффициентов путем решения полевых задач на конечно-элементных моделях позволяет более полно понять их физический смысл и оценить влияние допущений, принятых при вычислении таблиц этих коэффициентов.

### 3.4.1. Коэффициенты поля возбуждения

При расчетах синхронных машин используются два коэффициента, относящиеся к полю возбуждения: коэффициент формы поля возбуждения

$$k_f = \frac{B_{\delta 1m}}{B_\delta} \quad (5)$$

и коэффициент потока возбуждения

$$k_\Phi = \frac{\Phi_m}{\Phi_{1m}}, \quad (6)$$

где  $B_{\delta 1m}$  - амплитуда основной гармонической индукции в зазоре,  $B_\delta$  - радиальная составляющая индукции на оси полюса,  $\Phi_m = \tau l_\delta B_{\delta cp}$  - полный поток взаимной индукции,  $\tau$  - полюсное деление,  $l_\delta$  - расчетная длина машины,  $B_{\delta cp}$  - среднее значение индукции на полюсном делении,  $\Phi_{1m} = (2/\pi)\tau l_\delta B_{\delta 1m}$  - магнитный поток, найденный по первой гармонике.

Значения коэффициентов  $k_f$  и  $k_\Phi$  рассчитываются для режима холостого хода в предположении, что насыщение отсутствует, а сердечник якоря не имеет пазов ( в процессе электромагнитного расчета влияние зубчатости сердечников и насыщения учитывается с помощью поправочных коэффициентов).

Конечно-элементная модель, на которой могут быть определены коэффициенты поля возбуждения, проста. На рис. 44 показан фрагмент модели гидрогенератора, приведенной на рис. 27 (напомним, что данные гидрогенератора взяты из примера расчета в [3]). Область задачи на рис. 44 отличается

от полной модели: сердечник статора не содержит пазов, не моделируется сталь сердечников статора и ротора (проницаемость стали принята бесконечной, в связи с чем на всей внешней границе области должно быть задано условие Неймана). Поскольку результаты моделирования предполагается подвергнуть гармоническому анализу, модель сформирована для полного периода поля, несмотря на то, что, используя условия симметрии можно было бы ограничиться гораздо меньшей областью.

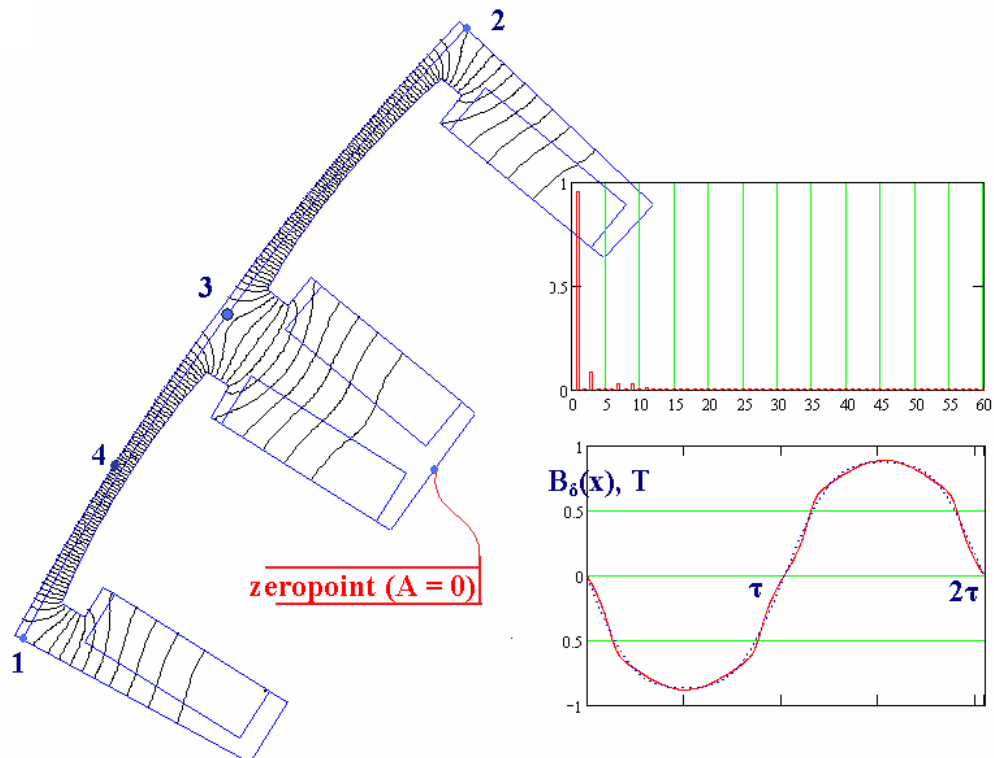


Рис. 44. Поле возбуждения гидрогенератора 26,2 МВт [3] при холостом ходе: распределение индукции в зазоре и гармонический состав .

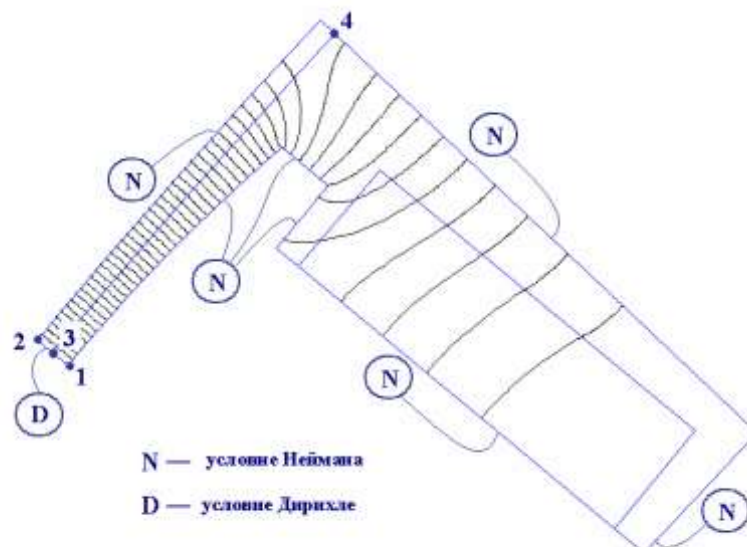
Заметим, что если на всей внешней границе задано условие Неймана, процесс решения задачи может быть не завершен. В этом случае можно рекомендовать следующий выход - надо задать в какой-либо точке произвольное значение векторного магнитного потенциала (обычно – ноль).

Вычисление коэффициентов поля возбуждения по (5) и (6) становится возможным после проведения гармонического анализа распределения индукции на контуре 1-3-2 (на периоде поля). Для определения потока  $\Phi_m$  сле-



дует воспользоваться опцией интегрирования (нажав кнопку со знаком интеграла). При этом можно либо предварительно найти среднее значение индукции на длине одного полюсного деления (отрезок 1-3), либо найти  $\Phi_m$  непосредственно. Для определения индукции на оси полюса  $B_\delta$  при формировании модели следует предусмотреть соответствующую точку на поверхности сердечника статора (точка 4 на рис. 44). Как следует из рис. 44, распределение индукции в воздушном зазоре гидрогенератора при выбранной конфигурации полюса весьма близко к синусоидальному.

С точки зрения воспроизведения поля модель на рис. 44 является избыточной. Достаточная информация может быть получена на вчетверо меньшей модели, показанной на рис. 45. К тому же на этой модели один из участков внешней границы (1-2) является границей Дирихле, что гарантирует устойчивость решения.



**Рис. 45. Модель половины полюсного деления гидрогенератора 26,2 МВт [3]. Поле возбуждения при холостом ходе**

Для выполнения гармонического анализа данные моделирования (распределение индукции в воздушном зазоре), полученные на четверти периода

(отрезок 3-4), следует преобразовать в текстовый файл, соответствующий полному периоду поля.

### 3.4.2. Определение коэффициентов реакции якоря

Будем здесь следовать терминологии и обозначениям, принятым на кафедре электромеханики МЭИ (см., например, [3, 4, 8, и др.]). Эти термины и обозначения иногда не совпадают с принятыми в другой популярной учебной литературе (например, в [9]).

Коэффициенты формы поля по продольной и поперечной осям:

$$k_d = \frac{B_{ad1m}}{B_{adm}}, \quad (7)$$

$$k_q = \frac{B_{aq1m}}{B_{aqm}}, \quad (8)$$

где  $B_{ad1m}$  и  $B_{aq1m}$  - амплитуды основных гармоник индукции в воздушном зазоре при ориентации магнитной оси МДС обмотки якоря соответственно по продольной оси  $d$  и по поперечной оси  $q$ ,  $B_{adm}$  и  $B_{aqm}$  - то же, но при равномерном зазоре, равном минимальному.

Из (7) и (8) следует, что для определения коэффициентов  $k_d$  и  $k_q$  можно воспользоваться моделями, аналогичными тем, которые показаны на рис. 44, изменив, однако, источники поля – вместо МДС обмотки возбуждения следует задать на границе, соответствующей внутренней поверхности статора, тонкий токовый слой с гармоническим распределением плотности тока. Положение этого слоя надо задать таким, чтобы магнитная ось созданного им поля в одном случае была ориентирована по продольной оси (определение  $k_d$ ), а в другом – по поперечной (определение  $k_q$ ). Покажем на примере, как это можно сделать средствами программы *FEMM*.

Токовый слой с гармоническим распределением плотности тока в программе *FEMM* можно задать только приближенно. Например, при формировании модели можно создать достаточно большое число точек, расположенных равномерно вблизи поверхности сердечника со стороны зазора, и задать

в этих точках токи, представляющие дискретную аппроксимацию непрерывного токового слоя. Этот способ хорош, если число точек на периоде велико (равно, например, 360) и модель формируется с использованием средств программирования.

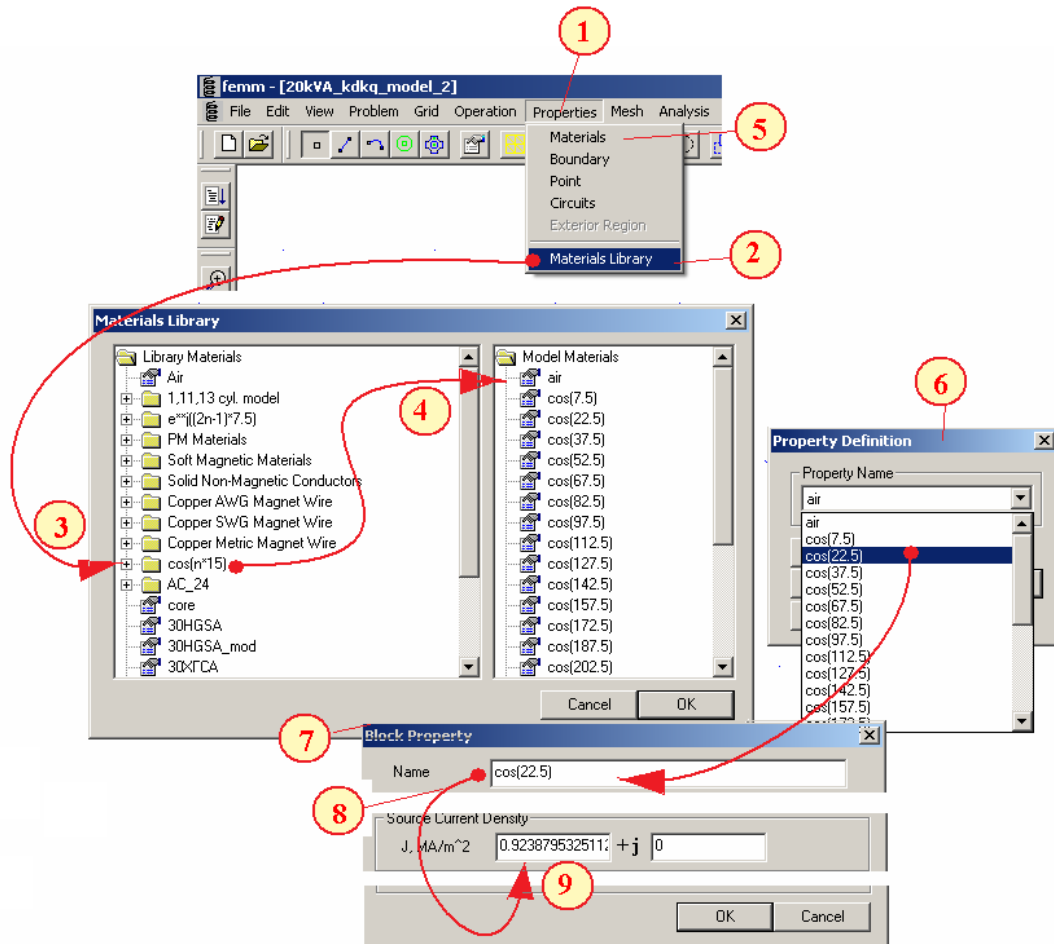


Рис. 46. Формирование гармонического токового слоя

Удобен и другой способ создания токового слоя, для которого требуется меньшее число участков аппроксимации. В этом случае тонкий кольцевой слой разбивается на  $N$  равных отрезков, на каждом из которых задается плотность тока, *пропорциональная*

$$\cos\left(\frac{360}{2N} + (n-1)\frac{360}{N}\right) \quad (9)$$

где  $n$  - номер отрезка.

Массив блоков с плотностями, *равными* значениям, рассчитанным по (9), можно создать заранее и хранить в библиотеке материалов программы *FEMM*.

Процесс создания гармонического токового слоя поясняется рисунком 46.

Выбрав на верхней панели экрана клавишу редактирования свойств (*Properties*, поз. 1), перейти в библиотеку материалов (*Materials library*, поз. 2) и создать в ней (если не была создана предварительно) папку, содержащую  $N$  имен блоков (поз. 3) с плотностями тока, рассчитанными по (9). Хорошая точность аппроксимации достигается при  $N = 24$  (в приведенном примере токовый слой на периоде разбит на 24 участка по 15 эл. град.). Созданную папку следует скопировать в правую часть окна (поз. 4), соответствующую списку материалов модели (*Model materials*). При необходимости значения плотности тока каждого участка можно изменить, умножив на значение амплитуды плотности тока токового слоя. Для этого надо открыть окно материалов модели (позиции 1, 5 и 6), выбрать редактируемый блок и в окне свойств блоков (поз. 7) изменить значение плотности тока (поз. 9). Если плотности тока всех участков умножаются на одно и то же число, удобно вставлять этот множитель с помощью клавиш *Control + V*.

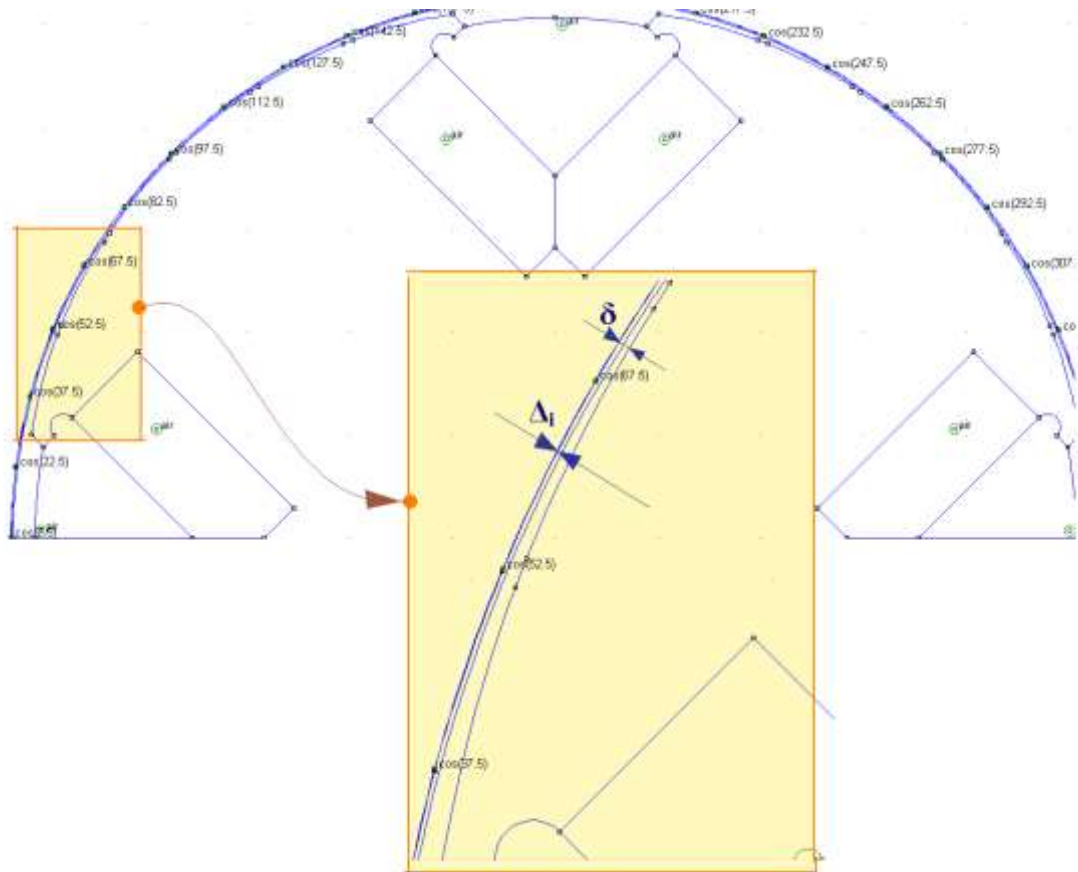


Рис. 47. Гармонический токовый слой модели. Посередине воздушного зазора проведена окружность – контур, на котором считываются значения индукции для построения графика и гармонического анализа.

Расположив гармонический токовый слой на модели таким образом, чтобы его магнитная ось совпала с продольной осью  $d$ , в результате решения полевой задачи получим *продольное поле якоря*. На рис. 48 показано распределение индукции продольного поля якоря в зазоре явнополюсного стартер-генератора мощностью 20 кВт, поперечное сечение которого изображено на рис. 47. Гармонический анализ этого распределения позволяет найти значение  $B_{adm}$ . Для того чтобы определить  $B_{adm}$ , надо заменить на модели явнополюсный ротор цилиндрическим при равномерном зазоре, равном минимальному.

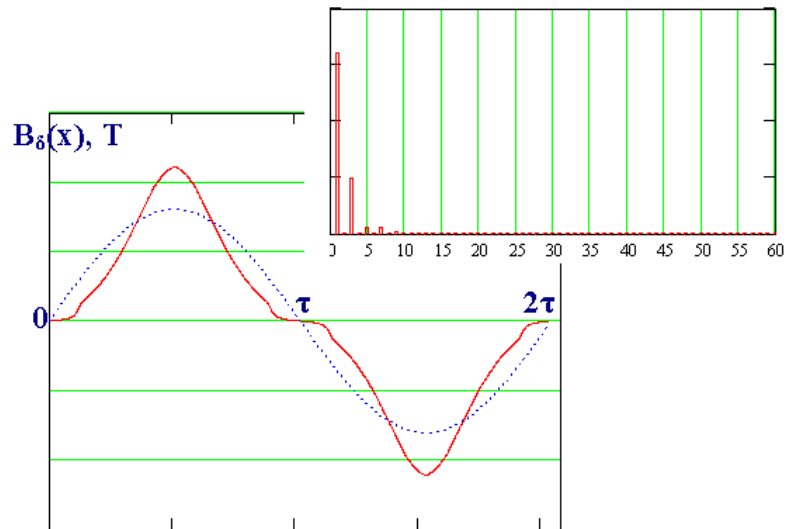


Рис. 48. Распределение индукции в воздушном зазоре при поле якоря, ориентированном вдоль оси  $d$ , и его гармонический состав для явнополюсного генератора, поперечное сечение которого показано на рис. 47

Воспроизвести поперечное поле якоря можно, воспользовавшись моделью, показанной на рис. 47. Гармонический токовый слой для этого надо сместить по окружности на 45 град. так, чтобы его магнитная ось совпала с осью  $q$ . Сделать это можно следующим образом. Выделив блоки, относящиеся к токовому слою, надо выбрать опцию перемещения (*Move*) в меню редактирования (*Edit*) и затем во всплывающем окне *Move* определить вращение (*Rotation*) выделенных блоков относительно начала координат (т.е. относительно точки с координатами 0,0 – предполагается, что центр поперечного сечения моделируемой машины совпадает с началом координат).

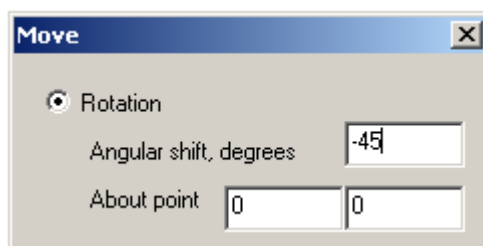
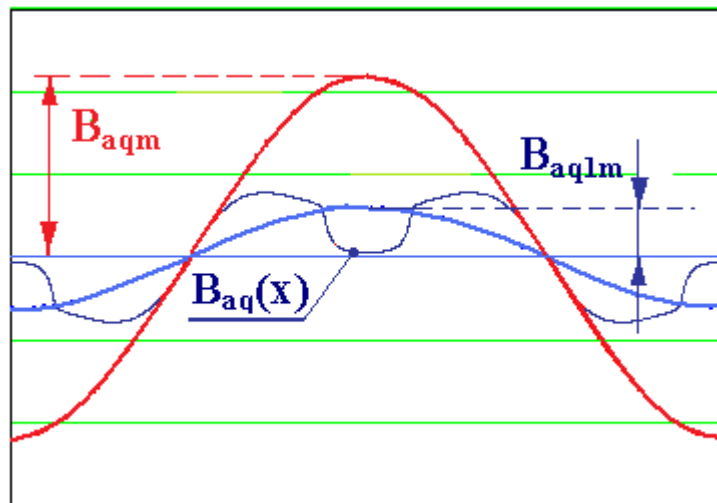


Рис. 49. Поворот токового слоя на 45 град по часовой стрелке относительно начала координат

Затем надо выделить блоки, оказавшиеся в результате предыдущего действия за пределами области задачи, и таким же образом переместить их в начало токового слоя (поворотом на 180 град.).

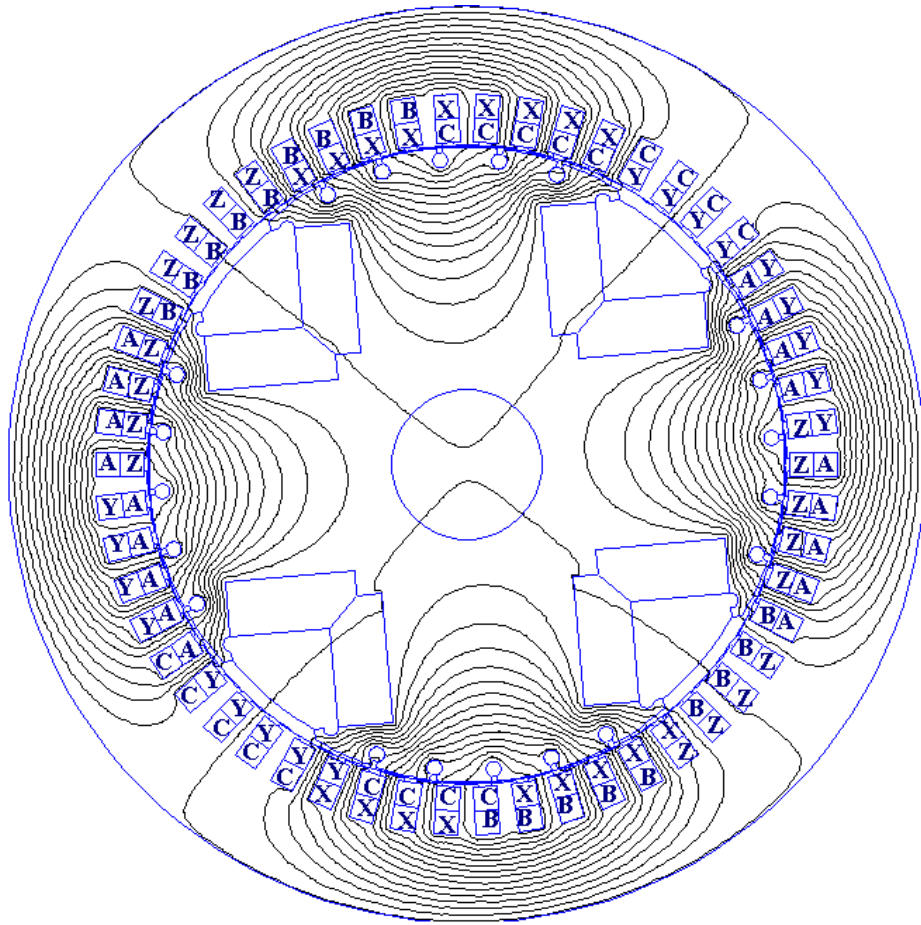
Поскольку в результате смещения токового слоя его магнитная ось стала совпадать с боковыми радиальными границами модели, условие Неймана, которое на них было задано при воспроизведении продольного поля якоря, надо заменить условием Дирихле. В рассматриваемом случае можно задать на боковых границах векторные магнитные потенциалы одинаковыми, например,  $A = 0$ , т.к. суммарный поток через зазор равен нулю.

На рис. 50 приведены распределения индукции поля, созданного поперечной МДС якоря в зазоре при реальном явнополюсном роторе и при равномерном зазоре, равном минимальному и показана основная гармоника индукции при явнополюсном роторе.



**Рис. 50. Распределения индукции поля, созданного в зазоре поперечной МДС якоря**

Модели типа показанных на рис. 47, позволяют выполнять необходимые вычисления, но они недостаточно наглядны, т.к. не представляют полной картины поля. Для получения такой картины необходимо воспроизвести в модели сердечники машины (см. рис. 51).

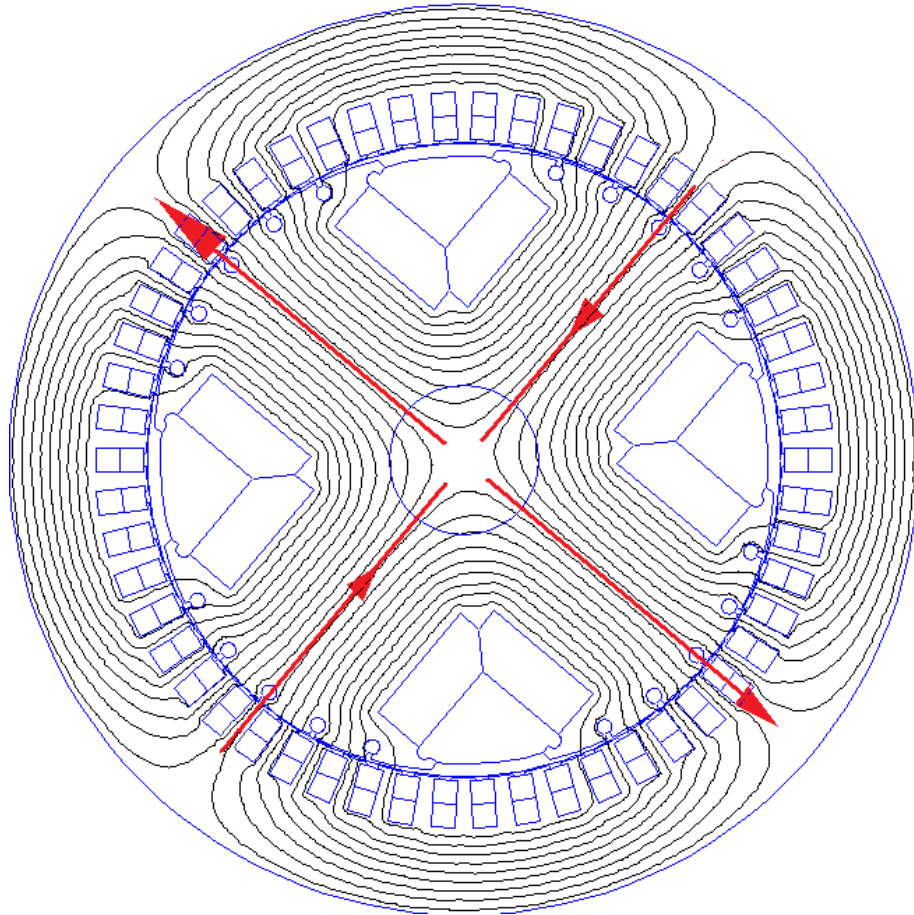


**Рис. 51. Полная картина поля, созданного в поперечном сечении явнополюсной синхронной машины поперечной МДС якоря**

Картина продольного поля якоря показана на рис. 52. Для того чтобы перестроить модель, понадобилось повернуть роторную ее часть на 45 град. (выделив все блоки, относящиеся к ротору, затем: *Edit*  $\rightarrow$  *Move*  $\rightarrow$  *Rotation*).

Важным свойством полей, показанных на рисунках 51 и 52, является то, что они симметричны относительно осей  $d$  и  $q$ . Если допустима суперпозиция, поле при любом режиме нагрузки может быть представлено как сумма двух симметричных полей, одно из которых ориентировано вдоль оси  $d$ , а второе – вдоль оси  $q$ .





**Рис. 52. Полная картина поля, созданного в поперечном сечении явнополюсной синхронной машины продольной МДС якоря**

### **3.5. Моделирование установившегося режима работы синхронной машины**

Установившийся режим работы может характеризоваться напряжением на зажимах обмотки якоря, током якоря и коэффициентом мощности, т.е. косинусом угла между векторами напряжения и тока. Для того чтобы смоделировать поле, созданное в поперечном сечении машины токами всех обмоток в рассматриваемый момент времени при установившемся режиме работы, кроме размеров надо знать плотности тока на участках модели, соответствующих сечениям проводов обмоток якоря и возбуждения, и взаимное положение ротора и статора.

Задав на участках модели, соответствующих пазам якоря, мгновенные значения плотности тока, мы тем самым определяем положение магнитной оси обмотки якоря в рассматриваемый момент времени. На векторной диаграмме МДС обмотки якоря представляется вектором тока. Пространственный угол между магнитной осью обмотки якоря и продольной осью  $d$ , измеренный на модели поперечного сечения машины, в  $p$  раз меньше угла между осью  $d$  и вектором тока  $\alpha_{dA}$  на векторной диаграмме, который, таким образом, оказывается определенным на стадии формирования модели. После того, как поле смоделировано и выполнен гармонический анализ распределения индукции в воздушном зазоре, определенным оказывается и  $\alpha_{dB}$  - угол между продольной осью и магнитной осью результирующего поля. Эту ось мы считаем совпадающей с осью ближайшей положительной полуволны индукции, в случае, проиллюстрированном на рис. 52, отстающей от продольной оси  $d$ .

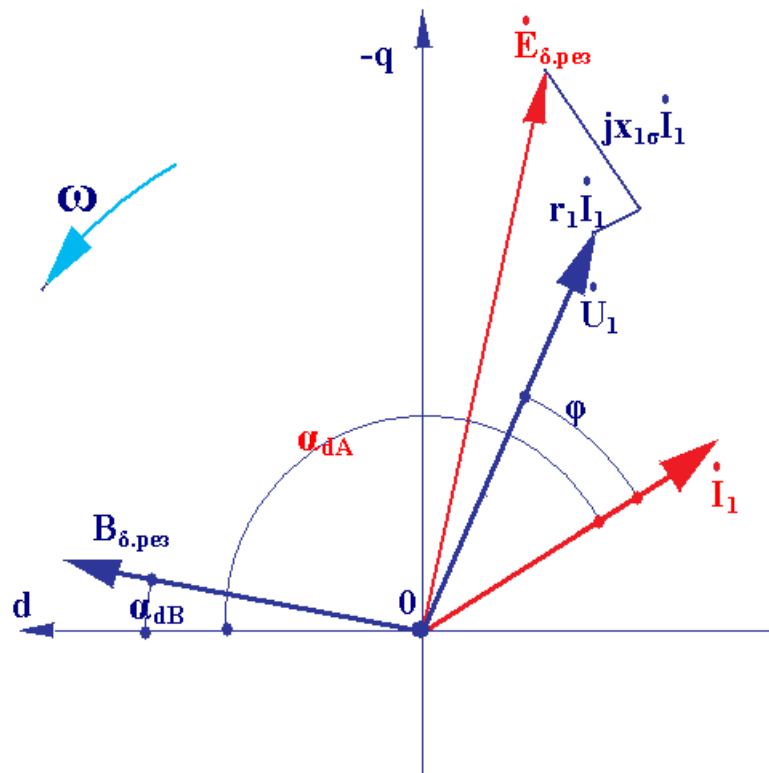


Рис. 53. Векторная диаграмма установившегося режима работы синхронного генератора в режиме перевозбуждения

При определении углов  $\alpha_{dA}$  (на стадии формирования модели) и  $\alpha_{dB}$  (в результате гармонического анализа кривой индукции) необходимо согласовывать, во-первых, направление вращения поля (и ротора) на модели, во-вторых, направление контура, на котором снимается распределение индукции в зазоре, и, в-третьих, направление вращения векторов на векторной диаграмме (против часовой стрелки). Кроме того, для многополюсных машин следует учитывать, что на модели углы измеряются в пространственных градусах, а на векторной диаграмме – в электрических.

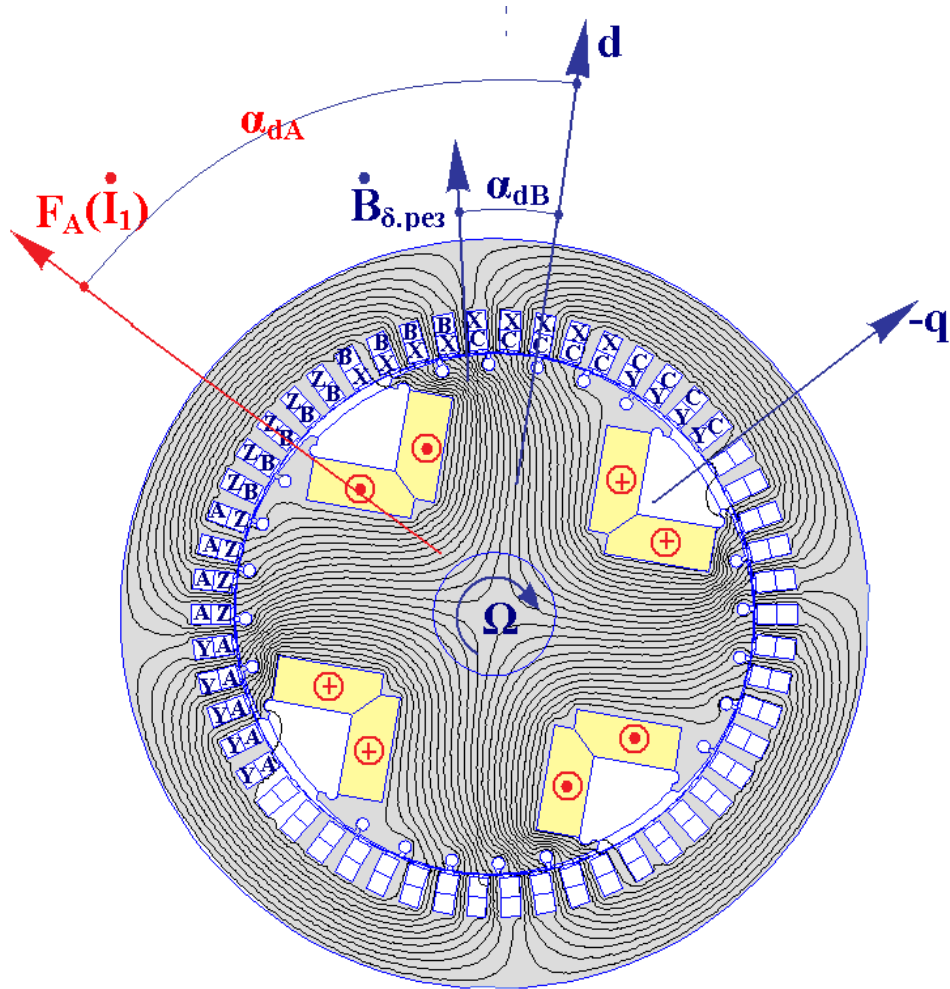


Рис. 54. Определение углов для векторной диаграммы установившегося режима работы синхронного генератора

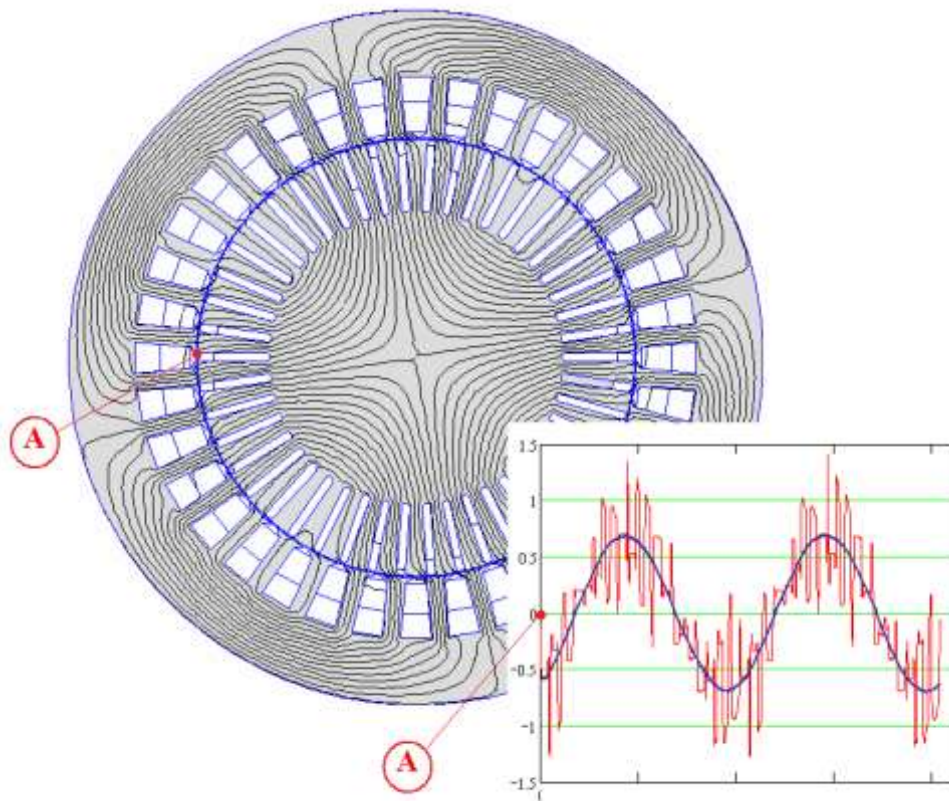
При моделировании установившегося режима работы синхронного генератора приходится прибегать к последовательным приближениям. Вначале для выбранного момента времени необходимо задаться мгновенными значениями токов в фазах обмотки якоря, соответствующими заданному значению тока  $I_1$ , током возбуждения (в модели задаются плотности тока на участках, представляющих катушечные стороны обмоток) и взаимным положением статора и ротора. После того, как поле рассчитано, следует выполнить гармонический анализ распределения нормальной составляющей индукции поля в зазоре и найти амплитуду основной гармоники индукции и угол  $\alpha_{dB}$ . По результатам гармонического анализа определяют вектор результирующей ЭДС  $\dot{E}_{\delta,рез}$ . Далее, используя известные значения параметров обмотки якоря  $r_1$  и  $x_{\sigma 1}$ , на строящейся векторной диаграмме откладывают векторы падений напряжения на этих сопротивлениях и находят вектор напряжения на зажимах обмотки якоря  $\dot{U}_1$  и угол  $\varphi$ . Если значения  $U_1$  и  $\varphi$  оказываются не соответствующими моделируемому режиму работы, производится коррекция тока возбуждения и/или угла  $\alpha_{dA}$ . Обычно трех-пяти итераций оказывается достаточно для того чтобы данные режима, полученные в результате моделирования, совпали с заданными с приемлемой точностью.

## 4. Магнитные поля в асинхронных машинах

### 4.1. Моделирование асинхронных машин с заторможенным ротором

Если нас не интересуют процессы, происходящие в изоляции, и мы можем пренебречь токами смещения, электромагнитные поля асинхронных машин можно считать *квазистационарными*. Такие поля могут быть рассчитаны с помощью *магнитоэлектростатических* моделей, т.е. моделей, в которых распределение токов, являющихся источниками поля, известны. Найти токи можно различными способами. Например, если известны параметры машины, можно воспользоваться схемой замещения. Рассчитав токи статора

и ротора, основные гармоники МДС и пространственный угол между ними, на модели можно задать токи пазов.



**Рис. 55. Магнитное поле в поперечном сечении короткозамкнутого асинхронного двигателя мощностью 13 кВт при номинальной нагрузке**

На рис. 55 показаны картина поля в поперечном сечении и распределение индукции в воздушном зазоре для асинхронного двигателя мощностью 13 кВт, полученные с помощью программы *FEMM* при расчете исходных данных для модели описанным выше способом. (Пример расчета этого двигателя приведен в учебнике по проектированию электрических машин под ред. П.С. Сергеева, издательство «Энергия», Москва, 1970 г.) Распределение индукции в зазоре снято на контуре, проведенном посередине зазора, с началом в точке *A*, с направлением по часовой стрелке.

Точность такого способа моделирования зависит от точности определения параметров схемы замещения.

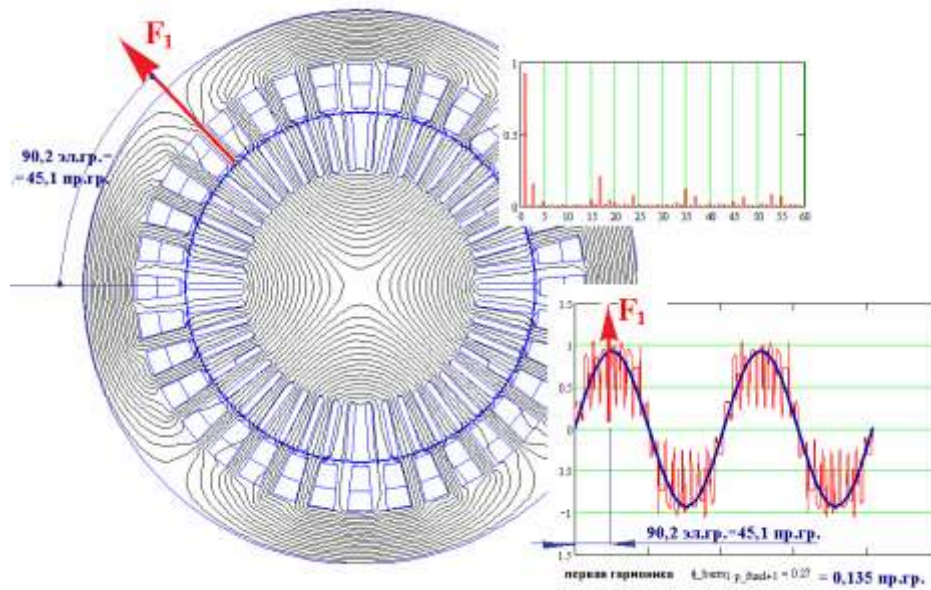


Рис. 56. Магнитное поле, созданное в поперечном сечении короткозамкнутого асинхронного двигателя мощностью 13 кВт обмоткой статора. Ток статора соответствует номинальной нагрузке

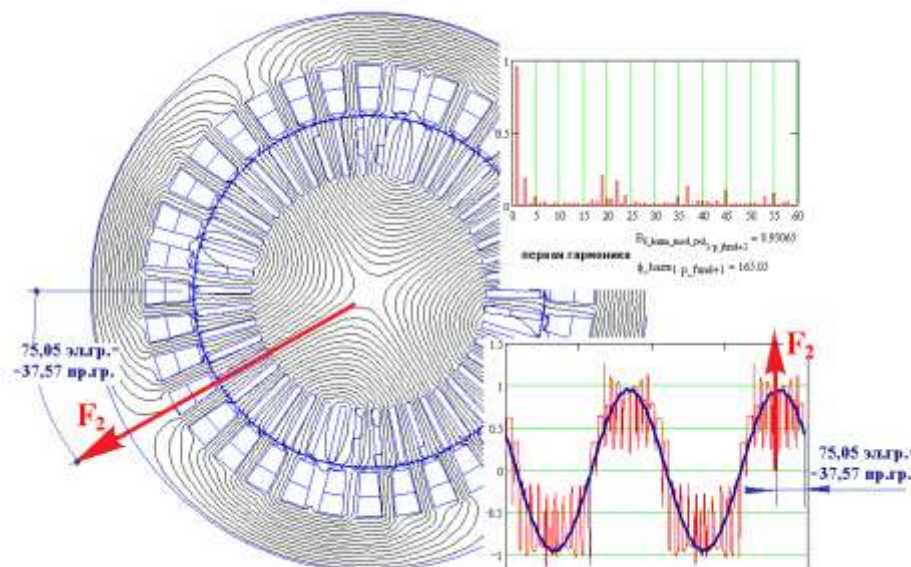


Рис. 57. Магнитное поле, созданное в поперечном сечении короткозамкнутого асинхронного двигателя мощностью 13 кВт обмоткой ротора. Ток ротора соответствует номинальной нагрузке

Расчет по схеме замещения позволяет определить амплитуду и фазовый угол приведенного тока ротора. Рассчитать плотности тока в стержнях беличьей клетки, задаваемые в качестве исходных данных на конечно-элементной модели, можно следующим образом. Вначале надо определить пространственное положение основной гармоники МДС ротора. Отношение амплитуд МДС статора и ротора равно отношению первичного и вторичного токов, рассчитанных по схеме замещения, пространственное положение волны МДС статора в рассматриваемый момент времени определено мгновенными значениями токов фаз, а фазовый сдвиг между волнами МДС статора и ротора определен углом между векторами первичного и вторичного токов. Определив пространственное положение волны МДС ротора в рассматриваемый момент времени и зная угловое положение ротора относительно статора, можно найти токи стержней, учитывая, что разность скалярных магнитных потенциалов соседних зубцов ротора (т.е. разность значений МДС ротора, соответствующих серединам зубцов) равна току паза, расположенного между этими зубцами. При таком расчете может оказаться, что сумма токов стержней на малую величину отличается от нуля. В этом случае следует ввести компенсирующую поправку.

Достоинством магнитостатических моделей является, во-первых, то, что используется реальная кривая намагничивания стали сердечников, и, во-вторых, то, что на них можно проанализировать поля, создаваемые обмотками статора и ротора по отдельности. На рисунках 56 и 57 показаны такие поля.

Магнитостатические модели позволяют оценить использование стали, гармонический состав поля и электромагнитный момент машины. Однако вполне точным это моделирование назвать нельзя, главным образом потому, что при определении токов ротора здесь принимается во внимание только основная гармоника МДС, а точность определения ее фазового угла зависит от точности, с которой известны параметры ротора. Напомним, что из-за

вытеснения тока, параметры ротора могут существенно изменяться с нагрузкой, особенно в асинхронных машинах с глубокими пазами.

В связи с этим при моделировании полей в асинхронных машинах предпочтительны так называемые *гармонические* модели (*time harmonic models*). Основное допущение, которое принято для этих моделей состоит в том, что изменение величин поля (индукции, напряженности, токов) во времени считается синусоидальным. Нелинейность стальных сердечников при этом учитывается введением *эквивалентной* магнитной проницаемости.

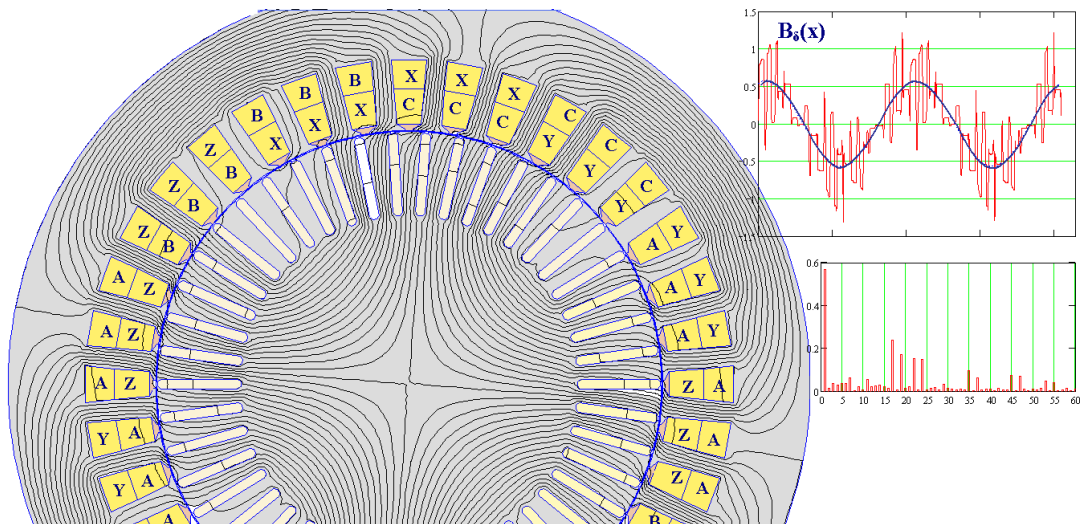
При моделировании асинхронных машин, работающих при нагрузке, следует учитывать, что частота токов в роторе равна  $f_2 = f_1 s$ , где  $s$  – скольжение. Это означает, что нельзя смоделировать машину, имеющую и на статоре, и на роторе массивные электропроводящие элементы, в которых индуктируются токи. Процессы на участках модели, соответствующих этим элементам, описываются дифференциальным уравнением (*уравнением теплопроводности*), содержащим производную векторного магнитного потенциала по времени, а в существующей версии программы *FEMM* на модели может быть задана только одна частота (т.е. скорость изменения во времени).

Ограничимся здесь рассмотрением асинхронных машин, в которых элементы с индуктированными токами (короткозамкнутые обмотки типа «беличьей клетки») расположены на роторе. Поскольку распределение поля в статоре в этом случае не зависит от частоты токов, протекающих по его обмотке, моделировать рабочий процесс при заданном скольжении  $s$  следует, определив для модели частоту  $f_2 = f_1 s$ . Электропроводность материала обмотки ротора при этом должна задаваться естественной. Можно сказать, что при таком способе моделирования мы переходим в систему координат, неподвижную относительно вращающегося ротора. Статор в этой системе представляется вращающимся, и его положение относительно ротора, заданное при построении модели, соответствует только одному моменту времени. Впрочем, если мы не хотим учитывать изменение магнитной прово-



димости воздушного зазора, вызванное взаимным перемещением сердечников, положение статора можно задать любым.

На рис. 58 показана картина поля, полученная на гармонической модели того же асинхронного двигателя, для которого на рис. 55 показаны результаты, полученные на магнитостатической модели. Моделировался режим при скольжении  $s = 0,0272$ . На участках модели, соответствующих пазам ротора, предполагается наличие массивных (нешихтованных) элементов, в которых наводятся вихревые токи. При этом на модели воспроизводится явление вытеснения тока, приводящее, как известно, к увеличению активного сопротивления ротора при пуске и, как следствие, к увеличению пускового момента.



**Рис. 58.** Картина поля в поперечном сечении короткозамкнутого асинхронного двигателя мощностью 13 кВт, полученная на гармонической модели. Частота модели задана равной 1,36 Гц, что соответствует скольжению 0,0272

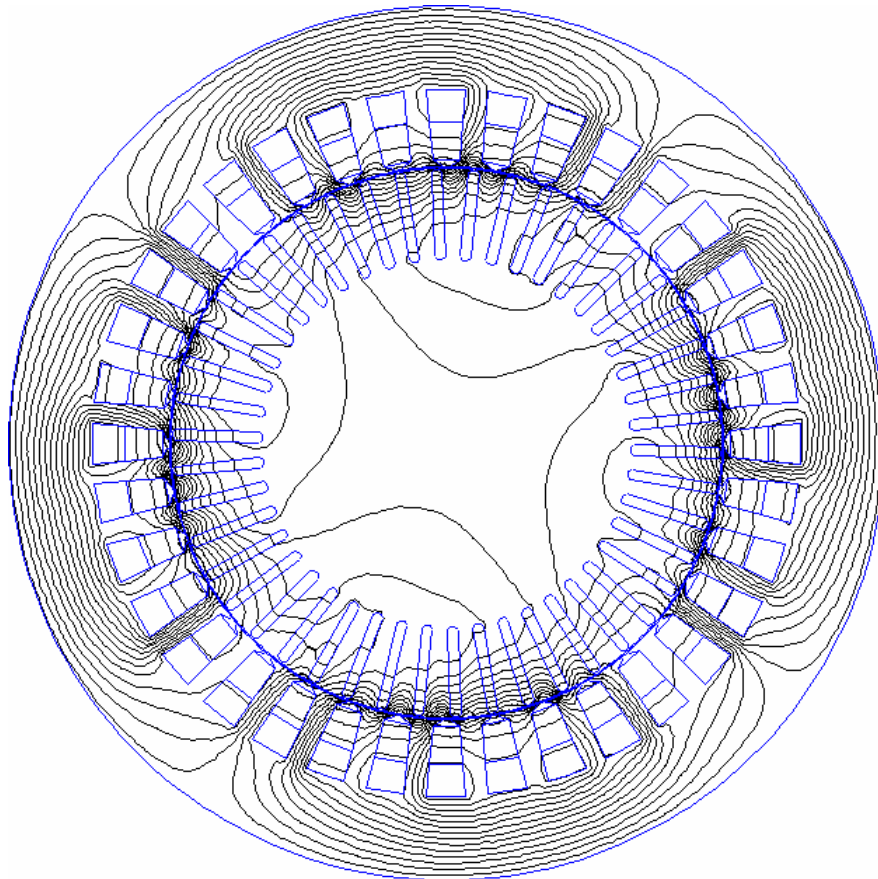
Картина поля, выводимая постпроцессором гармонической модели, соответствует моменту времени  $\omega t = 0$  (предполагается, что каждая из величин поля  $A_i$  изменяется во времени по закону  $A_i(t) = A_{i,\max} \cos(\omega t + \varphi_i)$ , где  $A_{i,\max}$  - амплитуда,  $\varphi_i$  - фазовый угол величины  $A_i$ ).

Пользуясь средствами постпроцессора гармонической модели (интегрированием), можно найти комплексные значения токов стержней ротора и, следовательно, найти мгновенные значения этих токов, соответствующих моменту времени  $\omega t = 0$ . Если теперь в магнитостатической модели задать мгновенные значения токов статора и ротора, соответствующие  $\omega t = 0$ , то полученная в результате решения картина поля будет довольно близка к той, которая является результатом моделирования на гармонической модели. Различие этих двух решений будет обусловлено тем, что в магнитостатической модели, в отличие от гармонической, не воспроизводится вытеснение тока в стержнях ротора<sup>1</sup>.

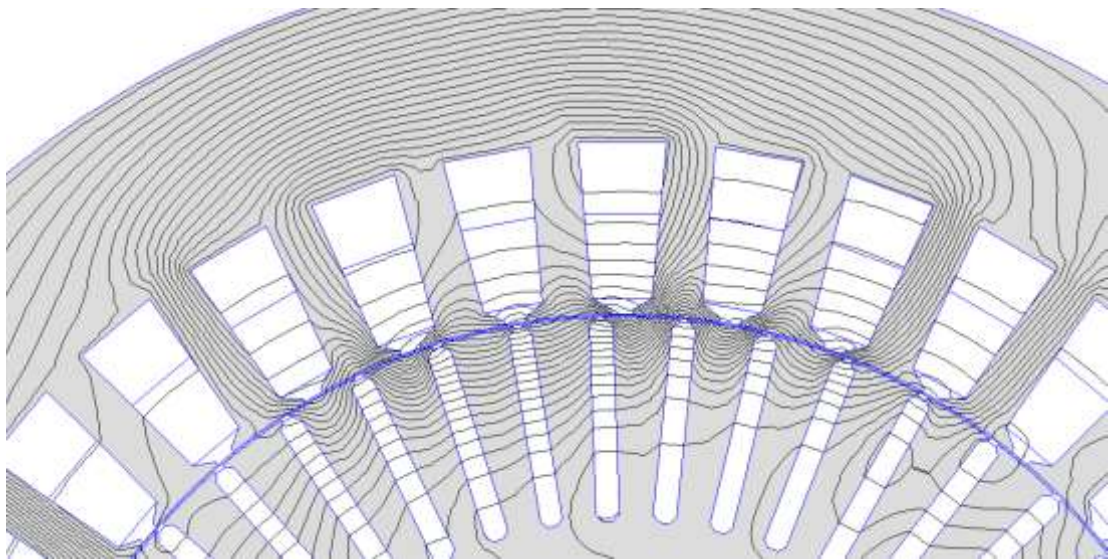
Режим работы асинхронного двигателя, заданный скольжением  $s$ , можно смоделировать ещё одним способом. Из теории асинхронной машины известно, что двигатель с заторможенным ротором, активное сопротивление ротора которого изменено в  $s$  раз, эквивалентен двигателю, ротор которого вращается со скольжением  $s$ . Следовательно, режим, характеризуемый скольжением  $s$ , может быть смоделирован на гармонической модели при частоте статора, но с измененной в  $s$  раз электропроводностью материала стержней беличьей клетки. Таким образом, последовательно изменяя электропроводность стержней и определяя каждый раз момент заторможенного ротора, можно получить данные для построения статической механической характеристики двигателя.

---

<sup>1</sup> Смоделировать неравномерное распределение плотности тока по сечению стержня в магнитостатической модели можно, если разделить стержень по высоте на несколько частей и, определив на гармонической модели зависимость плотности тока от соответствующей пространственной координаты (например, от расстояния от дна паза), вычислить токи на выделенных участках стержней и задать их в магнитостатической модели. Однако эта процедура довольно трудоемка и этот численный эксперимент может быть оправдан только в том случае, если целью является оценка допущения об эквивалентной магнитной проницаемости, принятого для гармонических моделей.



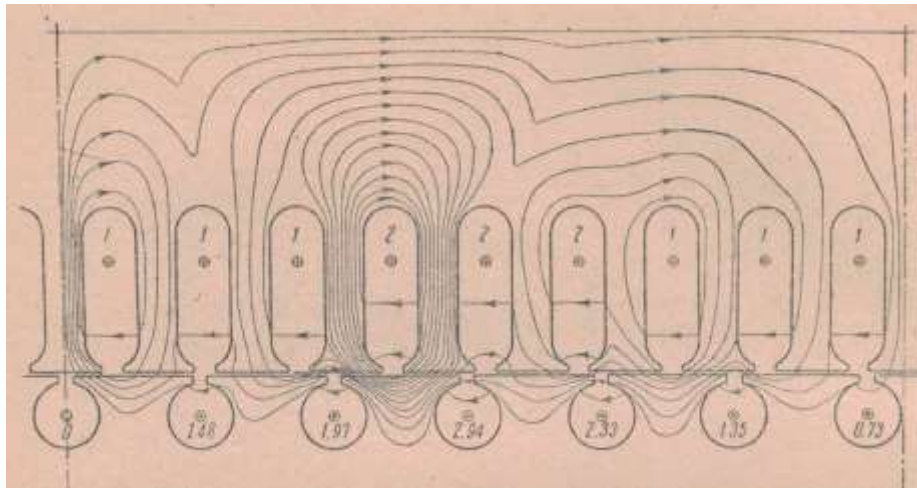
**Рис. 59.** Картина поля в поперечном сечении короткозамкнутого асинхронного двигателя в начальный момент пуска. Частота модели задана равной 50 Гц, а электропроводность стержней ротора – естественному значению (20,7 МСм/м)



**Рис. 60.** Фрагмент картины поля, показанной на рис. 59.

Для более полного понимания физических процессов, происходящих при пуске асинхронного двигателя, полезно рассмотреть поле в начале пуска. На рисунках 59 и 60 приведены картины поля, полученные при моделировании того же двигателя при скольжении, равном единице. Видно, что в этом случае поле существенно отличается от того, которое мы наблюдали в номинальном режиме при малом скольжении. В начале пуска большие токи, индуцированные в обмотке ротора, препятствуют проникновению поля, созданного намагничивающим током, в ротор и оно сосредоточивается в зубцовой зоне вблизи воздушного зазора.

Характер распределения поля в асинхронном двигателе в начале пуска особенно хорошо иллюстрируется фрагментом картины поля на рис. 60. Видно, что некоторые силовые линии значительную часть своего пути проходят в тангенциальном направлении, по коронкам зубцов статора и ротора. В свое время это послужило основанием для введения такого понятия как поток зиг-заг рассеяния (другие, реже употреблявшиеся, термины: двойное рассеяние, поясовое рассеяние). На рис. 61 приведен пример картины поля в асинхронном двигателе с заторможенным ротором, взятый из книги профессора Московского энергетического института Б.П. Апарова «Машины переменного тока. Часть I. Асинхронные машины», Москва-Ленинград, 1936 г. (Остается только восхищаться тем, насколько глубоко и верно инженеры прошлых лет представляли процессы, связанные с изменением магнитных полей в электрических машинах, и это в то время, когда быстродействующими вычислительными средствами считались арифмометр и логарифмическая линейка!).



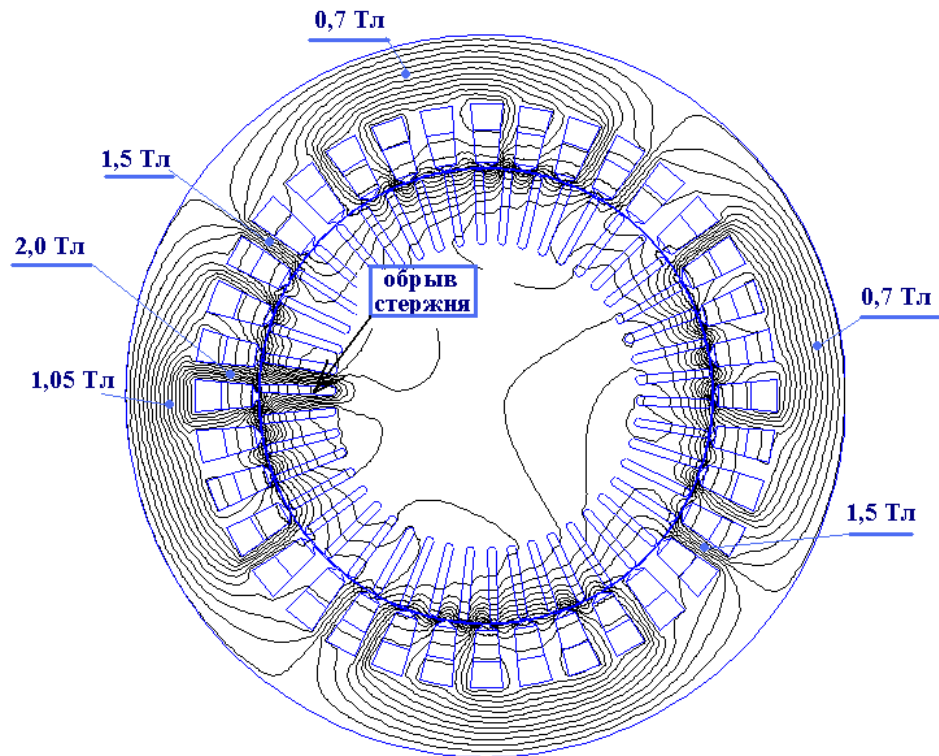
**Рис. 61. Рисунок заимствован из книги профессора Б.П. Апарова («Фиг. 73, стр. 92: Картина потоков в неподвижном короткозамкнутом двигателе»)**

#### **4.2. Моделирование короткозамкнутых асинхронных машин с повреждениями роторов**

Возможность моделировать на гармонических конечно-элементных моделях асинхронные машины с обмотками роторов, выполненными по типу беличьей клетки, позволяет оценить последствия таких, достаточно распространенных дефектов, как обрыв одного или нескольких стержней и повышенное сопротивление стержней при образовании раковин вследствие некачественной заливки. Для этого достаточно, зная характер дефекта, задать соответствующие свойства поврежденных стержней при формировании модели.

Чаще всего обрывы стержней случаются в двигателях с тяжелыми условиями пуска. Наиболее вероятным местом повреждения является при этом зона сопряжения стержней с короткозамыкающими кольцами.

На рис. 62 показана картина поля в поперечном сечении асинхронного двигателя при обрыве одного из стержней ротора (ротор заторможен). В этом случае на участке модели, соответствующем поврежденному стержню, электропроводность задана равной нулю.



**Рис. 62. Картина поля в короткозамкнутом асинхронном двигателе с одним оборванным стержнем ротора**

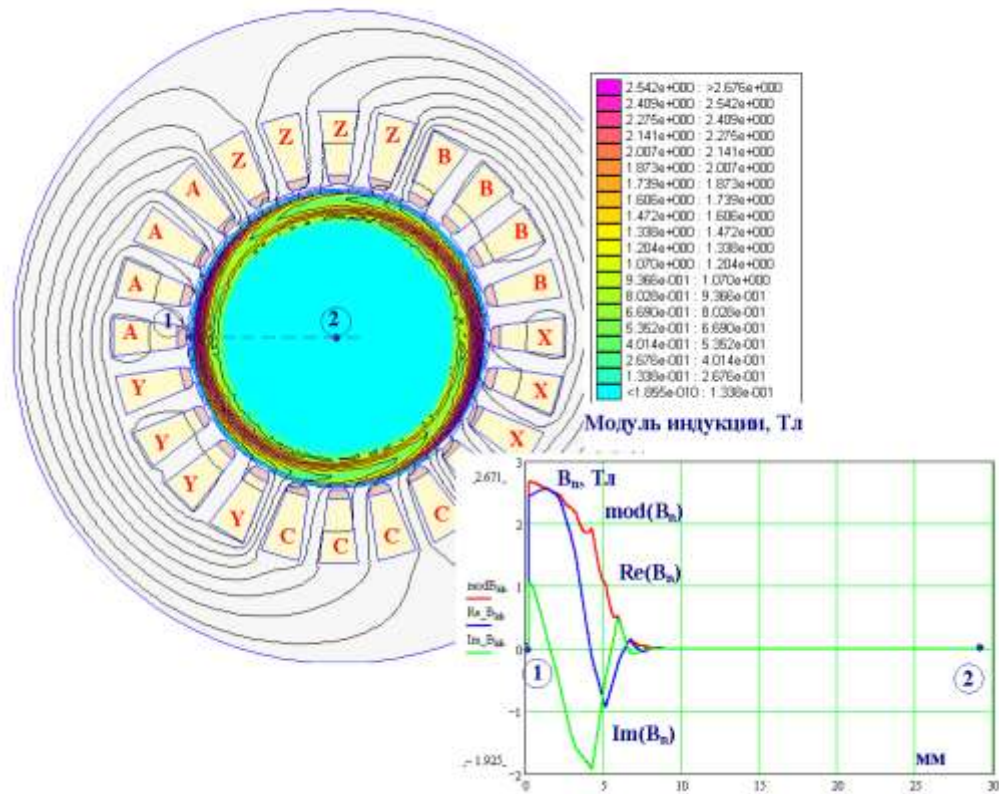
Как видно из приведенной картины поля, в зоне поврежденного стержня значительно увеличены индукции в зубцах и ярме статора. Это, кстати, позволяет предложить весьма простой и эффективный способ контроля качества короткозамкнутых роторов: достаточно установить на статоре измерительную обмотку, например, охватывающую ярмо (так же, как катушка граммовской обмотки), запитать обмотку статора пониженным напряжением и медленно проворачивать испытуемый ротор в расточке (при этом, если проверяется качество заливки роторов на технологической линии, не обязательно даже устанавливать подшипниковые щиты – равномерность зазора можно обеспечить пленочными прокладками).

### 4.3. Моделирование асинхронных двигателей с массивными роторами

В асинхронных машинах этого типа роторы представляют собой цилиндры, выполненные из нешихтованной магнитомягкой стали. Роль вторичной обмотки, в которой индуктируются токи, играет сам массив ротора. Иногда на внешней поверхности ротора тем или иным способом наносят медный слой.

Достоинства таких асинхронных машин очевидны. Во-первых, они очень просты как по конструкции, так и по технологии изготовления. Во-вторых, благодаря отсутствию обмоток и явно выраженных полюсов на роторе они могут работать при повышенных скоростях вращения, например в качестве генераторов мощностью до нескольких МВт с приводом от газотурбинных двигателей. В-третьих, они имеют сравнительно мягкую механическую характеристику, т.е. в какой-то мере допускают регулирование скорости. К недостаткам машин с массивными роторами обычно относят их сравнительно низкий коэффициент мощности.

На рис. 63 показана модель небольшого асинхронного двигателя с массивным цилиндрическим ротором, выполненным из чистого железа (материал *Pure iron* из библиотеки материалов программы *FEMM*). На статоре – электротехническая сталь 2411. Время расчета поля на компьютере средней производительности – около 20 мин. (гармоническая модель, 48 внешних (ньютоновских) итераций). Моделировался двигатель с заторможенным ротором при частоте питания 50 Гц. По картине поля и по цветной диаграмме распределения индукции в роторе можно судить о резко проявляющемся вытеснении поля к периферии ротора, а по искривлению силовых линий в роторе легко определить, в каком направлении действует на ротор вращающий момент.



**Рис. 63.** К моделированию асинхронного двигателя с массивным ферромагнитным ротором

На том же рисунке приведены графики распределения индукции по глубине ротора.

В таблице 4.3.1. приведены значения модуля индукции, действительной и мнимой составляющих плотности тока и относительной магнитной проницаемости, измеренные в точках контура 1-2, расположенных на различных расстояниях от поверхности ротора.

Табл. 4.3.1.

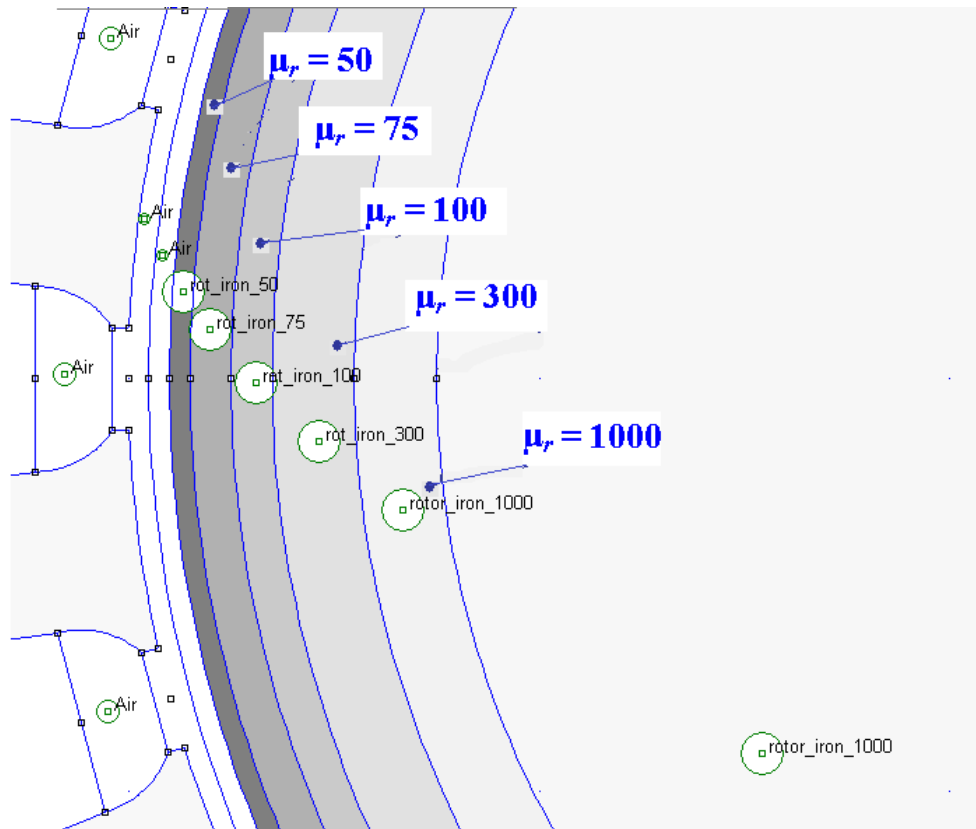
| №№ точек                 | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x, мм                    | 0,01  | 0,25  | 0,50  | 0,75  | 1,00  | 1,50  | 2,00  | 3,00  | 5,00  | 10,00 |
| modB, Тл                 | 2,68  | 2,66  | 2,64  | 2,61  | 2,58  | 2,50  | 2,45  | 2,17  | 0,90  | 4e-5  |
| Re(J), А/мм <sup>2</sup> | -11,3 | -12,1 | -12,9 | -13,4 | -13,8 | -13,8 | -13,5 | -9,49 | +2,52 | +3e-5 |
| Im(J), А/мм <sup>2</sup> | -21,6 | -19,7 | -17,6 | -15,5 | -13,4 | -9,20 | -5,12 | +1,59 | +1,41 | -3e-5 |
| mu_rel                   | 46    | 49    | 54    | 63    | 73    | 106   | 130   | 555   | 12427 | 12993 |



Возможность определить на гармонической модели распределение относительной магнитной проницаемости по поперечному сечению ротора, для которого задана реальная кривая намагничивания, позволяет сформировать приближенную многослойную модель ротора с линейными магнитными свойствами. Такой подход, кстати, неоднократно применялся при аналитических исследованиях машин с массивными роторами. Аналитические решения полевых задач, полученные для зон ротора с постоянными, но различными магнитными проницаемостями, согласовывались по граничным условиям, что позволяло найти аналитическое решение для всего поперечного сечения ротора.

Для конечно-элементных моделей подобного рода линеаризация позволяет существенно сократить время счета, что может быть важным, например, в сериях численных экспериментов, целью которых является оптимизация конструкции.

На рис. 64 показан фрагмент многослойной модели, в которой ротор представлен различными по ширине кольцевыми зонами с постоянными магнитными проницаемостями. Формирование такой модели можно произвести подбором, сравнивая полученные на ней результаты с данными, полученными на нелинейной модели. Одним из критериев для сравнения может служить, в частности, значение электромагнитного момента. Так, в рассматриваемом случае электромагнитный момент, найденный по линеаризованной модели равен 0,0238 Нм/мм, что весьма близко к 0,0235 Нм/мм для точной нелинейной модели (значения момента приведены для 1 мм длины активной зоны машины (глубины (*depth*) модели)). Время решения задачи на линеаризованной модели составляет несколько секунд.



**Рис. 64. Многослойная линейризованная конечно-элементная модель асинхронного двигателя с массивным ферромагнитным ротором**

### Литература

- [1] – D. Meeker FEMM
- [2]. П.Л. Калантаров и Л.А. Цейтлин. *Расчет индуктивностей*. Л.-д.: Энергоатомиздат, 1986,
- [3]. Абрамов А.И., Иванов-Смоленский А.В. Проектирование гидрогенераторов и синхронных компенсаторов. Изд. 2-е. — М.: Высшая школа, 2001.
- [4] В.И Извеков, Н.А. Серихин и А.И. Абрамов. Проектирование турбогенераторов. М.: Изд. МЭИ, 2005

- [5] Chunting Mi, Mariano Filippa, Weiguo Liu and Ruiqing Ma “Analytical Method for Predicting the Air-Gap Flux of Interior-Type Permanent-Magnet Machines”, *IEEE Trans. on Magn.* Vol. 40, No. 1, Jan. 2004
- [6]. Jere Kolehmainen, Jouni Ikäheimo, “Motors with Buried Magnets for Medium-Speed Application,” *IEEE Trans. Ener. Conv.*, vol. 23, n.1, pp. 86-91, Mar 2008.
- [7] Ayman M. EL-Rafale, Russell Manzke, Thomas M. Jahns “Application of bi-state magnetic material to automotive offset-coupled IPM starter/alternator machine” *IEEE Transactions in Magnetism*, May/June 2004
- [8] T. Lubin, S. Mezani, and A. Rezzoug. Improved Analytical Model for Surface-Mounted PM Motors Considering Slotting Effects and Armature Reaction. *Progress in Electromagnetics Research B*, Vol. 25, 293-314, 2010
- [9]. T. Lubin, S. Mezani, and A. Rezzoug. 2-D Exact Analytical Model for Surface-Mounted Permanent-Magnet Motors With Semi-Closed Slots. *IEEE Transactions on Magnetism*, Vol. 47, No. 2, February 2011.
- [10]. А.А. Афанасьев. Метод сопряжения конформных отображений в задачах электромеханики. Чебоксары, Издательство Чувашского университета, 2011.
- [11]. Курбатов П.А., Аринчин С.А. Численный расчет электромагнитных полей. М.: Энергоатомиздат, 1984. 168 с.