

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПЫТОВ ЭРСТЕДА И ФАРАДЕЯ

Гончаров В.И.

В начале XIX века ученый мир был увлечен поисками связи между электричеством и магнетизмом. К этому времени итальянским физиком Алессандро Вольта уже был изобретен источник постоянного (**непрерывного**) тока, было показано, что действие такого тока во многом аналогично действию разряда электростатических устройств и было также известно, что электрические разряды приводят иногда к изменению магнитных свойств тел. Как пишет в своей замечательной книге «Приключения великих уравнений» В.П. Карцев, взбудоражил умы молодой южанин из Перпиньяна Франсуа Доменик Араго, с упорством, достойным его земляка-мушкетера, стремившийся разгадать природу атмосферного электричества и собиравший по всему миру сведения о грозах, громах и молниях (в Интернете кроме названной книги В.П. Карцева и «записки» Араго, получившей в русском переводе название «Гром и молния», настоятельно рекомендуем почитать «Историю электротехники», Издательство МЭИ, 1999, коллектив авторов, под редакцией академика И.А. Глебова).

Возможно, бурное развитие науки об электричестве и магнетизме началось бы на пару десятилетий раньше, если бы научное сообщество не «прозевало» опыт итальянского юриста Джованни Д. Романьози, еще в 1802 году наблюдавшего действие **гальванического** тока на магнитную стрелку. Однако истории было угодно продлить поиски до 1820 г., когда датский профессор химии Ханс Кристиан Эрстед сообщил миру долгожданную весть: стрелка морского компаса отклонилась при протекании **вольтаического** электричества по лежащему на нем проводнику.

Попробуем воспроизвести опыт Эрстеда.

Проще всего поступить следующим образом. Из изолированного медного провода (подойдет эмалированный, применяемый для обмоток электрических машин и аппаратов) намотать **достаточно** длинную и **достаточно**

широкую катушку с **достаточным** числом витков (что значит «достаточно» в каждом случае, попробуйте определить **до** опыта), подключить катушку через ключ к **вольтову столбу** (роль последнего вполне может выполнить обычная батарейка) и, расположив компас возле **одной** из сторон катушки, наблюдать, что происходит со стрелкой каждый раз после замыкания ключа.

Трудности возникнут, когда Вы захотите **измерить** силу, действующую на стрелку – придется изготавливать весьма чувствительный динамометр. Не отчаивайтесь – вспомните, что великие экспериментаторы прошлого, среди которых особое место занимает наш соотечественник Петр Николаевич Лебедев, создавали установки, способные измерять силы, в тысячи раз меньшие.

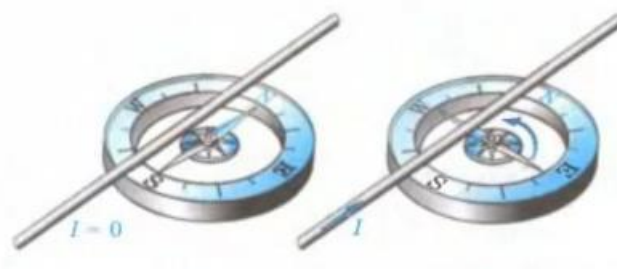


Рис. 1. Опыт Ханса Кристиана Эрстеда, июль 1820 года

Но прежде, чем проводить эксперимент, попробуем оценить возможности доступных нам математических моделей. Возможно, Вы помните, что еще Андре-Мари Ампер предложил рассматривать постоянные магниты как некоторые **эквивалентные** катушки с током. В том, что амперовские модели хорошо представляют постоянные магниты, нетрудно убедиться с помощью конечно-элементных моделей. Воспользовавшись, например, программой *FEMM*, можно смоделировать магнит (для начала простой формы – цилиндрический или в виде линейного стержня с прямоугольным сечением), а потом заменить его катушкой, намотанной тонким проводом на его поверхности. МДС катушки при этом следует задать равной произведению коэрцитивной силы магнита на его длину. При моделировании Вы легко убедитесь в

том, что различие в результатах двух опытов тем меньше, чем меньше толщина токового слоя эквивалентной катушки. Для отдельно рассматриваемого магнита идеализированная модель представляет собой два бесконечно тонких поверхностных токовых слоя. С другой стороны, как показано в вышедшей недавно монографии профессора А.А. Афанасьева («Аналитические и численные методы решения задач электромеханики на основе комплексного магнитного потенциала», Чебоксары, 2017), при анализе поля поверхностных магнитов, размещенных на втулке ротора и примыкающих друг к другу разноименными полюсами, толщина эквивалентных токовых слоев должна быть рассчитана по формуле, учитывающей свойства материала магнитов и основные размеры активной зоны.

Возможность заменить постоянный магнит эквивалентной катушкой с заданным в ней током позволяет, воспользовавшись суперпозицией (задача линейна!), рассчитать силу, действующую со стороны провода на магнитную стрелку компаса, как сумму сил взаимодействия тока провода с элементарными токами поверхностных слоев амперовской модели.

Задача заметно упрощается, если стрелка компаса располагается в плоскости, перпендикулярной проводу (см. рис. 2).

Объем вычислений и ход решения в значительной мере зависят от выбора системы координат. Поскольку в рассматриваемом процессе происходит вращение стрелки (или ее амперовской модели) вокруг собственной оси, начало координат системы целесообразно поместить именно на этой оси.

Область задачи показана на рис. 2. Задача плоская. В действительности структура опыта явно трехмерна, поскольку протяженность провода с током I в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка (по оси z), существенно больше толщины Δ_z стрелки-магнита. Эквивалентная катушка размещена на внешней поверхности стрелки, причем плоскость каждого витка перпендикулярна продольной (от полюса N к полюсу S) оси. Из рис. 3 видно, что силы, стремящиеся повернуть стрелку вокруг оси, создаются в результате взаимодействия тока I с элементарными токами, протекающими только по

сторонам катушки, расположенным на боковых гранях стрелки. Именно на этом основании задача может рассматриваться как плоская с глубиной моделирования Δ_z .

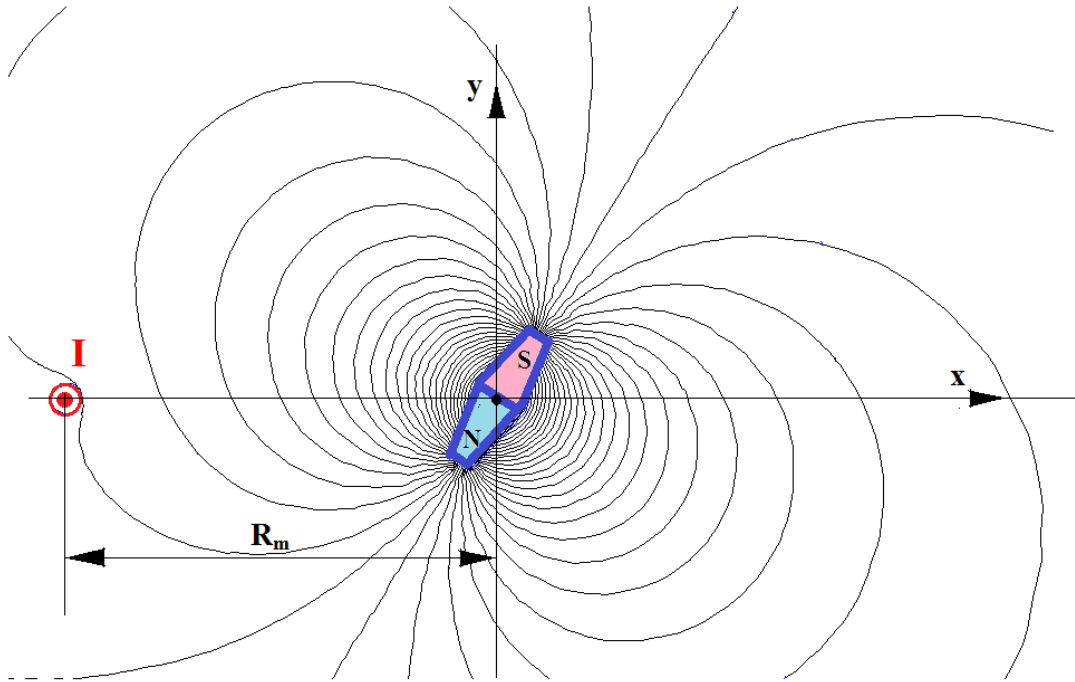


Рис. 2. Область задачи. Выбор системы координат

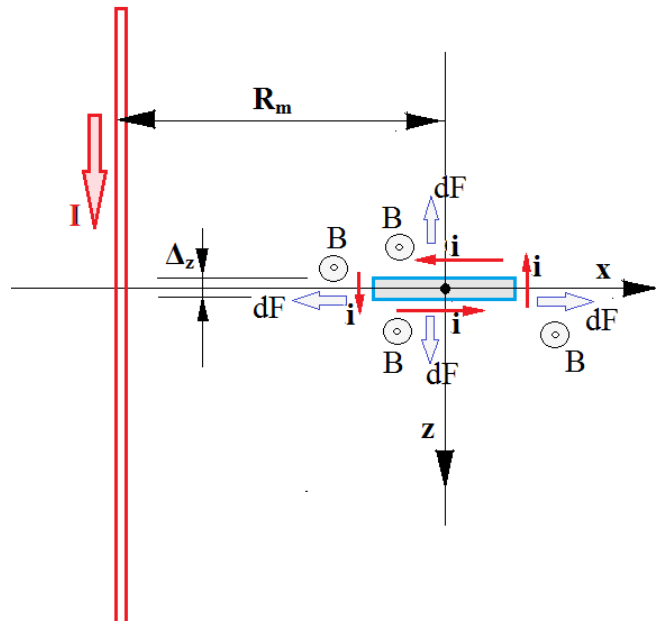


Рис. 3. Область задачи. Вид по оси y . Векторы индукции поля, созданного током провода, в плоскости xOz направлены перпендикулярно плоскости рисунка

Для того чтобы определить силу взаимодействия тока провода I и элементарного тока катушки i , необходимо рассчитать индукцию поля, создаваемого током I в месте расположения тока i . Расстояние между токами обозначим R_i . Учитывая, что геометрическим местом тока i (фиксированного относительно стрелки) при вращении стрелки является окружность, расстояние R_i и индукцию B_{I_ni} можно вычислить по довольно простым формулам.

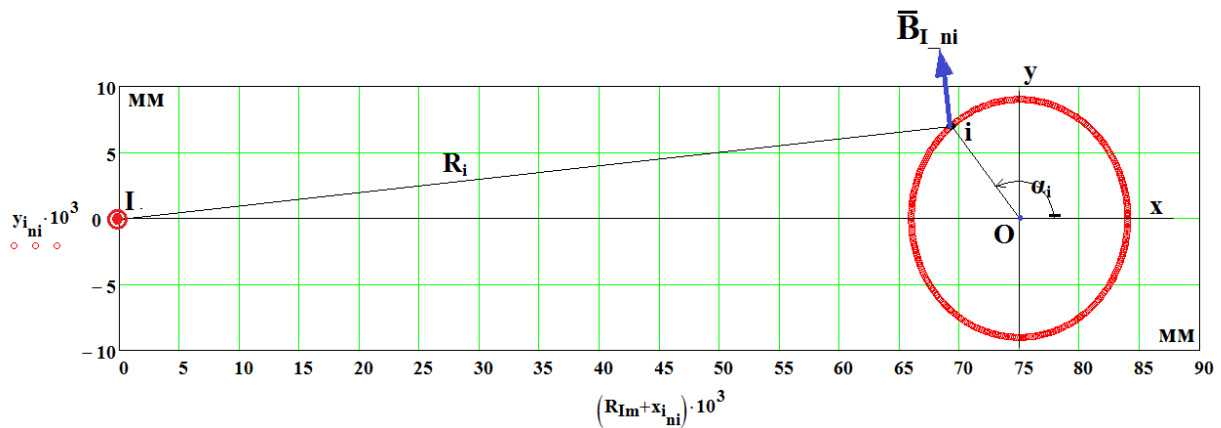


Рис. 4. К вычислению расстояния R_i и индукции B_{I_ni} для элемента i токового слоя при вращении стрелки вокруг оси

Приведенный ниже фрагмент *MathCAD* 'овского файла иллюстрирует вычисление указанных величин для фиксированного элемента токового слоя, имеющего при начальном положении стрелки, в котором ее продольная ось совпадает с осью y , координаты x_{i0} и y_{i0} . В этом примере принято, что магнит имеет прямоугольную форму.

Исходные данные:

Размеры магнита:

$$l_m := 30 \cdot \text{мм}$$

$$b_m := 10 \cdot \text{мм}$$

Расстояние от оси провода с током до оси магнита:

$$R_{Im} := 75 \cdot \text{мм}$$

Координаты начального положения элемента тока:

$$x_{i0} := b_m \cdot 0.5$$

$$y_{i0} := l_m \cdot 0.25$$

Вычисления:

Радиус окружности, по которой перемещается элемент тока при повороте магнита вокруг своей оси (длина радиус-вектора элемента тока):

$$r_{i0} := \sqrt{x_{i0}^2 + y_{i0}^2} \quad r_{i0} = 9.014 \cdot \text{мм}$$

Угол, определяющий начальное положение элемента тока (град.):

$$\alpha_{i0} := \text{atan}(y_{i0} \cdot x_{i0}^{-1}) \cdot (180 \cdot \pi^{-1}) \quad \alpha_{i0} = 56.31$$

Число положений при повороте магнита на 360 град.:

$$n_{i_max} := 360$$

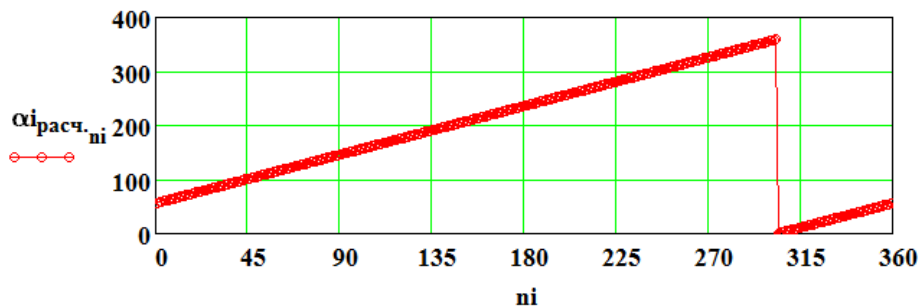
Значения угла поворота оси магнита (град.):

$$n_i := 1 .. n_{i_max}$$

$$\alpha_{ni} := n_i$$

Значения угловой координаты элемента тока при повороте магнита:

$$\alpha_{ni} := \alpha_{i0} + \alpha_{ni} \quad \alpha_{i_расч.\,ni} := \begin{cases} \alpha_{ni} & \text{if } \alpha_{ni} < 360 \\ ((\alpha_{ni} - 360)) & \text{otherwise} \end{cases}$$



Координаты рассматриваемого элемента тока после поворота на угол α_{ni} :

$$x_{i_{ni}} := r_{i0} \cdot \cos(\alpha_{i_расч.\,ni}) \quad y_{i_{ni}} := r_{i0} \cdot \sin(\alpha_{i_расч.\,ni})$$

Расстояние от оси провода с током до рассматриваемого элемента тока поверхностного токового слоя при повороте магнита вокруг своей оси:

$$R_{i_{ni}} := \sqrt{(R_{Im} + x_{i_{ni}})^2 + (y_{i_{ni}})^2}$$

Угол, определяющий положение вектора относительно отрезка прямой, соединяющего ось провода с осью магнита (град.):

$$\beta_{i_{ni}} := \text{atan} \left[\frac{y_{i_{ni}}}{(R_{Im} + x_{i_{ni}})} \right] \cdot \frac{180}{\pi}$$

Вычисление координат всех элементов i правого и левого токовых слоев эквивалентной катушки при начальном положении стрелки (имеющей форму двух трапеций с общим основанием) иллюстрируется следующим фрагментом текста:

Исходные данные:

Диаметр поперечного сечения провода	$d_I := 10 \cdot \text{мм}$
Плотность тока в проводе	$J_I := 10 \cdot \text{А} \cdot \text{мм}^{-2}$
Коэрцитивная сила магнита	$H_{cm} := 109.3 \cdot \text{кА} \cdot \text{м}^{-1}$
Длина стрелки	$L_m := 20 \cdot \text{мм}$
Расстояние от оси провода до оси магнитной стрелки	$R_{Im} := 75 \cdot \text{мм}$
Ширина стрелки у краев	$b1_m := 2.5 \cdot \text{мм}$
Ширина стрелки в средней части	$b2_m := 7.5 \cdot \text{мм}$
Толщина поверхностного токового слоя	$\Delta_i := 0.5 \cdot \text{мм}$
Длина боковой стороны полюса магнита	
$l_{pole_side} := 0.5 \cdot L_m \cdot \cos \left[\text{atan} \left[\frac{0.5 \cdot (b2_m - b1_m)}{0.5 \cdot L_m} \right] \right]^{-1}$	$l_{pole_side} = 10.308 \cdot \text{мм}$
Число элементов тока на боковой стороне магнита	$Ni_{p_s} := 30$
Длина элемента тока	
$li_{p_s} := l_{pole_side} \cdot Ni_{p_s}^{-1}$	$li_{p_s} = 0.343592 \cdot \text{мм}$
Ток одного элемента тока	
$i_{element} := H_{cm} \cdot li_{p_s}$	$i_{element} = 37.555 \text{ А}$
Суммарный ток поверхностного слоя (для справки):	
$\text{mod_I_layer} := i_{element} \cdot 2 \cdot Ni_{p_s}$	$\text{mod_I_layer} = 2253 \cdot \text{А}$
Толщина магнитной стрелки в направлении оси провода	$\Delta_{zm} := 2 \cdot \text{мм}$

Стрелка компаса в этой задаче представляется как две равнобедренные трапеции, сообщающиеся общим основанием. Боковая сторона полюса (т.е. боковая сторона трапеции), имеющая длину 10,308 мм, разделена на 30 участков, в центре каждого из которых задан элементарный ток i токового слоя амперовской модели стрелки-магнита.

Число пар элементов тока (число витков катушки - амперовской модели магнита)

$$\text{pair_i} := 2 \cdot \text{Ni}_{p_s}$$

$$\text{pair_i} = 60$$

Индекс пары элементов тока

$$\text{np} := 1 \dots \text{pair_i}$$

Угловая координата оси магнита в начальном положении

$$\alpha_{m_0} := 0$$

Угол наклона боковой стороны магнитной стрелки к ее оси (в градусах и в радианах)

$$\beta_{m_deg} := \text{atan} \left[\frac{0.5 \cdot (b_{2m} - b_{1m})}{0.5 \cdot L_m} \right] \cdot \frac{180}{\pi}$$

$$\beta_{m_deg} = 14.036$$

$$\beta_{m_rad} := \text{atan} \left[\frac{0.5 \cdot (b_{2m} - b_{1m})}{0.5 \cdot L_m} \right]$$

$$\beta_{m_rad} = 0.245$$

Расстояние между элементами тока по оси y системы координат магнита

$$\text{dlt_yi} := 0.5 \cdot L_m \cdot \text{Ni}_{p_s}^{-1}$$

$$\text{dlt_yi} = 0.333 \cdot \text{мм}$$

Координаты элементов тока в системе координат магнита при начальном положении магнита

$$\text{yi_0}_{np} := 0.5 \cdot L_m - [0.5 \cdot \text{dlt_yi} + \text{dlt_yi} \cdot (\text{np} - 1)]$$

$$\text{xi_0_lft}_{np} := \begin{cases} \left[-1 \cdot \left[(0.5 \cdot L_m - \text{yi_0}_{np}) \cdot \tan(\beta_{m_rad}) + 0.5 \cdot b_{1m} - 0.5 \cdot \Delta_i \cdot (\cos(\beta_{m_rad}))^{-1} \right] \right] & \text{if } \text{np} \leq \text{Ni}_{p_s} \\ \left[-1 \cdot \left[(-1) \cdot \left[(-1) \cdot \text{yi_0}_{np} \right] \cdot \tan(\beta_{m_rad}) \right] + 0.5 \cdot b_{2m} - 0.5 \cdot \Delta_i \cdot (\cos(\beta_{m_rad}))^{-1} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{xi_0_right}_{np} := (-1) \cdot \text{xi_0_lft}_{np}$$

$$\text{yi_0}^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 9.833 & 9.5 & 9.167 & 8.833 & 8.5 & \dots \\ \hline \end{array} \cdot \text{мм}$$

$$\text{xi_0_lft}^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & -1.034 & -1.117 & -1.201 & -1.284 & -1.367 & \dots \\ \hline \end{array} \cdot \text{мм}$$

$$\text{xi_0_right}^T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 1.034 & 1.117 & 1.201 & 1.284 & 1.367 & 1.451 & \dots \\ \hline \end{array} \cdot \text{мм}$$

Начальные (соответствующие нулевому положению оси магнита: $\alpha_m = 0$) угловые координаты элементов тока "правого" и "левого" токовых слоев амперовской модели магнитной стрелки компаса.

$$\alpha_{i_0_lft_np} := \begin{cases} \left[-\text{atan} \left[\text{xi_0_lft_np} \cdot (\text{yi_0_np})^{-1} \right] \right] & \text{if } np \leq \text{Ni}_{p_s} \\ \left[\pi - \text{atan} \left[\text{xi_0_lft_np} \cdot (\text{yi_0_np})^{-1} \right] \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\alpha_{i_0_lft_deg_np} := \begin{cases} \left[-\text{atan} \left[\text{xi_0_lft_np} \cdot (\text{yi_0_np})^{-1} \right] \right] \cdot (180 \cdot \pi^{-1}) & \text{if } np \leq \text{Ni}_{p_s} \\ \left[\pi - \text{atan} \left[\text{xi_0_lft_np} \cdot (\text{yi_0_np})^{-1} \right] \right] \cdot (180 \cdot \pi^{-1}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

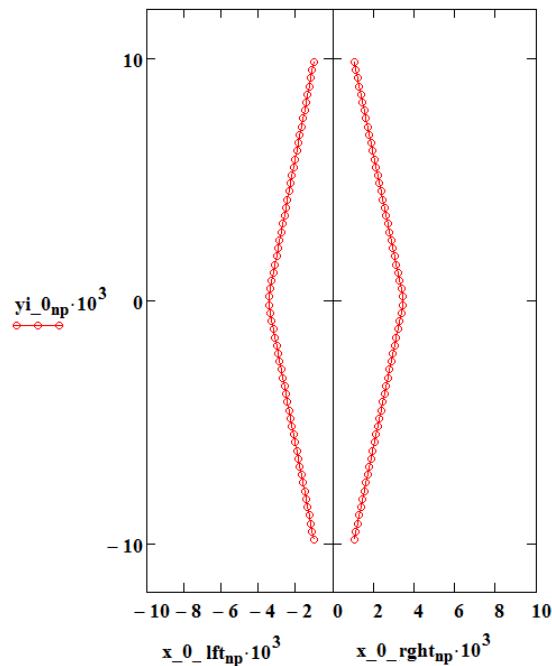
$$\alpha_{i_0_rght_np} := \begin{cases} \left[-\text{atan} \left[\text{xi_0_rght_np} \cdot (\text{yi_0_np})^{-1} \right] \right] & \text{if } np \leq \text{Ni}_{p_s} \\ \left[-\pi - \text{atan} \left[\text{xi_0_rght_np} \cdot (\text{yi_0_np})^{-1} \right] \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\alpha_{i_0_rght_deg_np} := \begin{cases} \left[-\text{atan} \left[\text{xi_0_rght_np} \cdot (\text{yi_0_np})^{-1} \right] \right] \cdot (180 \cdot \pi^{-1}) & \text{if } np \leq \text{Ni}_{p_s} \\ \left[-\pi - \text{atan} \left[\text{xi_0_rght_np} \cdot (\text{yi_0_np})^{-1} \right] \right] \cdot (180 \cdot \pi^{-1}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Модули (длины) радиус-векторов элементов тока в системе координат магнитной стрелки:

$$r_{i_0_lft_np} := \sqrt{(\text{xi_0_lft_np})^2 + (\text{yi_0_np})^2}$$

$$r_{i_0_rght_np} := \sqrt{(\text{xi_0_rght_np})^2 + (\text{yi_0_np})^2}$$



Алгоритм, позволяющий рассчитать момент, действующий на магнитную стрелку со стороны провода с током при фиксированном угловом положении стрелки, приведен ниже.

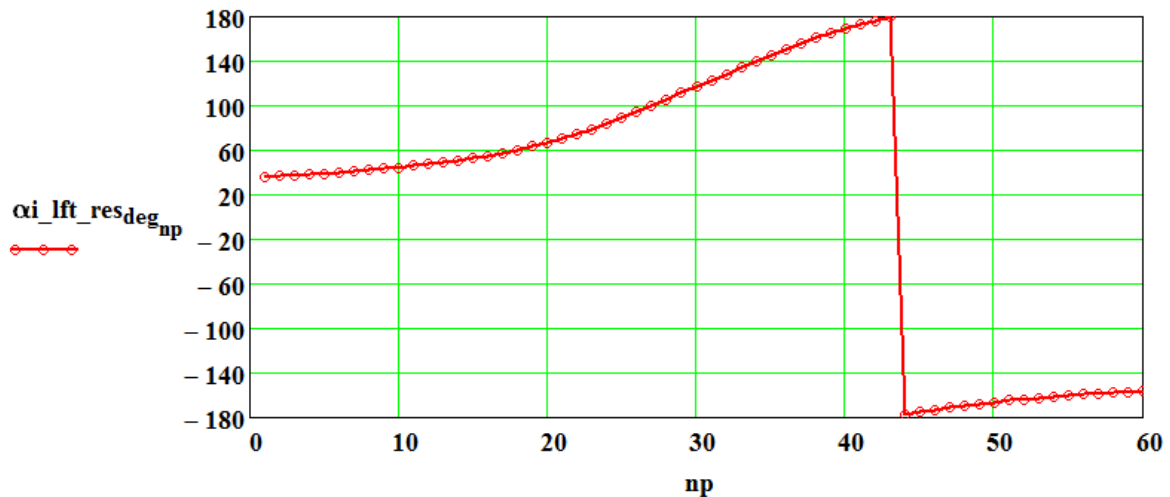
Зададимся угловым положением оси магнитной стрелки (угол равен нулю, если ось стрелки параллельна положительному направлению оси y системы координат стрелки, положительным значениям угла соответствует смещение оси стрелки от нулевого положения против часовой стрелки, отрицательным - по часовой стрелке)

$$\alpha_{m_deg} := 30 \quad \alpha_{m_rad} := \alpha_{m_deg} \cdot \pi \cdot 180^{-1} \quad \alpha_{m_rad} = 0.524$$

$$\alpha_{i_lft_sum_rad_np} := \alpha_{m_rad} + \alpha_{i_0_lft_np}$$

$$\alpha_{i_lft_res_rad_np} := \begin{cases} \alpha_{i_lft_sum_rad_np} & \text{if } 0 \leq \alpha_{i_lft_sum_rad_np} \leq \pi \\ [(-1) \cdot (2 \cdot \pi - \alpha_{i_lft_sum_rad_np})] & \text{if } \pi < \alpha_{i_lft_sum_rad_np} \leq 2 \cdot \pi \\ (\alpha_{i_lft_sum_rad_np} - 2 \cdot \pi) & \text{if } 2 \cdot \pi < \alpha_{i_lft_sum_rad_np} \leq 3 \cdot \pi \\ \alpha_{i_lft_sum_rad_np} & \text{if } 0 > \alpha_{i_lft_sum_rad_np} \geq (-1) \cdot \pi \\ 2 \cdot \pi + \alpha_{i_lft_sum_rad_np} & \text{if } (-1) \cdot \pi > \alpha_{i_lft_sum_rad_np} \geq (-1) \cdot 2 \cdot \pi \\ 2 \cdot \pi + \alpha_{i_lft_sum_rad_np} & \text{if } (-1) \cdot 2 \cdot \pi > \alpha_{i_lft_sum_rad_np} \geq (-1) \cdot 3 \cdot \pi \end{cases}$$

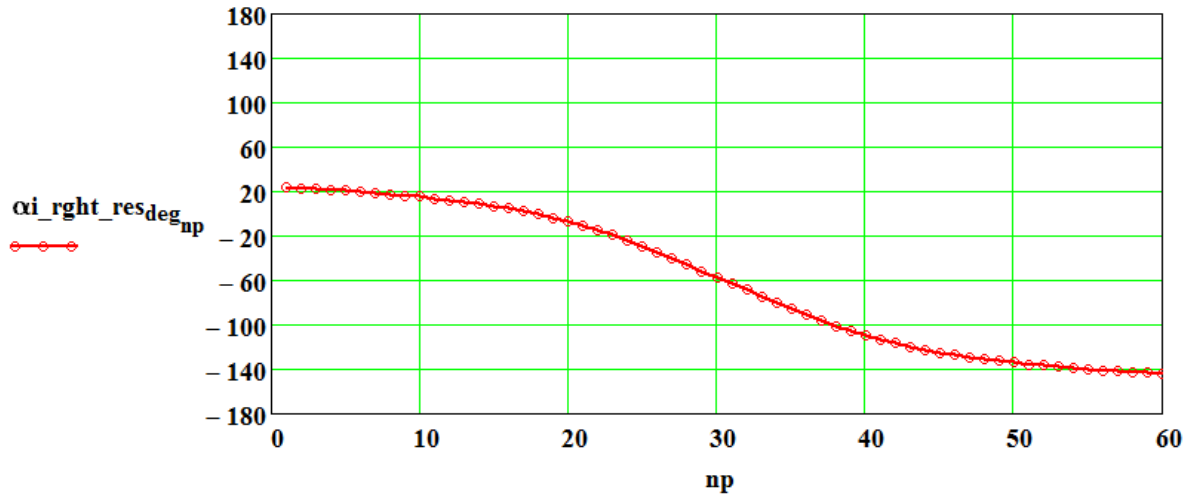
$$\alpha_{i_lft_res_deg_np} := \alpha_{i_lft_res_rad_np} \cdot 180 \cdot \pi^{-1}$$



$$\alpha_{i_right_sum_rad_np} := \alpha_{m_rad} + \alpha_{i_0_right_np}$$

$$\alpha_{i_right_res_rad_np} := \begin{cases} \alpha_{i_right_sum_rad_np} & \text{if } 0 \leq \alpha_{i_right_sum_rad_np} \leq \pi \\ \left[(-1) \cdot (2 \cdot \pi - \alpha_{i_right_sum_rad_np}) \right] & \text{if } \pi < \alpha_{i_right_sum_rad_np} \leq 2 \cdot \pi \\ (\alpha_{i_right_sum_rad_np} - 2 \cdot \pi) & \text{if } 2 \cdot \pi < \alpha_{i_right_sum_rad_np} \leq 3 \cdot \pi \\ \alpha_{i_right_sum_rad_np} & \text{if } 0 > \alpha_{i_right_sum_rad_np} \geq (-1) \cdot \pi \\ 2 \cdot \pi + \alpha_{i_right_sum_rad_np} & \text{if } (-1) \cdot \pi > \alpha_{i_right_sum_rad_np} \geq (-1) \cdot 2 \cdot \pi \\ 2 \cdot \pi + \alpha_{i_right_sum_rad_np} & \text{if } (-1) \cdot 2 \cdot \pi > \alpha_{i_right_sum_rad_np} \geq (-1) \cdot 3 \cdot \pi \end{cases}$$

$$\alpha_{i_right_res_deg_np} := \alpha_{i_right_res_rad_np} \cdot 180 \cdot \pi^{-1}$$



Координаты токовых элементов в системе координат стрелки компаса после ее поворота на угол α_m

$$\begin{aligned} x_{i_lft_np} &:= (-1) \cdot r_{i_0_lft_np} \cdot \sin(\alpha_{i_lft_res_rad_np}) & x_{i_right_np} &:= (-1) \cdot r_{i_0_right_np} \cdot \sin(\alpha_{i_right_res_rad_np}) \\ y_{i_lft_np} &:= (-1) \cdot x_{i_lft_np} \cdot \tan(\alpha_{i_lft_res_rad_np})^{-1} & y_{i_right_np} &:= (-1) \cdot x_{i_right_np} \cdot \tan(\alpha_{i_right_res_rad_np})^{-1} \end{aligned}$$

Угловые координаты радиус-векторов элементов токов. Радиус-векторы имеют начало на оси провода с током. Угловые координаты β_i радиус-векторов положительны, если углы α_i элементов тока находятся в первом и втором квадрантах системы координат магнита и отрицательны, если углы α_i находятся в третьем и четвертом квадрантах этой системы координат.

$$\beta_{i_lft_rad_{np}} := \text{atan}\left[y_{i_lft_{np}} \cdot (R_{Im} + x_{i_lft_{np}})^{-1}\right]$$

$$\beta_{i_lft_deg_{np}} := \beta_{i_lft_rad_{np}} \cdot 180 \cdot \pi^{-1}$$

$$\beta_{i_rght_rad_{np}} := \text{atan}\left[y_{i_rght_{np}} \cdot (R_{Im} + x_{i_rght_{np}})^{-1}\right]$$

$$\beta_{i_rght_deg_{np}} := \beta_{i_rght_rad_{np}} \cdot 180 \cdot \pi^{-1}$$

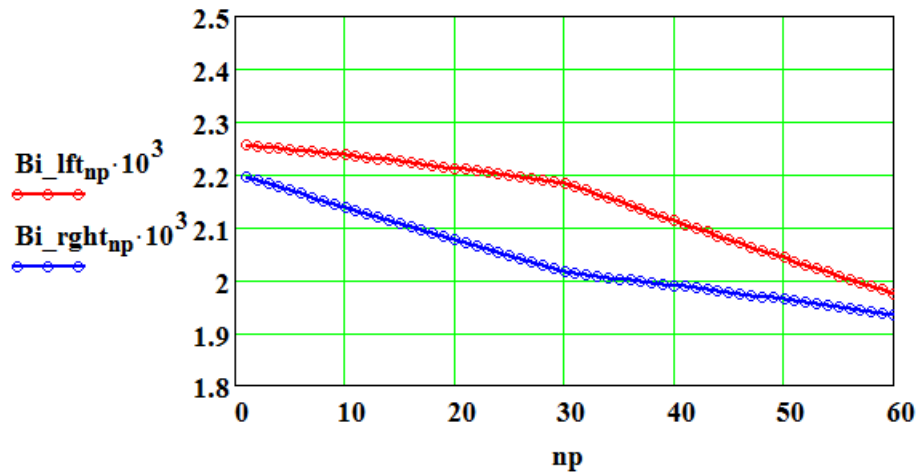
Модули векторов индукции поля, созданного током провода в центрах сечений элементов тока токовых слоев:

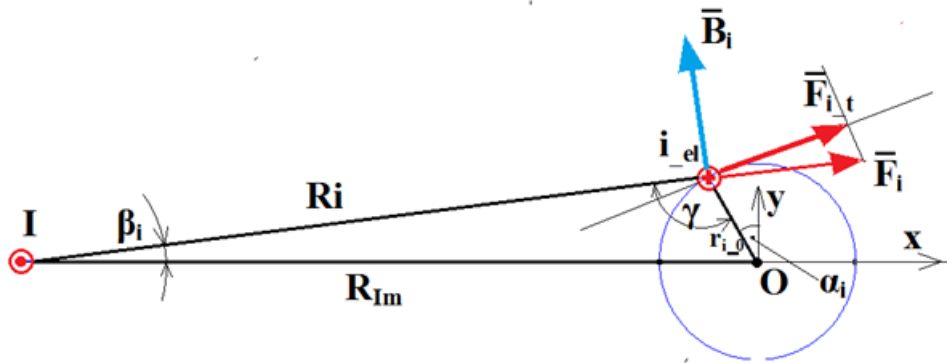
$$Bi_lft_{np} := \mu_0 \cdot (0.25 \cdot \pi \cdot d_I^2 \cdot J_I) \cdot (2 \cdot \pi \cdot Ri_lft_{np})^{-1}$$

$$Bi_rght_{np} := \mu_0 \cdot (0.25 \cdot \pi \cdot d_I^2 \cdot J_I) \cdot (2 \cdot \pi \cdot Ri_rght_{np})^{-1}$$

$$Bi_lft^T = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2.255 \cdot 10^{-3} & 2.253 \cdot 10^{-3} & 2.252 \cdot 10^{-3} & \dots \end{array} \cdot Tл$$

$$Bi_rght^T = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2.195 \cdot 10^{-3} & 2.189 \cdot 10^{-3} & 2.183 \cdot 10^{-3} & \dots \end{array} \cdot Tл$$





Решение треугольников типа IOi_el и вычисление вращающих моментов, действующих на элементы поверхностных токовых слоев

Полупериметры и радиусы вписанных окружностей треугольников:

$$pi_lft_{np} := 0.5 \cdot (R_{Im} + R_{i_lft_{np}} + r_{i_0_lft_{np}})$$

$$r_int_lft_{np} := \sqrt{\frac{(pi_lft_{np} - R_{Im}) \cdot (pi_lft_{np} - R_{i_lft_{np}}) \cdot (pi_lft_{np} - r_{i_0_lft_{np}})}{pi_lft_{np}}}$$

$$pi_rght_{np} := 0.5 \cdot (R_{Im} + R_{i_rght_{np}} + r_{i_0_rght_{np}})$$

$$r_int_rght_{np} := \sqrt{\frac{(pi_rght_{np} - R_{Im}) \cdot (pi_rght_{np} - R_{i_rght_{np}}) \cdot (pi_rght_{np} - r_{i_0_rght_{np}})}{pi_rght_{np}}}$$

Углы γ треугольников типа IOi_el:

$$\gamma_{i_lft_rad_{np}} := 2 \cdot \text{atan}\left(\frac{r_int_lft_{np}}{pi_lft_{np} - R_{Im}}\right) \quad \gamma_{i_lft_deg_{np}} := \gamma_{i_lft_rad_{np}} \cdot 180 \cdot \pi^{-1}$$

$$\gamma_{i_rght_rad_{np}} := 2 \cdot \text{atan}\left(\frac{r_int_rght_{np}}{pi_rght_{np} - R_{Im}}\right) \quad \gamma_{i_rght_deg_{np}} := \gamma_{i_rght_rad_{np}} \cdot 180 \cdot \pi^{-1}$$

$$r_int_rght^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	
1	4.331	4.215	4.1	3.984	3.868	3.752	...	MM

$$r_int_lft^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	
1	3.882	3.728	3.574	3.418	3.263	3.106	...	MM

Ток и модуль тока провода:

$$I_{\text{wire}} := 0.25 \cdot \pi \cdot d_I^2 \cdot J_I \quad I_{\text{wire}} = 785.398 \text{ A}$$

$$\text{mod_I}_{\text{wire}} := |I_{\text{wire}}| \quad \text{mod_I}_{\text{wire}} = 785.398 \text{ A}$$

Модули индукции поля, созданного током провода в месте нахождения элементов токов поверхностных слоев:

$$\text{mod_Bi_lft}_{\text{np}} := \mu_0 \cdot \text{mod_I}_{\text{wire}} \cdot (2 \cdot \pi \cdot \text{Ri_lft}_{\text{np}})^{-1}$$

$$\text{mod_Bi_rght}_{\text{np}} := \mu_0 \cdot \text{mod_I}_{\text{wire}} \cdot (2 \cdot \pi \cdot \text{Ri_rght}_{\text{np}})^{-1}$$

Модуль тока элемента токового слоя

$$\text{mod_i} := |i_{\text{element}}| \quad \text{mod_i} = 37.555 \text{ A}$$

Модули полных сил, действующих на элементы токов:

$$\text{mod_Fi_lft}_{\text{np}} := \text{mod_Bi_lft}_{\text{np}} \cdot \text{mod_i} \cdot \Delta_{\text{zm}} \quad \Delta_{\text{zm}} = 2 \cdot \text{мм}$$

$$\text{mod_Fi_rght}_{\text{np}} := \text{mod_Bi_rght}_{\text{np}} \cdot \text{mod_i} \cdot \Delta_{\text{zm}}$$

Модули тангенциальных составляющих полных сил:

$$\text{mod_Fi_t_lft}_{\text{np}} := \text{mod_Fi_lft}_{\text{np}} \cdot \sin(\gamma_{\text{i_lft_rad}_{\text{np}}})$$

$$\text{mod_Fi_t_rght}_{\text{np}} := \text{mod_Fi_rght}_{\text{np}} \cdot \sin(\gamma_{\text{i_rght_rad}_{\text{np}}})$$

Модули вращающих моментов, действующих на элементы токов:

$$\text{mod_Trq_i_lft}_{\text{np}} := \text{ri_0_lft}_{\text{np}} \cdot \text{mod_Fi_t_lft}_{\text{np}}$$

$$\text{mod_Trq_i_rght}_{\text{np}} := \text{ri_0_rght}_{\text{np}} \cdot \text{mod_Fi_t_rght}_{\text{np}}$$

Знаки тока провода и элементов токов поверхностных слоев:

$$i_{\text{el_lft}} := i_{\text{element}} \quad i_{\text{el_lft}} = 37.555 \text{ A}$$

$$i_{\text{el_rght}} := (-1) \cdot i_{\text{element}} \quad i_{\text{el_rght}} = -37.555 \text{ A}$$

$$\text{sign}(I_{\text{wire}}) = 1 \quad \text{sign}(i_{\text{el_lft}}) = 1 \quad \text{sign}(i_{\text{el_rght}}) = -1$$

Вращающие моменты, действующие на элементы токовых слоев:

$$\text{Trq_i_lft}_{np} := \begin{cases} \text{mod_Trq_i_lft}_{np} & \text{if } 0 \leq \alpha_{i_lft_res_{rad}_{np}} \leq 0.5 \cdot \pi \\ \text{mod_Trq_i_lft}_{np} & \text{if } 0 \geq \alpha_{i_lft_res_{rad}_{np}} \geq (-1) \cdot 0.5 \cdot \pi \\ [(-1) \cdot \text{mod_Trq_i_lft}_{np}] & \text{if } 0.5 \cdot \pi \leq \alpha_{i_lft_res_{rad}_{np}} \leq \pi \\ [(-1) \cdot \text{mod_Trq_i_lft}_{np}] & \text{if } (-1) \cdot 0.5 \cdot \pi \geq \alpha_{i_lft_res_{rad}_{np}} \geq (-1) \cdot \pi \end{cases}$$

$$\text{Trq_i_rght}_{np} := \begin{cases} (-1 \cdot \text{mod_Trq_i_rght})_{np} & \text{if } 0 \leq \alpha_{i_rght_res_{rad}_{np}} \leq 0.5 \cdot \pi \\ (-1 \cdot \text{mod_Trq_i_rght})_{np} & \text{if } 0 \geq \alpha_{i_rght_res_{rad}_{np}} \geq (-1) \cdot 0.5 \cdot \pi \\ (\text{mod_Trq_i_rght}_{np}) & \text{if } 0.5 \cdot \pi \leq \alpha_{i_rght_res_{rad}_{np}} \leq \pi \\ (\text{mod_Trq_i_rght}_{np}) & \text{if } (-1) \cdot 0.5 \cdot \pi \geq \alpha_{i_rght_res_{rad}_{np}} \geq (-1) \cdot \pi \end{cases}$$

Суммарный вращающий момент, действующий на стрелку:

$$\text{Trq_summ} := \sum_{np=1}^{60} (\text{Trq_i_lft}_{np} + \text{Trq_i_rght}_{np}) \quad \text{Trq_summ} = -2.067 \times 10^{-5} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}$$

$$\text{Trq_summ_lft} := \sum_{np=1}^{60} (\text{Trq_i_lft}_{np}) \quad \text{Trq_summ_lft} = -7.339 \times 10^{-6} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}$$

$$\text{Trq_summ_rght} := \sum_{np=1}^{60} (\text{Trq_i_rght}_{np}) \quad \text{Trq_summ_rght} = -1.334 \times 10^{-5} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}$$

Приведенный пример показывает, что, несмотря на чрезвычайно простую идею, положенную в основу решения задачи (не требуется ничего кроме знания формулы Ампера для расчета силы взаимодействия двух токов, умения применить закон полного тока и элементарных школьных познаний в тригонометрии), алгоритм получается все-таки довольно сложным и объем вычислений значительным. С другой стороны, несомненно положительным результатом проделанной работы является то, что задача решена в достаточно общем виде, позволяющем, варьируя исходные данные, получать решения для объектов различной формы и для магнитных материалов, обладающих различными характеристиками.

Ясно, что описанный алгоритм можно продолжить, добавив расчет углового перемещения стрелки, учтя при этом трение в опоре и момент инерции.

Посмотрим, однако, какие возможности для решения этой задачи предоставляет конечно-элементное моделирование. Воспользуемся программой *FEMM* и сравним результаты моделирования с аналитическими расчетами.

Сформировать конечно-элементную модель в этом случае весьма просто. Следует только убедиться в том, что внешняя граница достаточно удалена и ее влияние на поле в месте расположения стрелки-магнита мало.

Вначале смоделируем задачу, решение которой приведено выше, т.е. будем определять момент, действующий не на магнитную стрелку, изготовленную из сплава Альнико-8 (коэрцитивная сила, заданная в расчете, соответствует именно этому материалу), а на два токовых слоя («левый» и «правый») каждый из которых имеет толщину 0,5 мм и плотность тока 218,6 А/мм² (полный ток каждого слоя равен 2251,58 А, что практически совпадает с заданным током 2253 А). Угол между осью стрелки и вертикалью принят равным 30 град. Относительная магнитная проницаемость объема, занимаемого стрелкой, принята равной единице, что также соответствует условиям аналитического решения.

Значение действующего на стрелку момента, определенное на конечно-элементной модели при указанных условиях, с хорошей точностью совпадает с результатом аналитического расчета – оно равно $2,0601 \cdot 10^{-5}$ Нм. Расхождение, таким образом, составляет всего 0,36%.

Однако если при конечно-элементном моделировании задать не амперовскую катушку, а «полноценную» модель магнита из Альнико-8, расхождение результатов будет значительно большим: измеренный на модели момент, действующий на стрелку, возрастет до $7,0674 \cdot 10^{-5}$ Нм. Объяснить это можно тем, что сплавы Альнико имеют довольно большую относительную магнитную проницаемость – по данным из таблицы материалов программы

FEMM – 6,678. Если при моделировании в описанной амперовской модели проницаемость внутреннего объема задать равной этому числу, измеренный момент возрастет до $5,8958 \cdot 10^{-5}$ Нм и различие в результатах составит 16,6%. Дальнейшее сближение результатов наблюдается при последовательном уменьшении толщины токовых слоев амперовской модели (при сохранении полных токов слоев) – до 0,25 и до 0,125 мм – расхождение уменьшается до 11,6% и до 9,2% соответственно.

Заметим, что при моделировании высококоэрцитивных магнитов, носительная магнитная проницаемость которых близка к единице, расхождение в результатах моделирования и аналитического расчета заметно меньше.

Использование сценариев, написанных на языке *Lua*, позволяет при конечно-элементном моделировании с помощью программы *FEMM* рассчитать тот или иной временной процесс. Приведем пример расчета траектории движения стрелки в опыте Х.К. Эрстеда с учетом ее массы, т.е. момента инерции. Трением в опоре, однако, пренебрежем.

Сценарий расчета временного процесса:

---Определение адреса текстового файла, в который могут записываться результаты численного эксперимента

```
outfile_2 = "c:\\MyFEMMfiles\\ ... \\Oersted_tst_2.txt"
```

---Рассматриваемый интервал процесса задается:

```
t_end=1----сек
```

---Число временных интервалов и шаг по времени:

```
N_dt=100
```

```
dt=t_end/N_dt
```

---Вычисление массы и момента инерции стрелки:

-----толщина стрелки, ее длина, наименьшая и наибольшая ширина:

```
dlt_z=2----мм
```

```
L_m=20----мм
```

```
b_m_min=2.5----мм
```

b_m_max=7.5----мм

-----удельная плотность материала, объем и масса стрелки:

dens_m=7500----кг/м³

Vol_m=2*0.5*(b_m_min+ b_m_max)*L_m* dlt_z*10⁻⁹----м³

M_m=dens_m*Vol_m----кг

-----момент инерции стрелки относительно ее оси приближенно примем равным моменту инерции тонкого стержня массой M_m и длиной L_m:

J_m=(M_m*(L_m*10⁻³)²)/12----кг*м²

print("M_m = ",M_m,"J_m = ",J_m)

---Цикл вычислений при расчете временного процесса

-----начальные значения номера шага, времени, углового положения (отсчитывается от оси ординат против часовой стрелки) и угловой скорости магнита:

step=0

t=0

alpha_0=45---- градусов

alpha_frm=alpha_0

omega_0=0

omega_frm=omega_0

-----начало цикла:

while t<= t_end do

step=step+1

t=t+dt

-----решить задачу, перейти в режим постпроцессора, выделить группу блоков, определить вращающий момент (относительно начала координат), снять выделение:

mi_analyze()

mi_loadsolution()

mo_groupselectblock(10)

trq=mo_blockintegral(22)

mo_clearblock()

-----приращение угловой скорости и скорость на рассматриваемом интервале:

d_omega=(trq/J_m)*dt

omega_t=omega_frm+d_omega

-----приращение угловой координаты и угол на рассматриваемом интервале:

d_alpha=omega_t*dt

alpha_t=alpha_frm+d_alpha

-----открыть файл записи результатов (пополняемый), записать номер шага и значение момента, закрыть файл записи результатов:

```
handle=openfile(outfile_2,"a")
write(handle,step," ",t," ",alpha_t," ",omega_t," ",trq,"\\n")
closefile(handle)
```

-----выделить группу. Повернуть стрелку вокруг оси на d_alpha:

```
mi_selectgroup(10)
mi_moverotate(0,0,d_alpha,(4))
```

-----печать в консоль:

```
print("step = ",step,"trq = ",trq,"alpha_t = ",alpha_t)
```

-----сохранение значений угловой скорости и угла:

```
omega_frm=omega_t
alpha_frm=alpha_t
```

-----возвращение к началу цикла, если заданный временной интервал не рассмотрен полностью, в противном случае – окончание цикла.

end---конец основного цикла

```
print("END");
```

Графики зависимостей, построенные в *MathCAD*'е по результатам моделирования, показаны на рис. 5.

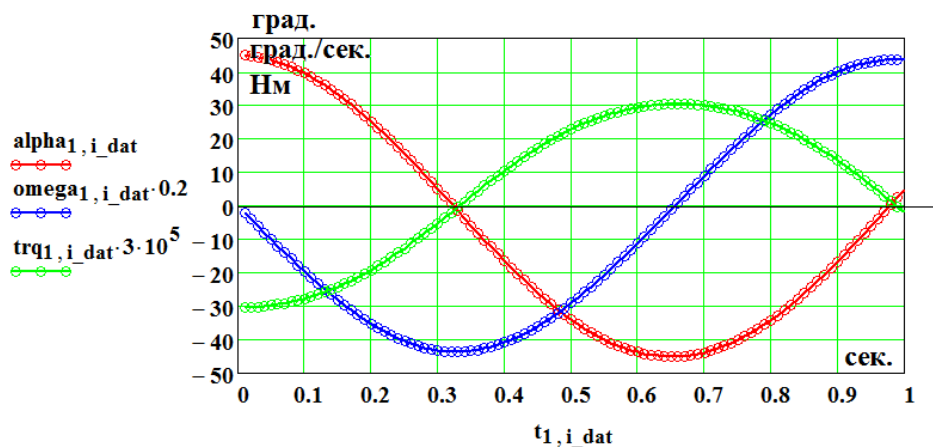


Рис. 5. Зависимости углового положения стрелки, угловой скорости ее вращения вокруг собственной оси под действием силы, создаваемой полем тока провода, и момента, действующего на стрелку