

## Раздел 1. Простейшая электрическая машина

Наша конечная цель – найти методы электромагнитного расчета электрических машин. Это означает, что при заданных условиях взаимодействия машины с сетью (или с автономной нагрузкой) и с источником (или потребителем) механической мощности мы должны рассчитать *ЭДС и падения напряжения в обмотках машины, распределение индукции в магнитной цепи, потери в меди и в стали, коэффициент мощности ( $\cos\phi$ ) и КПД, электромагнитные силы, действующие в машине, электромагнитный момент и электромагнитную мощность*. При этом необходимо учесть такие сложные нелинейные явления, как *насыщение стали и поверхностный эффект* в массивных электропроводящих элементах конструкции

Электромагнитный расчет электрической машины можно рассматривать как задачу о нахождении электромагнитного поля. Для краткости в дальнейшем будем иногда называть такие задачи *полевыми*.

При современном уровне развития математики и вычислительной техники решение полевых задач стало обычной инженерной практикой. Более того, современные программные комплексы, такие как *ANSYS*, *COMSOL* и некоторые другие, позволяют решать так называемые *связанные* полевые задачи, в которых одновременно рассчитываются различные физические поля: электромагнитные, тепловые, поле механических напряжений, причем учитывается взаимное влияние этих полей друг на друга. Здесь, однако, следует заметить, что решение в этом случае достигается *численными методами* и результаты решения представляются в виде распределений *величин поля* (индукции, плотности тока, температуры, удельных сил и механических напряжений) в области задачи. По существу, такое решение задачи можно назвать *численным экспериментом*, по аналогии с *физическим экспериментом* на реальном объекте. Надо сказать, что в последнее время численный эксперимент часто заменяет собой испытания опытных образцов проектируемых электрических машин.

Никак не умаляя достоинств *численных моделей* и численных методов решения полевых задач, следует сказать, что для построения полной и стройной теории электрических машин их явно недостаточно.

Обратимся к другому рода моделям – *аналитическим*, позволяющим находить характеристики электрических машин путем решения *алгебраических и/или дифференциальных уравнений*, включающих в себя в качестве коэффициентов *параметры* машин. Под параметрами электрических машин обычно понимают величины, относящиеся к некоторым эквивалентным *электрическим цепям*, с большей или меньшей точностью представляющим рассматриваемое электротехническое устройство, объемное, с довольно сложной конструкцией, со сложными нелинейными свойствами материалов, из которых изготовлены *активные части* машины и детали конструкции.

Таким образом, первым шагом на пути формирования аналитической модели является представление реальной электрической машины в виде, позволяющем заменить ее эквивалентной электрической цепью, обладающей *параметрами* – активными сопротивлениями, индуктивностями и емкостями. Как и всякое эквивалентирование (другими словами, *моделирование*) замена реальной электрической машины ее электрической моделью требует принятия определенных *допущений*. При этом чем проще должна выглядеть модель, тем более жесткие (иногда говорят *грубые*) допущения должны быть приняты.

В этом разделе мы рассмотрим так называемую *простейшую* электрическую машину. Результатом этого рассмотрения будут аналитические выражения, по которым мы сможем определить параметры электрической цепи, представляющей машину и некоторые наиболее важные характеристики самой машины.

## Допущения

1. Первым и очень важным допущением, к которому мы неоднократно будем прибегать в дальнейшем при изучении аналитических методов решения полевых задач, является допущение о *бесконечной магнитной проницаемости стали* сердечников машины. Это допущение не только переводит рассматриваемую полевую задачу в разряд *линейных*, но и позволяет ограничиться рассмотрением магнитного поля только в немагнитном пространстве (наибольший интерес представляет *распределение поля в воздушном зазоре* машины).

Следует заметить, что в машинах с не очень сильно насыщенной сталью сердечников это допущение не приводит к большому отличию от точного решения, учитывающего реальные свойства стали. Оценить погрешность, обусловленную допущением о бесконечной магнитной проницаемости стали, можно путем численного эксперимента, выполненного, например, с помощью конечно-элементной программы *FEMM*.

2. Примем теперь ряд допущений, касающихся конструкции простейшей электрической машины.

2.1. Будем считать, что сердечники статора и ротора имеют цилиндрическую форму, а зазор между сердечниками, во-первых, достаточно мал, и, во-вторых, равномерен, т.е. одинаков по любому радиальному направлению поперечного сечения машины. *Раскрытия пазов*, в которых размещены обмотки статора и ротора машины, также будем считать достаточно малыми.

В реальных машинах зазор между статором и ротором имеет, как правило, сложную форму, что обусловлено *зубчатостью* одного или обоих сердечников. Учету неравномерности воздушного зазора электрических машин в нашем курсе будет посвящен специальный раздел.

2.2. На одном из сердечников рассматриваемой нами простейшей электрической машины расположена *обмотка возбуждения*, обтекае-

мая постоянным током и создающая магнитное поле, которое правильно называть *полем обмотки возбуждения*. Это поле *сцепляется* не только с собственной обмоткой, но и с обмоткой *якоря*, расположенной в рассматриваемом случае на втором сердечнике (имеются машины, в которых обе обмотки помещаются на одном сердечнике). Если потокосцепление обмотки якоря с полем возбуждения изменяется во времени (например, при относительном перемещении сердечников), то в обмотке якоря возникает ЭДС взаимной индукции, и, если эта обмотка замкнута на нагрузку, то по ней будет протекать ток. Этот ток создает свое магнитное поле, называемое *полем якоря*, которое, складываясь с полем возбуждения, образует *результатирующее магнитное* поле машины.

При рассмотрении простейшей электрической машины будем считать, что ток обмотки якоря мал (точнее, мала ее МДС) и искажения поля возбуждения не происходит.

Вопросы, связанные с влиянием поля якоря на поле возбуждения (часто говорят *поле индуктора*) рассматриваются в общем курсе «Электрические машины» в разделах, посвященных машинам постоянного тока и синхронным машинам.

2.3. Еще одно допущение, связанное с формированием модели, названной нами простейшей электрической машиной, состоит в следующем. Будем считать, что поле в *активной зоне* машины (т.е. в зоне главного рабочего поля) плоскопараллельно. Это означает, что картина магнитного поля в любом поперечном сечении активной зоны одинакова.

В действительности так бывает далеко не всегда. Довольно часто, для того чтобы уменьшить пульсации поля и электромагнитного момента, обусловленные зубчатостью, сердечники машины делают скошенными друг относительно друга, например, в асинхронных двигателях часто выполняют скос ротора на одно зубцовое деление статора.

Считая поле простейшей машины плоскопараллельным, исключим из рассмотрения *поле лобовых частей* обмоток. Это допущение не приводит к

большой погрешности, если длина активной зоны заметно больше *диаметра расточки* («длинные» машины), а лобовые части относительно коротки.

В реальных машинах, как правило, поле лобовых частей подлежит обязательному учету, поскольку с ним связан такой важный параметр, как индуктивность рассеяния.

### Определение зависимости потокосцеплений обмоток от взаимного положения сердечников

Конструкция простейшей электрической машины, отвечающей принятым допущениям, показана на рис. 1.1.

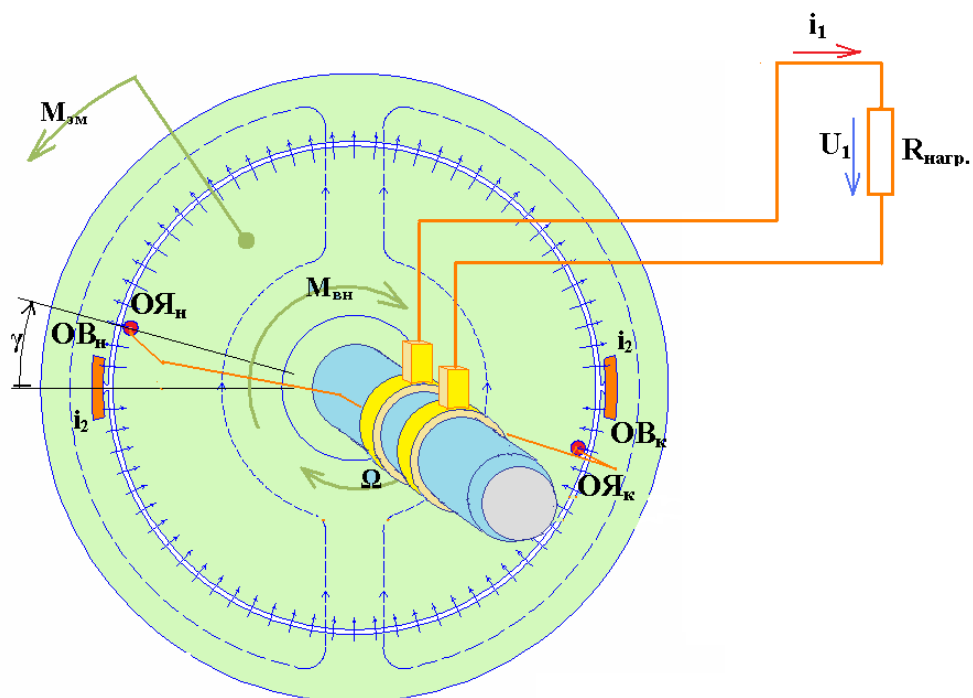


Рис. 1.1. Поперечное сечение простейшей электрической машины. ОВн, ОВк, ОЯн и ОЯк – начальные и конечные катушечные стороны обмоток возбуждения и якоря

Обмотка возбуждения, по которой протекает ток  $i_2$ , расположена на внешнем, неподвижном сердечнике (статоре). Внутренний сердечник (ротор) приводится во вращение внешним моментом  $M_{вн}$ , приложенным к валу (таким образом, рассматривается *генераторный режим работы*). При ча-

стоте вращения ротора  $\Omega$  в расположенной на нем обмотке якоря индуцируется ЭДС и, если обмотка якоря присоединена к нагрузке  $R_H$  (обычно в этом случае используются скользящие контакты – контактные кольца и щетки), то по замкнутой цепи якоря течет ток  $i_1$ . Примем за положительное направление вращения ротора и отсчета угловой координаты  $\gamma$  направление по часовой стрелке.

Распределение индукции в воздушном зазоре найдем с помощью закона полного тока. На основании принятых допущений можно заключить, что индукция на всем протяжении окружности зазора будет одной и той же. Тогда

$$i_2 w_2 = \oint H_1 dl = \frac{B_2}{\mu_0} \oint dl = \frac{B_2}{\mu_0} 2\delta,$$

где  $w_2$  – число витков обмотки возбуждения,  $\delta$  – зазор, откуда

$$B_2 = \mu_0 \frac{i_2 w_2}{2\delta}. \quad (1.1)$$

ЭДС, индуцированная в обмотке якоря при вращении ее в поле обмотки возбуждения, определяется законом электромагнитной индукции:

$$e_1 = -\frac{d\Psi_{12}}{dt}, \quad (1.2)$$

где  $\Psi_{12}$  – потокосцепление якорной обмотки 1 с полем обмотки возбуждения 2 (обратите внимание на порядок следования индексов!).

Сразу же полезно ввести понятие взаимной индуктивности обмоток, тем более что мы рассматриваем *линейную* систему, и эта индуктивность будет постоянной:

$$L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2}.$$

Первый индекс здесь также соответствует рассматриваемой обмотке, а второй – той обмотке, которая создает поле.

Потокосцепление якорной обмотки удобно выразить через взаимную индуктивность:

$$\Psi_{12} = L_{12}i_2. \quad (1.3)$$

Если, как уже было замечено, обмотка возбуждения питается постоянным током,

$$e_1 = -i_2 \frac{dL_{12}}{dt} = -i_2 \frac{dL_{12}}{d\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = -i_2 \Omega \frac{dL_{12}}{d\gamma}. \quad (1.4)$$

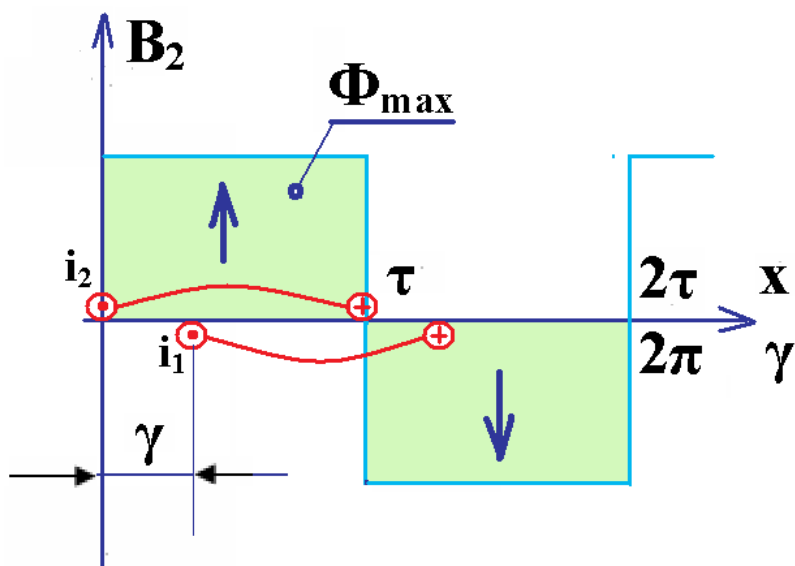
Из полученного следует важный вывод: для того чтобы в обмотке якоря индуктировалась ЭДС, отличная от нуля, необходимо, чтобы при повороте ротора ее взаимная индуктивность с обмоткой возбуждения не оставалась постоянной.

Это же условие необходимо выполнить в двигательном режиме работы для того чтобы электромагнитный момент, создаваемый машиной, был отличен от нуля.

Из сказанного становится ясно, что для изучения процессов в простейшей электрической машине и для определения ее характеристик необходимо рассмотреть зависимость индуктивностей обмоток от взаимного углового положения сердечников статора и ротора, другими словами, от угловой координаты  $\gamma$ .

На рис.1.2. показано распределение индукции в воздушном зазоре простейшей машины, поперечное сечение которой изображено на рис. 1.1. Там же показано взаимное положение обмоток машины при угловом смещении ротора относительно статора, равном  $\gamma$ . Для того чтобы определить потокосцепление обмотки, необходимо вычислить поток вектора индукции через поверхность обмотки (в данном случае – через поверхность катушки, поскольку обе обмотки в модели представлены катушками с диаметральной шагом, содержащими  $w_1$  и  $w_2$  витков). Магнитный поток на некотором участке активной зоны легко вычислить, пользуясь рис. 1.2. Для этого достаточно площадь графика индукции, соответствующую рассматриваемому участку, умножить на длину активной зоны. Так, на рис. 1.2 легко видеть,

что каждый виток обмотки возбуждения 2 сцеплен с потоком  $\Phi_{\max}$ , в то время как витки обмотки 1 сцеплены с меньшим потоком.



**Рис. 1.2.** Распределение индукции в воздушном зазоре простейшей электрической машины

Для вывода требуемых зависимостей рассмотрим три взаимных положения ротора и статора простейшей машины, показанные на рис. 1.3.

В первом положении (рис. 1.3,*a*) оси обеих обмоток совпадают, угол  $\gamma$  равен нулю. Потокосцепление обмотки якоря  $\Psi_{12}$  максимально, оно пропорционально площади прямоугольной трапеции на графике распределения индукции  $B_2(x)$  (эта площадь, обозначенная на рисунке  $\Phi_{12m}$ , представляет собой магнитный поток на *полюсном делении* активной зоны машины, приходящийся на единицу аксиальной длины).

Итак, при  $\gamma = 0$

$$\begin{aligned} \Psi_{12} &= \Psi_{12m} = w_1 \Phi_{12m} = w_1 \int_S B_n ds = w_1 B_2 \int_S ds = \\ &= w_1 \Lambda_{12m} (i_2 w_2) = w_1 \left( \mu_0 \frac{\tau l}{2\delta} \right) (i_2 w_2), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где



$$\Lambda_{12m} = \frac{\Phi_{12m}}{i_2 w_2} = \frac{\mu_0 \tau l}{2\delta}$$

– магнитная проводимость зазора на ширине одного полюсного деления машины,  $l$  – осевая длина активной зоны, на протяжении которой поле может считаться плоскопараллельным. Правильно называть  $l$  расчетной длиной машины. Размерность магнитной проводимости: Вб/А = Гн.

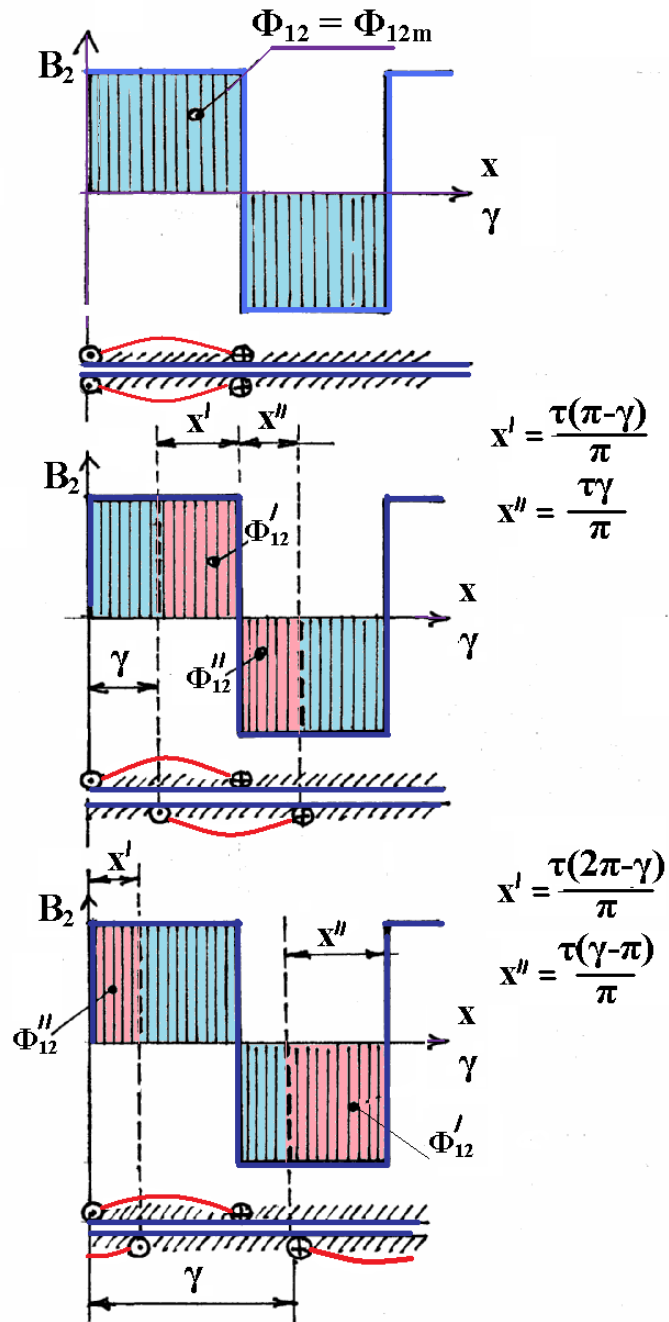


Рис. 1.3. К расчету зависимости потокосцепления от угла  $\gamma$

В первом положении (рис. 1.3, а) оси обеих обмоток совпадают, угол  $\gamma$  равен нулю. Потокосцепление обмотки якоря  $\Psi_{12}$  максимально, оно пропорционально площади прямоугольной трапеции на графике распределения индукции  $B_2(x)$  (эта площадь, обозначенная на рисунке  $\Phi_{12m}$ , представляет собой магнитный поток на *полюсном делении* активной зоны машины, приходящийся на единицу аксиальной длины).

Итак, при  $\gamma = 0$

$$\begin{aligned}\Psi_{12} &= \Psi_{12m} = w_1 \Phi_{12m} = w_1 \int_S B_n ds = w_1 B_2 \int_S ds = \\ &= w_1 \Lambda_{12m} (i_2 w_2) = w_1 \left( \mu_0 \frac{\tau l}{2\delta} \right) (i_2 w_2),\end{aligned}\quad (1.5)$$

где

$$\Lambda_{12m} = \frac{\Phi_{12m}}{i_2 w_2} = \frac{\mu_0 \tau l}{2\delta}$$

– магнитная проводимость зазора на ширине одного полюсного деления машины,  $l$  – осевая длина активной зоны, на протяжении которой поле может считаться плоскопараллельным. Правильно называть  $l$  *расчетной* длиной машины. Размерность магнитной проводимости: Вб/А = Гн.

Таким образом, при принятых допущениях

$$\Psi_{12m} = \frac{\mu_0 w_1 w_2 \tau l}{2\delta} i_2. \quad (1.6)$$

Рассмотрим теперь следующее положение, в котором ротор смещен относительно статора на угол  $0 < \gamma \leq \pi$  в положительном направлении (рис. 1.3, б). Очевидно, что при повороте ротора потокосцепление якорной обмотки уменьшилось – теперь поток, пронизывающий ее витки, складывается из имеющих разные знаки потоков  $\Phi'_{12}$  и  $\Phi''_{12}$ :

$$\begin{aligned}\Phi_{12} &= \Phi'_{12} + \Phi''_{12} = B_2 l x' - B_2 l x'' = B_2 \tau l \left( \frac{\pi - \gamma}{\pi} \right) - B_2 \tau l \frac{\gamma}{\pi} = \\ &= B_2 \tau l \left( 1 - \frac{2\gamma}{\pi} \right) = \Phi_{12m} \left( 1 - \frac{2\gamma}{\pi} \right)\end{aligned}\quad (1.7)$$

Соответственно уменьшилось и потокосцепление обмотки

$$\Psi_{12} = w_1 \Phi_{12} = w_1 \Phi_{12m} \left(1 - \frac{2\gamma}{\pi}\right) = \Psi_{12m} \left(1 - \frac{2\gamma}{\pi}\right). \quad (1.8)$$

Таким же образом получим выражение для потокосцепления обмотки якоря при  $\pi < \gamma \leq 2\pi$ :

$$\Phi_{12} = \Phi'_{12} + \Phi''_{12} = -B_2 \tau l \left(\frac{2\pi - \gamma}{\pi}\right) + B_2 \tau l \left(\frac{\gamma - \pi}{\pi}\right) = \Phi_{12m} \left(3 - \frac{2\gamma}{\pi}\right) \quad (1.9)$$

$$\Psi_{12} = w_1 \Phi_{12} = -\Psi_{12m} \left(3 - \frac{2\gamma}{\pi}\right). \quad (1.10)$$

Взаимная индуктивность обмоток для рассмотренных интервалов изменения угла  $\gamma$ :

$$0 < \gamma \leq \pi: \quad L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = L_{12m} \left(1 - \frac{2\gamma}{\pi}\right) \quad (1.11)$$

$$\pi < \gamma \leq 2\pi: \quad L_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = -L_{12m} \left(3 - \frac{2\gamma}{\pi}\right), \quad (1.12)$$

где

$$L_{12m} = \frac{\Psi_{12m}}{i_2} = \frac{\mu_0 w_1 w_2 \tau l}{2\delta}. \quad (1.13)$$

### **Зависимость ЭДС обмотки якоря от угла поворота ротора (при постоянной частоте вращения)**

Воспользовавшись (1.4), получим выражение для ЭДС обмотки якоря при  $\Omega = const$  для рассмотренных интервалов изменения угла  $\gamma$ .

$$0 < \gamma \leq \pi: \quad \frac{dL_{12}}{d\gamma} = -\frac{2}{\pi} L_{12m} < 0 \quad u \quad e_1 = i_2 \Omega \frac{2}{\pi} L_{12m} = const > 0 \quad (1.14)$$

$$\pi < \gamma \leq 2\pi: \quad \frac{dL_{12}}{d\gamma} = \frac{2}{\pi} L_{12m} > 0 \quad u \quad e_1 = -i_2 \Omega \frac{2}{\pi} L_{12m} = const < 0 \quad (1.15)$$

При чисто активной нагрузке генератора временные зависимости тока в цепи якорной обмотки и напряжения на нагрузке повторяют по форме временную зависимость ЭДС (рис. 1.4).

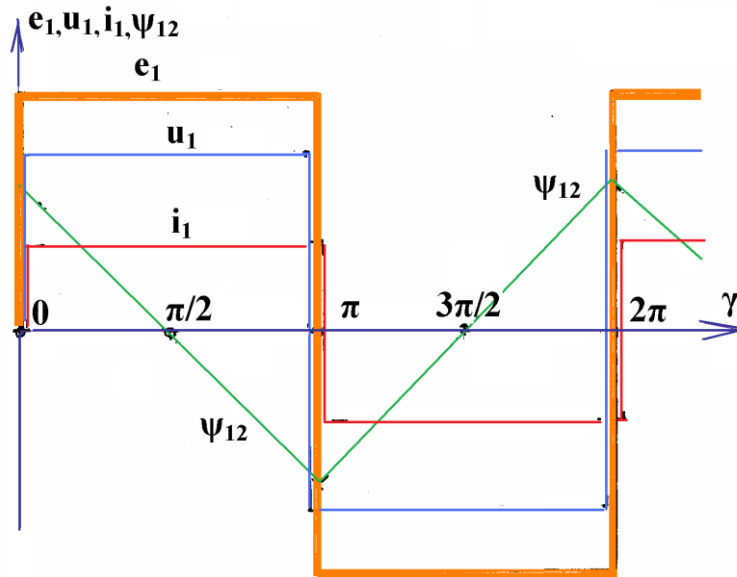


Рис. 1.4 Зависимости ЭДС, напряжения, тока и потокосцепления от угла поворота ротора  $\gamma$

ЭДС можно выразить в ином виде, получив знакомое со школьных лет выражение для ЭДС проводника, перемещающегося с линейной скоростью  $v$  во внешнем магнитном поле с индукцией  $B_2$  (правило правой руки):

$$|e_1| = i_2 \Omega \left| \frac{dL_{12}}{d\gamma} \right| = i_2 \Omega \frac{2}{\pi} \frac{\mu_0 w_1 w_2 \tau l}{2\delta} = 2(B_2 l v) w_1, \quad (1.16)$$

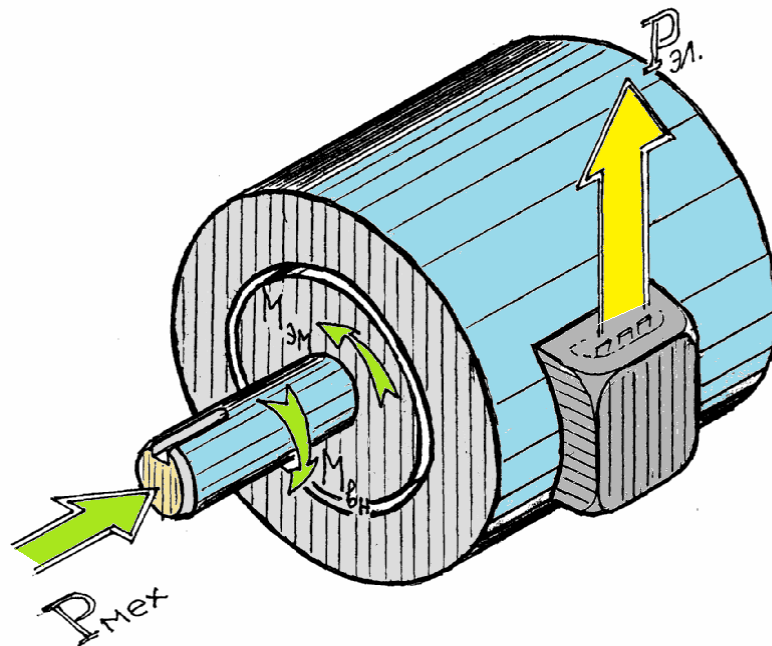
где  $\tau = R\pi$ ,  $v = R\Omega$ ,  $R$  – радиус внешней поверхности ротора.

### Электромагнитный момент

Условившись рассматривать генераторный режим, мы предположили, что к валу ротора приложен *внешний вращающий момент*  $M_{\text{вн}}$ .

Если генератор работает в *установившемся режиме*, что обычно для крупных машин, например, для турбо- и гидрогенераторов, то его частота вращения постоянна. Это означает, что приложенный к валу внешний момент уравновешивается (согласно третьему закону Ньютона) некоторым

противодействующим моментом. Момент сопротивления, возникающий в результате трения о воздух вращающихся частей и трения в подшипниках, обычно ничтожно мал по сравнению с  $M_{вн}$ , в чем легко убедиться и расчетом, и экспериментальным путем. Остается предположить, что большая часть уравновешивающего момента создается самой машиной. Природа этого момента вполне понятна – при перемещении проводников обмотки якоря, по которым течет ток якоря (мы рассматриваем один из рабочих режимов, не режим холостого хода), в поле обмотки возбуждения на них действует сила Ампера (правило левой руки!). Произведение суммы этих сил на плечо (радиус ротора) и составляет этот момент, который мы будем называть *электромагнитным*.



**Рис. 1.5. Работа электрической машины в режиме генератора. Направления потоков мощности и вращающих моментов**

Итак, при постоянной частоте вращения

$$M_{вн} + (M_{эм} + M_{тр}) = 0 \quad (1.17)$$

и

$$M_{эм} \approx -M_{вн} \quad (1.18)$$

В динамических режимах, т.е. при разгоне или торможении необходимо учитывать динамический момент, который тем больше, чем больше момент инерции вращающихся частей  $J$  (размерность:  $\text{Нм}\cdot\text{с}^2 = \text{кг}\cdot\text{м}^2$ ) и скорость изменения частоты вращения. Третий закон Ньютона в этом случае записывается следующим образом:

$$M_{\text{вн}} + (M_{\text{эм}} + M_{\text{мп}}) = J \frac{d\Omega}{dt}, \quad (1.19)$$

откуда электромагнитный момент равен

$$M_{\text{эм}} = - \left( M_{\text{вн}} + M_{\text{мп}} - J \frac{d\Omega}{dt} \right) \approx - \left( M_{\text{вн}} - J \frac{d\Omega}{dt} \right). \quad (1.20)$$

Если внешний момент точно не известен (не задан), а так оно обычно и бывает, его можно с довольно высокой точностью определить по отдаваемой генератором электрической мощности:

$$P_{\text{мех}} = M_{\text{вн}} \Omega = \frac{P_{\text{эл}}}{\eta} = \frac{m_1 U_1 I_1 \cos \phi_1}{\eta}. \quad (1.21)$$

Если по (1.21) момент определяется для ненормального режима работы, следует иметь в виду, что обычно КПД мало меняется в довольно широком диапазоне изменения нагрузки.

### **Расчет электромагнитного момента исходя из баланса активной мощности**

Запишем уравнение Кирхгофа для электрической цепи якоря:

$$e_1 = U_1 + R_1 i_1 = R_{\text{нгр}} i_1 + R_1 i_1, \quad (1.22)$$

где  $R_{\text{нгр}}$  – сопротивление нагрузки (принято активным),  $R_1$  – активное сопротивление обмотки.

Заметим, что если в (1.22) ЭДС вычисляется изложенным выше способом (т.е. по (1.4)), то это означает, что мы пренебрегаем потоком пазового рассеяния и, следовательно, индуктивным сопротивлением пазового рассея-

ния (рассеянием лобовых частей мы пренебрегли ранее, исключив из рассмотрения *торцевые зоны* машины).

Умножим (1.22) на ток  $i_1$ :

$$\underbrace{e_1 i_1}_{P_{эм}} = \underbrace{U_1 i_1}_{P_1} + \underbrace{R_1 i_1^2}_{P_{с1}} = R_{нзр} i_1^2 + R_1 i_1^2. \quad (1.23)$$

Произведение ЭДС обмотки якоря  $e_1$  на ток этой же обмотки  $i_1$  назовем *электромагнитной мощностью*  $P_{эм}$ . Мощность  $P_1$  отдается генератором в сеть (в нагрузку), мощность  $P_{с1}$  представляет собой *электрические потери* в обмотке якоря.

Используя полученные ранее выражения, можно записать:

$$P_{эм} = e_1 i_1 = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} i_1 = \left( -i_2 \Omega \frac{dL_{12}}{d\gamma} \right) i_1. \quad (1.24)$$

Поскольку мы рассматриваем генераторный режим,  $|e_1| > |U_1|$  и ток  $i_1$  всегда совпадает по направлению с ЭДС. Это означает, что электромагнитная мощность в данном случае всегда больше нуля.

Электромагнитная мощность создается в результате подведенной извне механической мощности. Пренебрегая потерями на трение, будем считать, что вся механическая мощность преобразуется в электромагнитную:

$$P_{мех} = M_{вн} \Omega = e_1 i_1 = -i_1 i_2 \Omega \frac{dL_{12}}{d\gamma} > 0.$$

При  $\Omega = const \neq 0$

$$M_{вн} = -M_{эм} = -i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{d\gamma}. \quad (1.25)$$

Напомним, что  $L_{12}$  выражается через обмоточные данные и размеры машины, таким образом, вычислить электромагнитный момент с достаточно хорошим приближением можно уже на довольно ранней стадии проектирования электрической машины.

При установившейся частоте вращения генератора электромагнитный момент всегда отрицателен, т.е. направлен против внешнего момента.

Действительно:

$$\left. \begin{array}{l} 0 < \gamma \leq \pi: \\ \pi < \gamma \leq 2\pi: \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{dL_{12}}{d\gamma} = -\frac{2}{\pi} L_{12m} < 0 \\ \frac{dL_{12}}{d\gamma} = \frac{2}{\pi} L_{12m} > 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} (M_{\text{вн}} > 0) \\ (M_{\text{эм}} < 0) \end{array} \right\} \quad (1.26)$$

$$\left. \begin{array}{l} i_1 > 0, \quad i_2 > 0 \\ i_1 < 0, \quad i_2 > 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} (M_{\text{вн}} > 0) \\ (M_{\text{эм}} < 0) \end{array} \right\}$$

Получим еще одно выражение для электромагнитного момента, напоминающее хорошо знакомое правило *левой руки*.

$$\begin{aligned} |M_{\text{вн}}| &= |M_{\text{эм}}| = i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{d\gamma} = i_1 i_2 \frac{2}{\pi} L_{12m} = \\ &= i_1 i_2 \frac{2}{\pi} \frac{\mu_0 w_1 w_2 \tau l}{2\delta} = B_2 \frac{2}{\pi} \frac{2\pi R}{2} l \cdot i_1 w_1 = 2 \underbrace{(B_2 l \cdot i_1 w_1)}_{F_{\text{эм}}} R \end{aligned} \quad (1.27)$$

В (1.27) учтено, что в *двухполюсной* машине  $\tau = 2\pi R/2$ . Заметим также, что  $i_1 w_1$  представляет собой полный ток *катушечной стороны* обмотки якоря.

### Другие полезные формулы для электромагнитного момента простейшей электрической машины

Сделаем некоторые подстановки в ранее полученное выражение (1.25)

$$M_{\text{эм}} = -i_1 i_2 \frac{dL_{12}}{d\gamma}. \quad (1.25)$$

Во-первых, учтем, что на первом и втором полупериодах изменения угловой координаты  $\gamma$  производная от взаимной индуктивности имеет различные знаки:

$$\frac{dL_{12}}{d\gamma} = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} L_{12m} & 0 < \gamma \leq \pi \\ \frac{2}{\pi} L_{12m} & \pi < \gamma \leq 2\pi \end{cases}$$



Во-вторых, воспользуемся выражением (1.13) для  $L_{12m}$  и, в-третьих, перегруппируем некоторые заданные величины. В результате получим:

$$M_{эм} = (i_1 w_1)(i_2 w_2) \left( \mu_0 \frac{\tau l}{\delta} \right) \cdot \frac{1}{2} \times \begin{cases} -\frac{2}{\pi}, & 0 < \gamma \leq \pi \\ \frac{2}{\pi}, & \pi < \gamma \leq 2\pi \end{cases}$$

Первые два произведения в скобках представляют собой МДС обмоток, а выражение в третьей паре скобок – *магнитную проводимость* воздушного зазора на одном полюсном делении активной зоны.

$$M_{эм} = f_1 f_2 \Lambda_{\delta(\tau)} \cdot \times \begin{cases} -\frac{1}{\pi}, & 0 < \gamma \leq \pi \\ \frac{1}{\pi}, & \pi < \gamma \leq 2\pi \end{cases}.$$

При проектировании электрических машин обычно пользуются безразмерными *коэффициентами магнитной проводимости*  $\lambda$ :

$$\Lambda_{\delta(\tau)} = \mu_0 l \cdot \lambda_{\delta(\tau)} = \mu_0 l \cdot \frac{\tau}{\delta}$$

С учетом этого

$$\left. \begin{aligned} M_{эм} &= 4 \cdot 10^{-7} f_1 f_2 \lambda_{\delta(\tau)} l \cdot \times \begin{cases} -1, & 0 < \gamma \leq \pi \\ 1, & \pi < \gamma \leq 2\pi \end{cases} \\ \text{или} \\ |M_{эм}| &= 4 \cdot 10^{-7} |f_1 f_2| \lambda_{\delta(\tau)} l \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Из полученного выражения следует, что электромагнитный момент, а, следовательно, и электромагнитная мощность, пропорциональны произведению МДС обмоток, удельной (на единицу длины машины) магнитной проводимости полюсного деления и длине машины.

Обычно на начальных этапах проектирования машины задаются плотностями тока в проводах обмоток. МДС  $f_1$  и  $f_2$  просто выражаются через плотности тока:

$$f_{1(2)} = i_{1(2)} w_{1(2)} = j_{1(2)} \cdot S_{w1(2)},$$

где  $j_{1(2)}$  – плотности тока,  $S_{w1(2)}$  – общая площадь поперечных сечений проводов первой (второй) обмотки.

После подстановки в (1.28) получим:

$$|M_{эм}| = 4 \cdot 10^{-7} |j_1 j_2| \cdot S_{w1} S_{w2} \cdot \lambda_{\delta(\tau)} \cdot l. \quad (1.29)$$

Выражения (1.28) и (1.29) могут быть полезны при проектировании машины.

### **Некоторые результаты моделирования простейшей электрической машины на конечно-элементной модели**

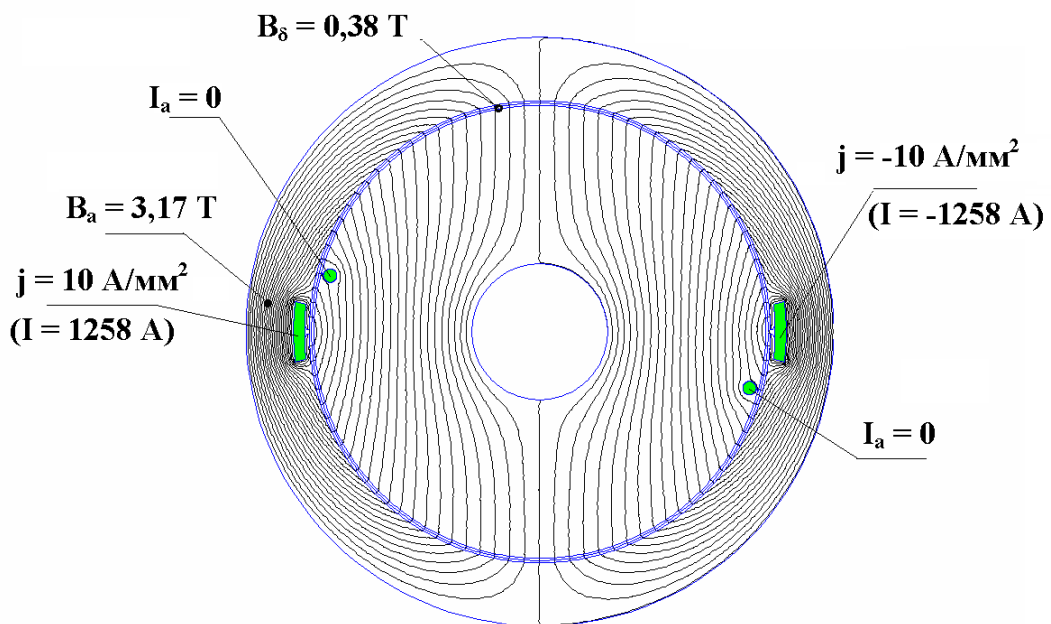
При формировании математической модели простейшей электрической машины был принят целый ряд весьма радикальных допущений. Естественно, возникает вопрос, насколько далекую от реальности модель мы получили и будет ли полезным изучение такой модели. Ответить на этот вопрос довольно легко, если воспользоваться современными средствами компьютерного моделирования. В частности, большие возможности в этом отношении предоставляет уже упоминавшаяся конечно-элементная программа *FEMM*. На приведенных далее рисунках показаны некоторые результаты моделирования простейшей электрической машины, поперечное сечение которой схематично изображено на рис. 1.1.

На рис. 1.6 показана картина поля, созданного обмоткой возбуждения, расположенной, напомним, на статоре. Плотность тока на участке модели, соответствующем поперечному сечению катушечной стороны обмотки возбуждения, выбрана довольно большой –  $10 \text{ А/мм}^2$  (с учетом того, что медь обмотки заполняет поперечное сечение катушки далеко не полностью, плотность тока в меди будет еще больше). Задать повышенное значение плотности тока мы решили здесь для того, чтобы получить в воздушном зазоре индукцию, более-менее близкую к реальной. В действительности обмотки возбуждения занимают значительно большую, чем на нашей модели,

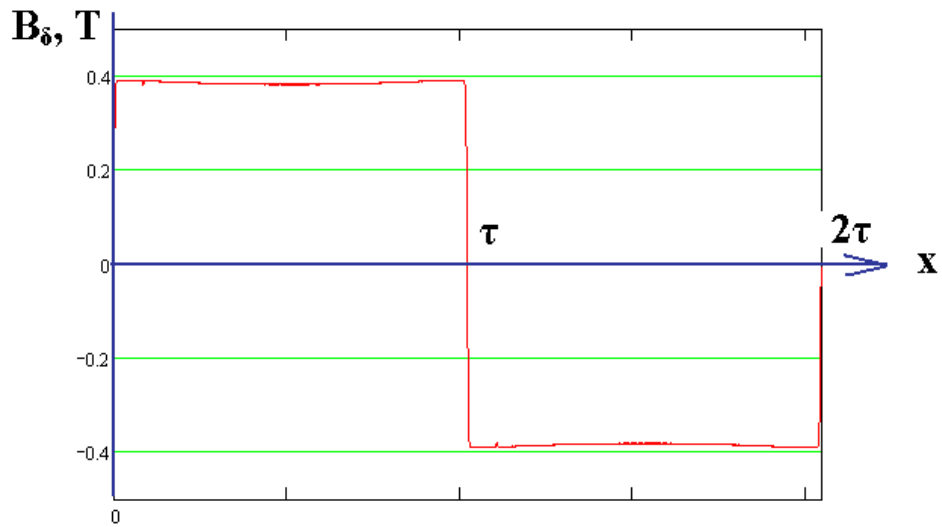
площадь на поперечном сечении машины и при плотностях тока в меди порядка  $3\text{--}5\text{ А/мм}^2$  создают в зазоре поле с индукцией  $0,75\text{--}0,9\text{ Т}$ .

Магнитная проницаемость стали сердечников принята для модели равной  $\mu_0 \cdot 10000$ . Такую проницаемость имеют хорошие электротехнические стали в слабых внешних полях, т.е. на начальном участке кривой намагничивания. О том, насколько такая проницаемость стали соответствует принятому допущению  $\mu = \infty$ , можно судить по тому, как сильно распределение индукции в зазоре, полученное на модели, отличается от прямоугольной трапеции (см. рис. 1.7).

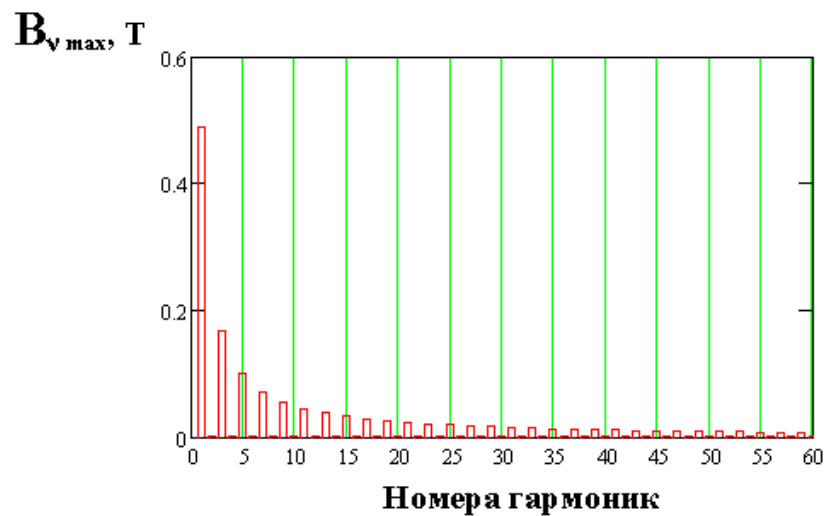
Представляем читателю возможность самому оценить, насколько поле при реальных свойствах стали отличается в рассматриваемом случае от поля, найденного при допущении о бесконечности магнитной проницаемости



**Рис. 1.6. Картина поля, созданного обмоткой возбуждения в поперечном сечении простейшей электрической машины при относительной магнитной проницаемости стали сердечников, равной 10000**



**Рис. 1.7.** Распределение индукции в воздушном зазоре простейшей электрической машины при холостом ходе. Плотность тока на участке модели, соответствующем поперечному сечению обмотки возбуждения равна  $10 \text{ А/мм}^2$



**Рис. 1.8.** Гармонический состав поля в воздушном зазоре простейшей электрической машины при холостом ходе

На рис. 1.8.показан гармонический состав распределения индукции в воздушном зазоре, определенный в результате разложения графика зависимости  $B_\delta(x)$  в ряд Фурье. Поскольку кривая индукции в зазоре близка по

форме к прямоугольной трапеции, амплитуды гармоник уменьшаются пропорционально их порядку.

На рис. 1.9 вместе с графиком  $B_{\delta}(x)$  показана синусоида основной гармоники, амплитуда которой для прямоугольной трапеции в  $4/\pi$  раз больше амплитуды трапеции.

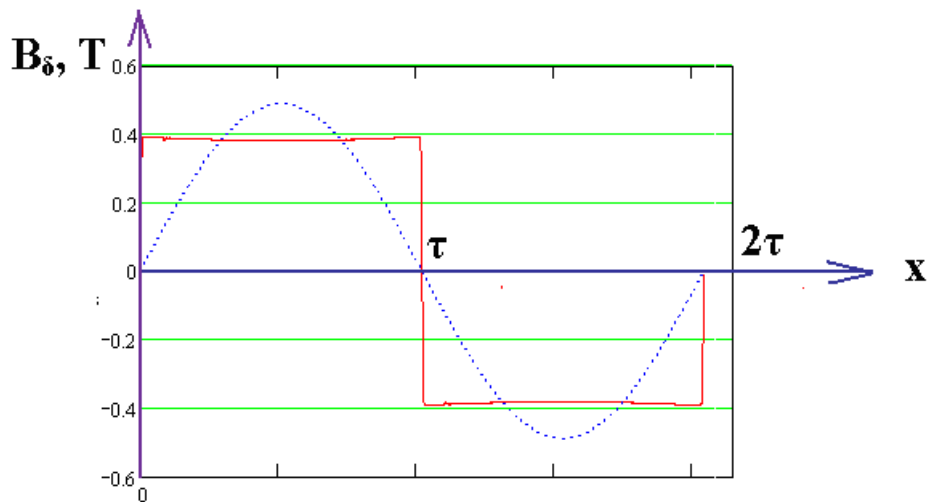


Рис. 1.9. Индукция поля в воздушном зазоре простейшей электрической машины при холостом ходе и основная гармоника этого поля

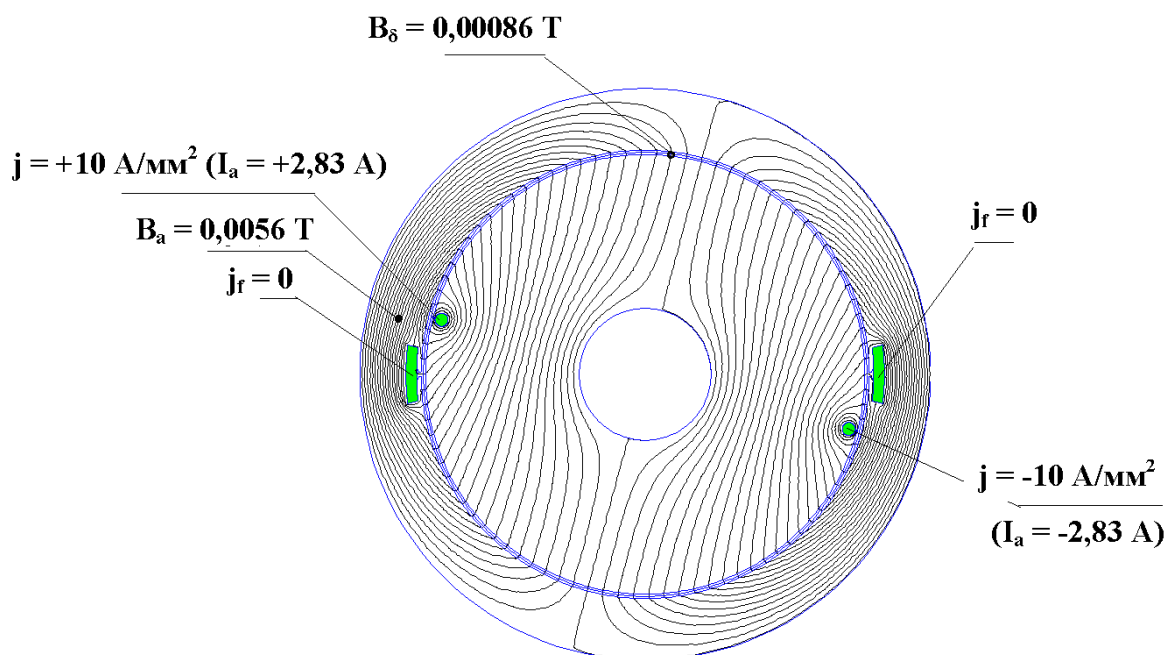
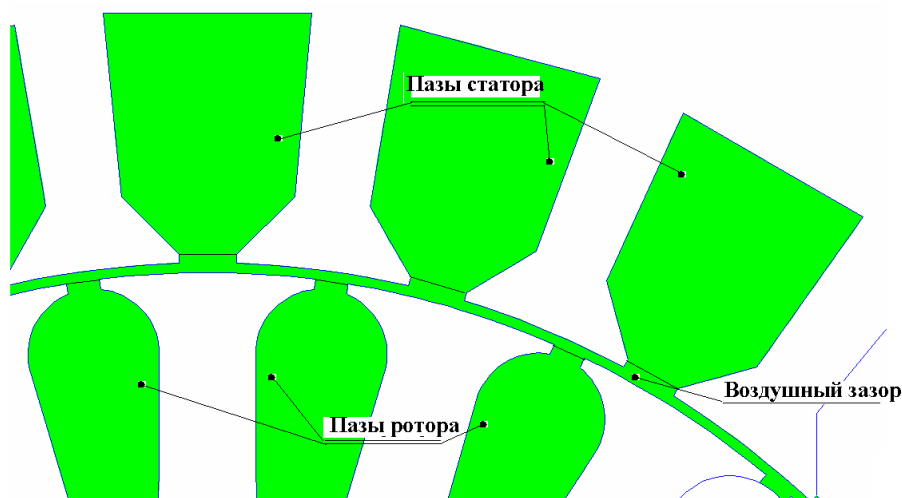


Рис. 1.10. Картина поля, созданного обмоткой якоря при отсутствии тока в обмотке возбуждения

На рис. 1.10 показана картина поля, созданного обмоткой якоря при плотности тока  $0,1 \text{ А/мм}^2$ . Обмотка возбуждения при этом не обтекается током. Из сравнения полей на рисунках 1.10 и 1.6 ясно, что поле якоря практически не влияет на результирующее поле в машине. Это соответствует сделанному допущению о пренебрежимо малой реакции якоря. Постепенно повышая плотность тока, задаваемую на участках модели, соответствующих поперечным сечениям катушечных сторон обмотки якоря, можно оценить как пределы применимости этого допущения, так и степень влияния реакции якоря на результирующее поле.

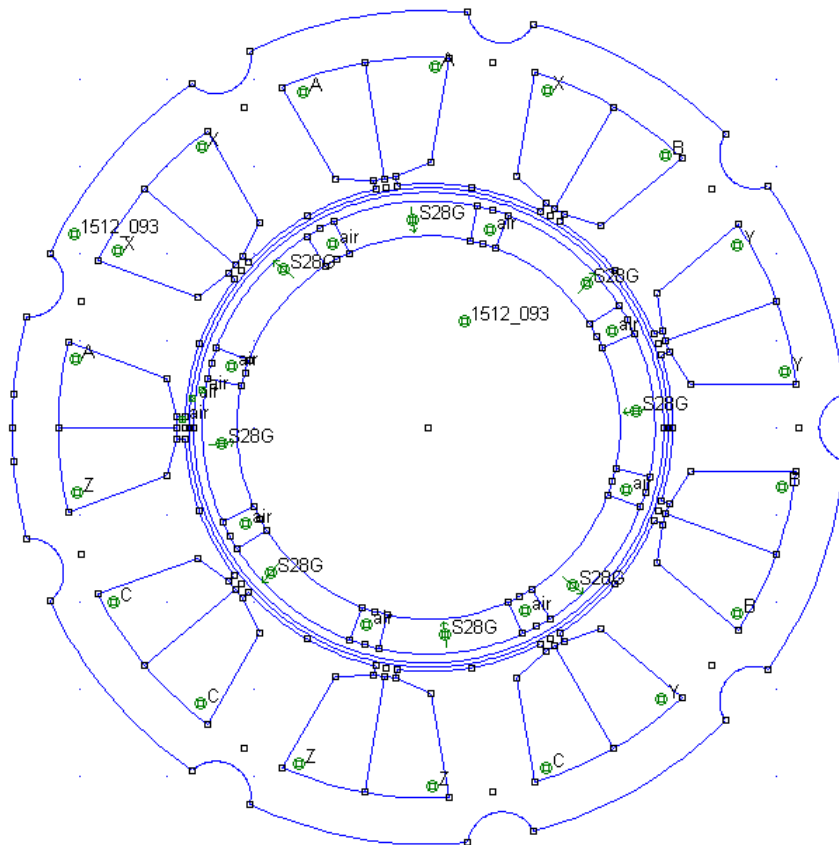
### О конфигурации немагнитного пространства между сердечниками статора и ротора

При рассмотрении простейшей электрической машины воздушный зазор между ротором и статором упрощенно был принят равномерным. В реальных машинах форма зазора может быть существенно более сложной. Далее приведены некоторые примеры формы немагнитного пространства между сердечниками реальных машин.



**Рис. 1.11. Немагнитное пространство асинхронного двигателя малой мощности. На статоре и роторе – полузакрываемые пазы**

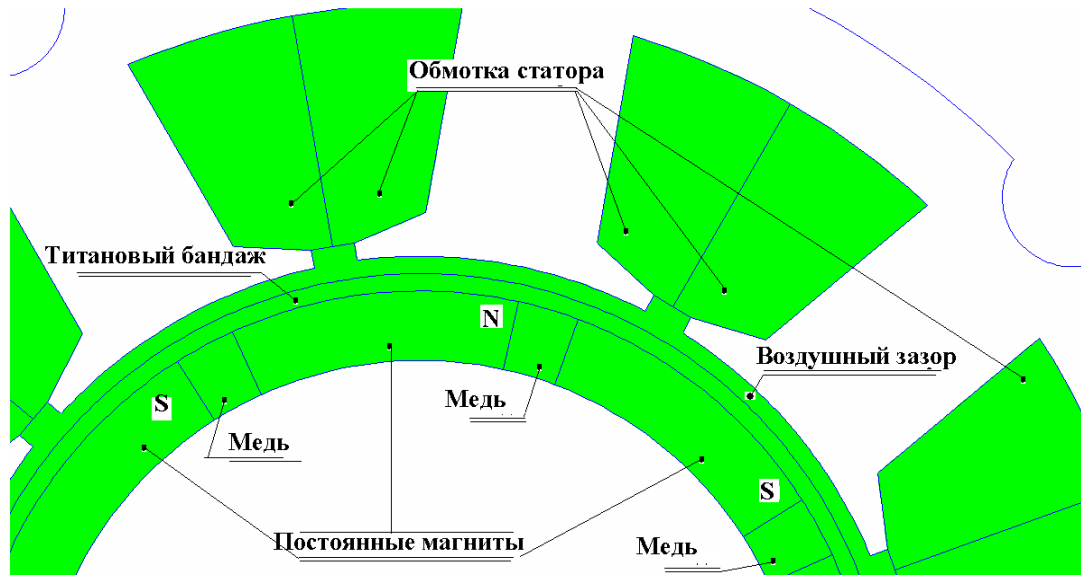
В асинхронных машинах зазор между сердечниками обычно мал - даже в мощных машинах он равен 1–2 мм. Поэтому *раскрытия* пазов, составляющие несколько мм, существенно нарушают равномерность зазора. Однако многие вопросы, касающиеся расчета асинхронных машин, могут быть решены с достаточной точностью, если реальный неравномерный зазор заменить равномерным *расчетным*, найденным с помощью *коэффициента Картера*, более подробно о котором мы будем говорить в разделе курса, посвященном аналитическим методам решения полевых задач.



**Рис. 1.12.** Поперечное сечение синхронного двигателя с поверхностными постоянными магнитами на роторе. Мощность двигателя - 5 кВт, частота вращения - 25000 об/мин. Конечно-элементная модель, построена в программе FEMM

На рис. 1.12 показано поперечное сечение синхронного двигателя с постоянными магнитами на роторе. В последнее время такие машины находят широкое применение в регулируемом электроприводе. Поскольку отно-

сительная магнитная проницаемость постоянных магнитов близка к единице, их вполне можно отнести к немагнитному пространству между статором и ротором, конфигурация которого показана на рис. 1.13.



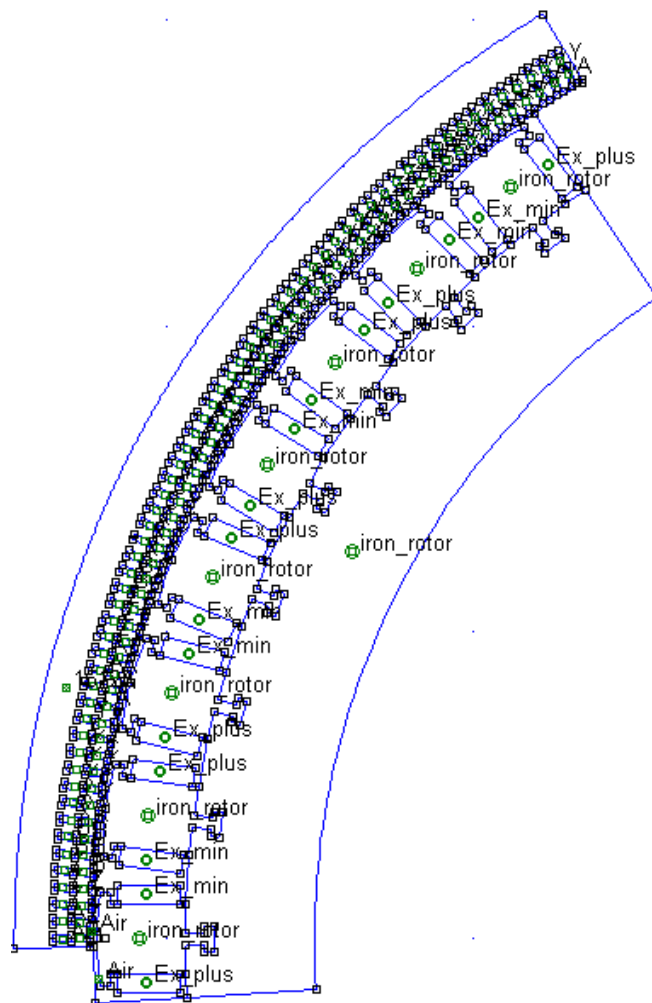
**Рис. 1.13. Немагнитное пространство синхронного двигателя 5 кВт, 25000 об/мин.**

Особенно сильно отличается от равномерного воздушного зазора немагнитное пространство явнополюсных машин – синхронных и постоянного тока. Такую конструкцию имеют, в частности, крупные гидрогенераторы, конечно-элементная модель поперечного сечения одного из которых показана на рис. 1.14. На рис. 1.15 показан фрагмент этой модели, соответствующий одному периоду основной гармонике поля. На рисунках 1.16 и 1.17 показаны конфигурация немагнитного пространства между сердечниками и картина поля при холостом ходе.

Форма кривой распределения индукции в воздушном зазоре гидрогенератора показана на рис. 1.18. Для того чтобы приблизить кривую индукции к синусоиде и тем самым улучшить форму временной зависимости напряжения генератора, воздушный зазор под полюсами специально делают неравномерным – под краями полюсов его увеличивают в полтора-два раза



по сравнению со значением под центром полюса, что хорошо видно на рис. 1.16. На рис. 1.18 можно также заметить, что на распределение индукции в зазоре значительное влияние оказывают раскрытия пазов статора, которые в крупных машинах делают обычно *открытыми*. Наличие пазов приводит к появлению *высших гармоник* в кривой магнитной проводимости воздушного зазора и, соответственно, к образованию *высших гармоник поля* в зазоре.



**Рис. 1.14.** Конечно-элементная модель гидрогенератора мощностью 26200 кВА с номинальным напряжением 10,5 кВ, коэффициентом мощности 0,8 и с числом пазов на полюс и фазу, равным 19/8, пример расчета которого дан в книге А.И. Абрамова и А.В. Иванова-Смоленского «Расчет гидрогенераторов и синхронных компенсаторов». Модель представляет один период первоначальной обмотки, равный в данном случае четырем периодам основной гармоники

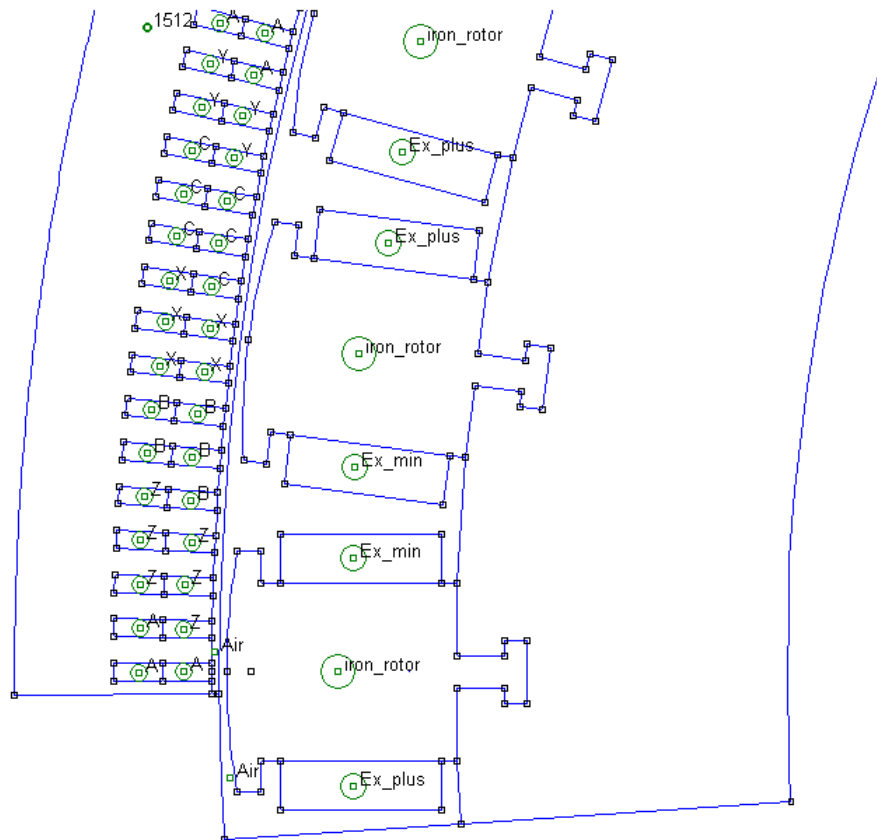


Рис. 1.15. Фрагмент конечно-элементной модели гидрогенератора 26200 кВА,  $2p = 24$ . Показан один период основной гармонике

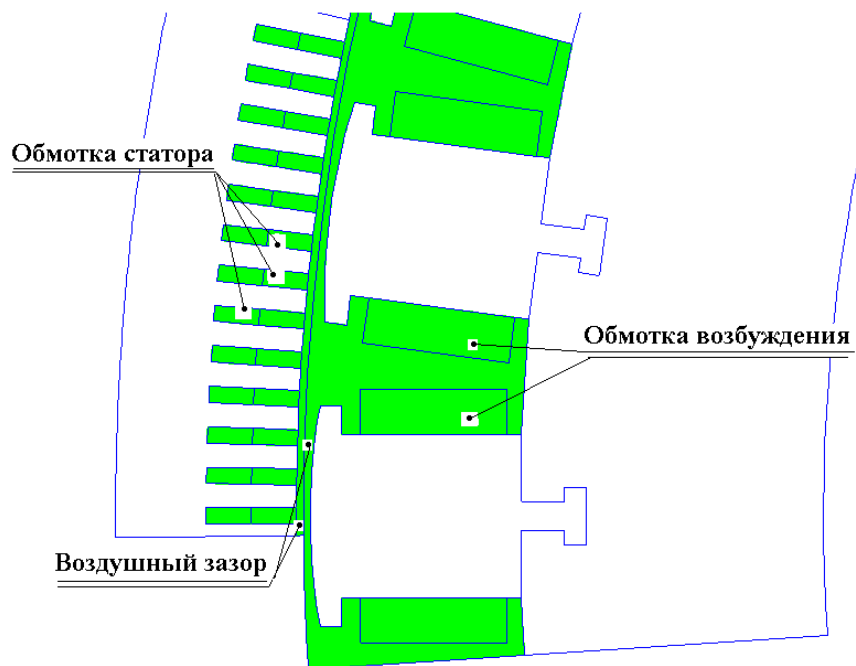
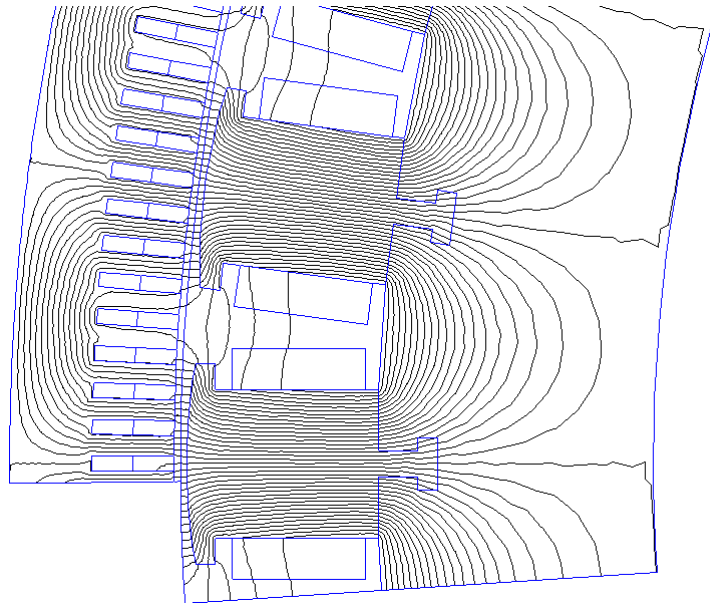
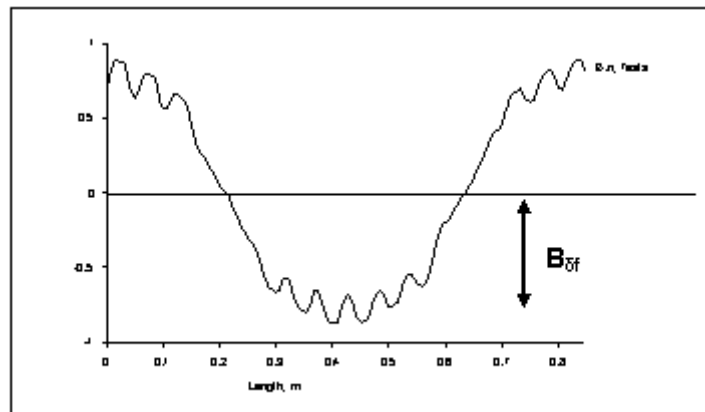


Рис. 1.16. Немагнитное пространство гидрогенератора 26200 кВА,  $2p = 24$



**Рис. 1.17.** Картина поля в поперечном сечении гидрогенератора 26200 кВА,  $2p = 24$  при холостом ходе



**Рис. 1.18.** Распределение индукции в воздушном зазоре гидрогенератора 26200 кВА,  $2p = 24$  при холостом ходе

На рис. 1.19 показано немагнитное пространство между статором и ротором авиационного явнополусного стартер-генератора мощностью 20 кВА и номинальной частотой вращения 20000 об/мин. При малом воздушном зазоре на его проводимость влияют и раскрытия пазов *демпферной* обмотки, размещенной в полюсных наконечниках.

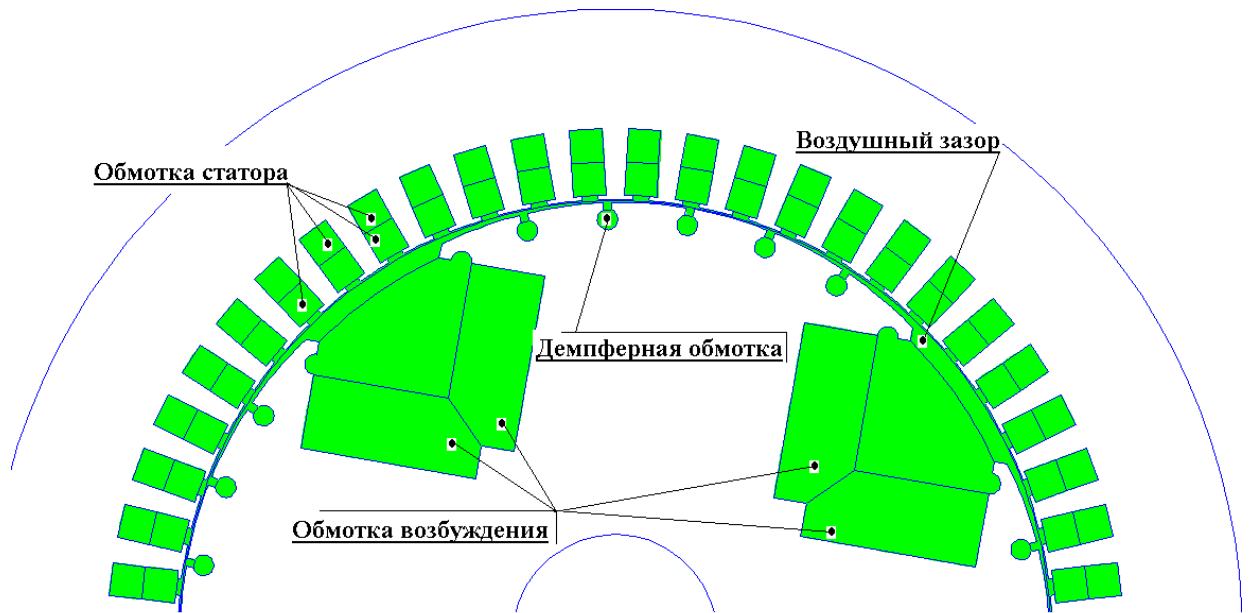


Рис. 1.19. Немагнитное пространство в поперечном сечении синхронного генератора 20 кВт,  $2p = 4$ , 12000 об/мин.

Распределение индукции в зазоре этой машины показано на рис. 1.20.

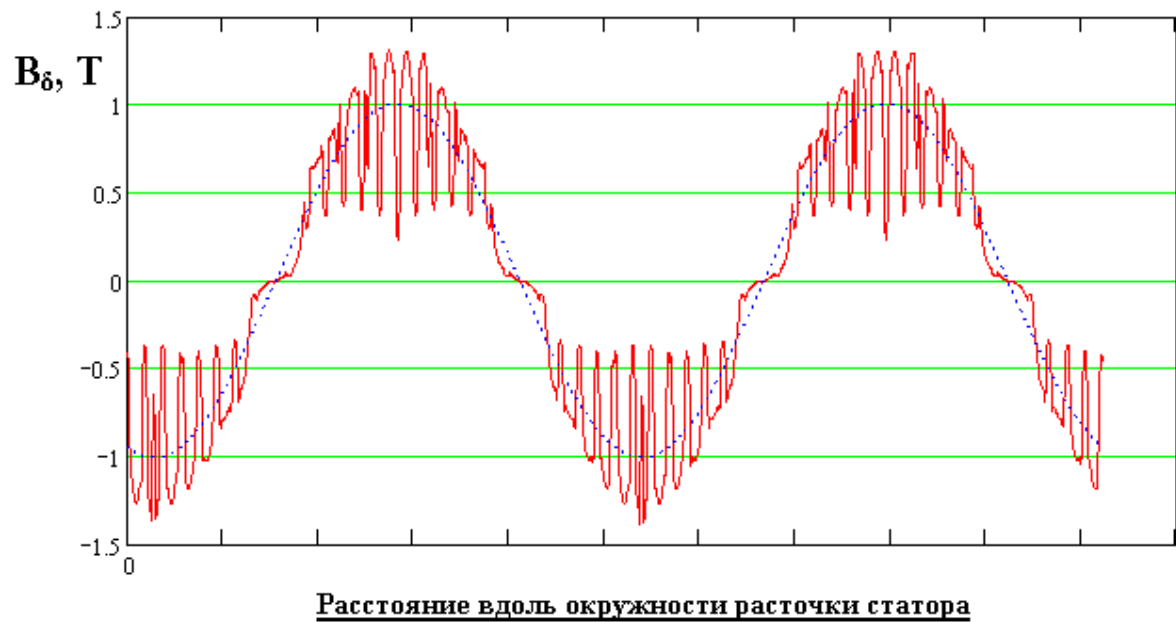


Рис. 1.20. Распределение индукции в зазоре синхронного генератора 20 кВт,  $2p = 4$ , 12000 об/мин. при холостом ходе

На рисунках 1.21 и 1.22 показаны картина поля и распределение индукции в зазоре того же стартер-генератора при нагрузке (установившийся режим).

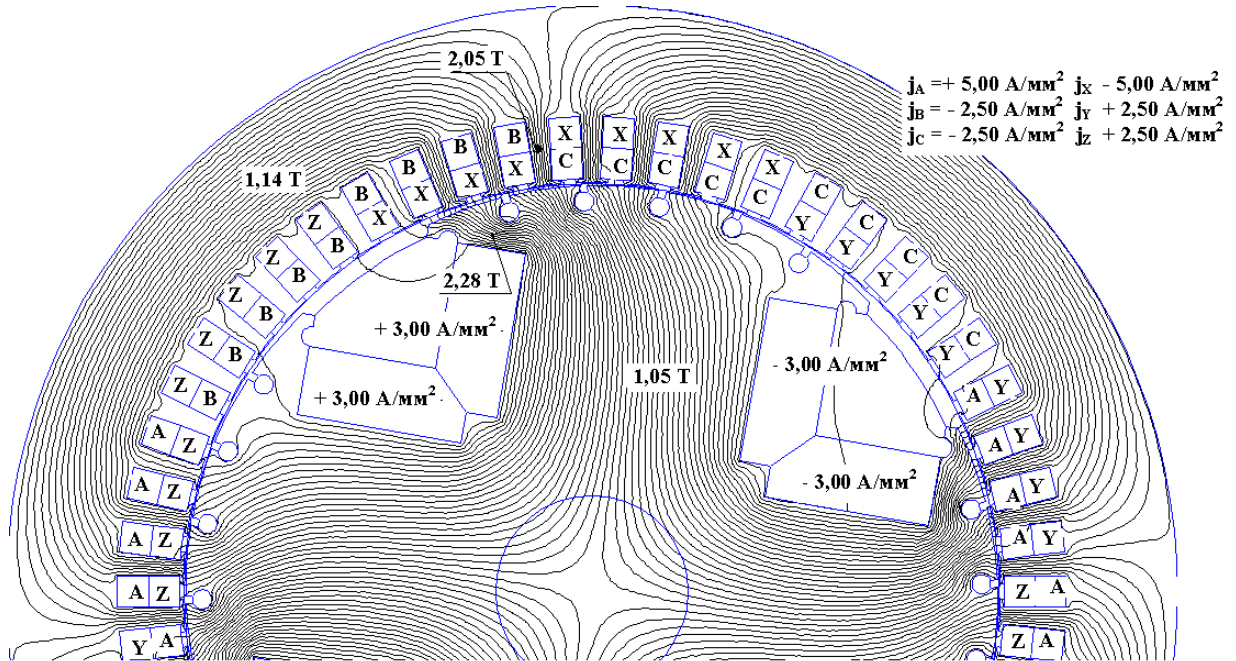


Рис. 1.21. Магнитное поле в поперечном сечении трехфазного синхронного генератора 20 кВт,  $2p = 4$ , 12000 об/мин. при нагрузке (с учетом реакции якоря)

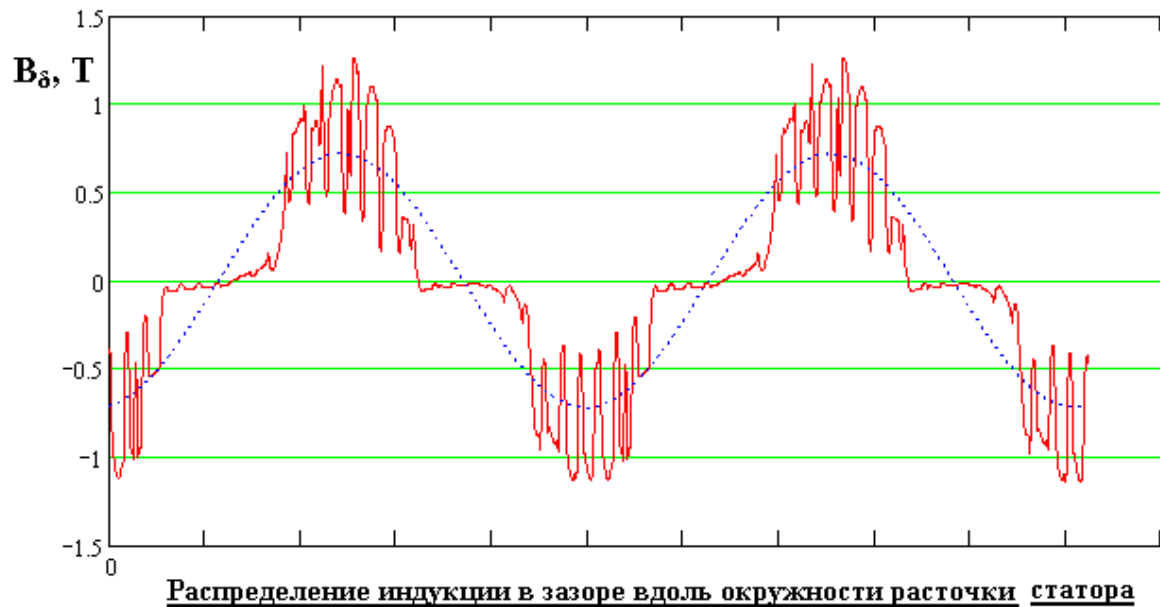
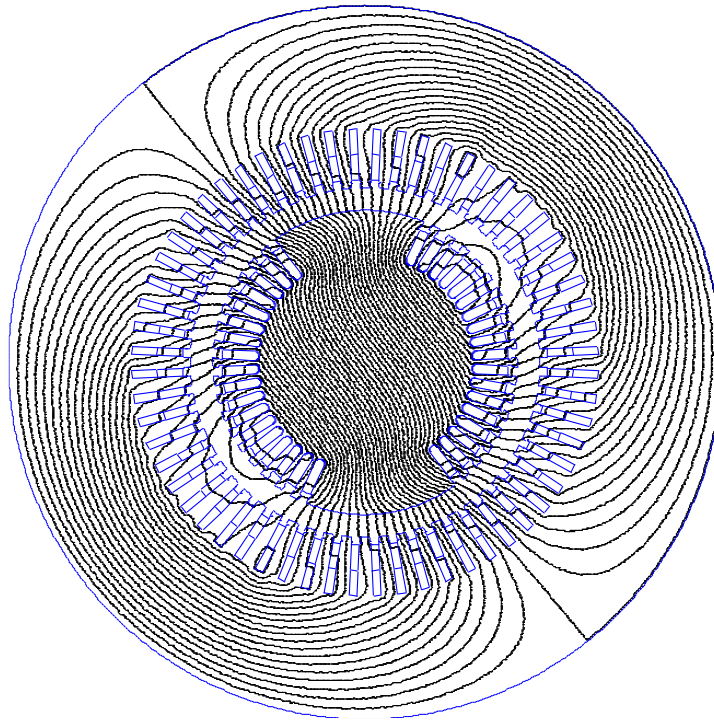


Рис. 1.22. Распределение индукции в зазоре синхронного генератора 20 кВт,  $2p = 4$ , 12000 об/мин. при нагрузке

Приведем пример поля в поперечном сечении электрической машины еще одного типа – *неявнополюсного* турбогенератора.



**Рис. 1.23. Картина поля в поперечном сечении турбогенератора 200 МВт при нагрузке**

Приведенные примеры показывают, что реальные электрические машины и поля в них значительно сложнее, чем рассмотренная нами конструкция и поле простейшей электрической машины. Однако намеченный в этом разделе подход к электромагнитному расчету электрических машин в основе своей остается верным. Уточнения, которые требуется внести в расчетные формулы, связаны с уточненным расчетом общего результирующего и локальных полей конкретных электрических машин.