

Раздел 2. Уравнения Максвелла

Майкл Фарадей сделал свое гениальное открытие 4 октября 1831 г., а 13 июня того же года в семье шотландского лендлорда Джона Клерка Максвелла родился сын Джеймс. Мальчик рос пытливым и любознательным, однако, когда он поступил в школу (Эдинбургскую академию) успехи его оказались неожиданно ниже среднего уровня, особенно по арифметике. Дошло до того, что товарищи по академии считали его глуповатым. И так продолжалось до тех пор, пока не пришло время заняться геометрией. Максвелл настолько увлекся этой наукой, что скоро вышел в первые ученики. Когда ему не было еще и 15 лет, он предложил (широко известный и сейчас) способ построения эллипса.

В 20-летнем возрасте Максвелл, решивший к этому времени посвятить себя физике, знакомится с книгой М. Фарадея «Экспериментальные исследования по электричеству» (М. Фарадей был еще жив – он умер в 1867 г.). И с этих пор он посвящает себя задаче построения математического описания теоретических идей М. Фарадея, изложенных им, кстати, без единой математической формулы. Результатом этих усилий были знаменитые уравнения Максвелла, на основании которых построена современная теория электромагнитного поля со всеми ее важнейшими приложениями.

Джеймс Клерк Максвелл умер молодым, 48 лет, от рака, мужественно до последнего часа перенося страдания.

(По материалам книги В.В. Карцева «Приключения великих уравнений» - прекрасная книга, мы настоятельно рекомендуем студентам-электромеханикам прочитать ее и познакомиться с другими работами В.В. Карцева, кандидата технических наук, защитившего диссертацию по применению сверхпроводимости в электрических машинах).



Дифференциальные уравнения Максвелла являются, по-существу, *электромагнитной моделью всей Вселенной*. Многочисленные экспериментальные данные, полученные как на нашей Земле, так и с помощью самых современных астрофизических приборов за пределами Галактики, только подтверждают *универсальность* этой модели. До сих пор не известно ни одного экспериментального факта, ставящего под сомнение правильность системы уравнений Максвелла. Напротив, практическое применение этих уравнений имело огромное значение для развития современной цивилизации – начиная от создания радио и кончая новейшими успехами в ядерной физике.

Уравнения Максвелла устанавливают связь между величинами, которыми мы характеризуем электромагнитное поле, в каждой точке пространства. Более того, с помощью уравнений Максвелла может быть описан процесс изменения величин поля в пространстве и во времени, т.е. процесс *распространения* электромагнитного поля.

Вместе с тем, надо четко осознавать, что создание системы *дифференциальных* уравнений Максвелла, справедливых *в каждой точке* пространства, т.е. справедливых для *микрообъектов*, оказалось возможным только на основе *опытных* явлений, наблюдаемых на больших (*макро-*) объектах – электрических и магнитных *контурах*. (Вспомним закон, описывающий явление электромагнитной индукции как возникновение ЭДС *в контуре*, сцепленным с переменным магнитным потоком, и выражение закона полного тока для *магнитной цепи*, в котором сумма падений магнитных напряжений на участках цепи приравнивается МДС намагничивающей обмотки.

Вывод первого уравнения Максвелла

Это уравнение устанавливает связь между *вектором плотности тока проводимости* (размерность – A/m^2) и вектором напряженности *магнитного поля* (A/m) в произвольной точке пространства.

Рассмотрим в декартовой системе координат контур L_z , ограничивающий малую площадку $\Delta S_z = \Delta x \cdot \Delta y$ с нормалью $\vec{n}_z = \vec{q}_z$

Векторы плотности тока и напряженности магнитного поля в выбранной системе координат могут быть выражены через орты $\vec{q}_x, \vec{q}_y, \vec{q}_z$ и свои проекции на координатные оси:

$$\vec{J} = \vec{q}_x J_x + \vec{q}_y J_y + \vec{q}_z J_z$$

$$\vec{H} = \vec{q}_x H_x + \vec{q}_y H_y + \vec{q}_z H_z.$$

Применим к контуру L_z закон полного тока:

$$\oint_{L_z} H_l dl = i_z = J_z \Delta S_z.$$

Здесь предполагается, что площадка ΔS_z достаточно мала для того чтобы считать плотность тока на ней постоянной.

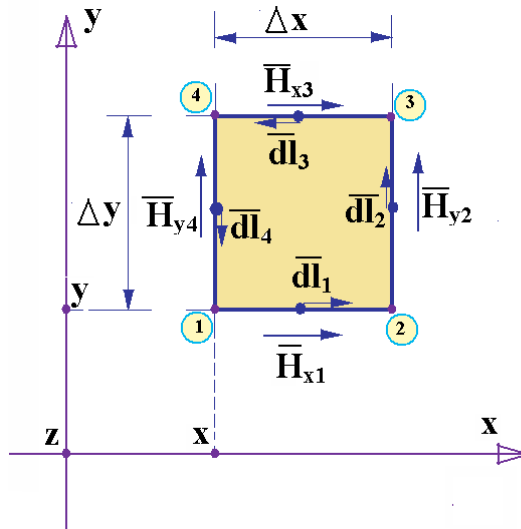


Рис. 2.1. К выводу первого уравнения Максвелла

Перейдем к пределу:

$$J_z = \lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_z} H_l dl}{\Delta S_z} = \text{rot}_z \vec{H} \quad (2.1)$$

Правая часть выражения (2.1) представляет собой проекцию на ось z вектора ротора \vec{H} .

Напомним кратко о физическом смысле этого вектора.

Распространены и другие названия этого вектора: ротация, *вихрь*. В математике ротор поля некоторого вектора \bar{V} обычно обозначается $rot\bar{V}$. В англоязычной литературе часто встречается обозначение $curl\bar{V}$ (*curl* в буквальном переводе означает «завиток», «кудряшка»). Часто также ротор записывают как векторное произведение «вектора» оператора Гамильтона на вектор поля: $\nabla \times \bar{V}$.

Ротор определяется как объемная производная поля в рассматриваемой точке, взятая с обратным знаком (см., например, справочник по высшей математике И.Н. Бронштейна и К.А. Семендяева):

$$rot\bar{V} = -\lim_{v \rightarrow 0} \left(\frac{1}{v} \int_{\Sigma} \bar{V} \times d\bar{S} \right) \quad (2.2a)$$

Заметим, что вектор векторного произведения $\bar{V} \times d\bar{S}$ всегда направлен по касательной к поверхности, ограничивающей объем v .

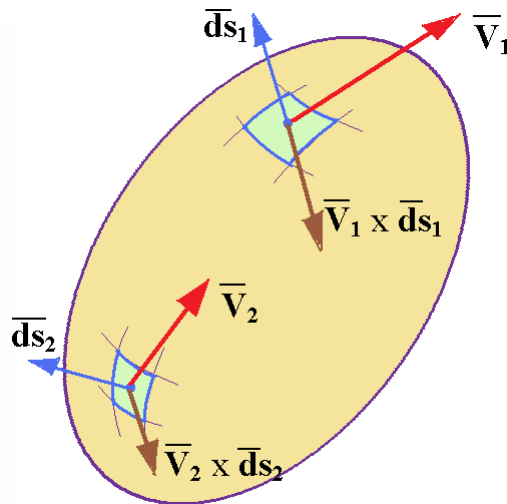


Рис. 2.2. Векторное произведение $\bar{V} \times d\bar{S}$ всегда направлено по касательной к поверхности, ограничивающей объем v

Часто физический смысл ротора поясняют, пользуясь его проекцией на направление нормали к площадке, ориентированной в пространстве та-

ким образом, что циркуляция вектора \bar{V} по контуру, ограничивающему эту площадку, максимальна (рис. 2.3.):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}_n \bar{V} &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int_l \bar{V} d\bar{l}}{S} \\ \text{или} \\ |\operatorname{rot} \bar{V}| &= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int_{l_{\max}} \bar{V} d\bar{l}}{S_{\max}} \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

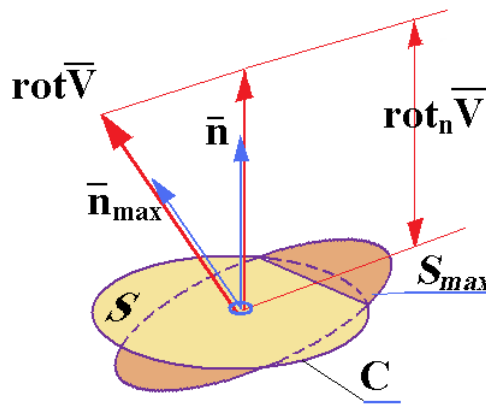


Рис. 2.3. Геометрическая интерпретация вектора $\operatorname{rot} \bar{V}$

Наличие ротора (неравенство его нулю) означает, что поле имеет вихревой характер. И наоборот, равенство ротора нулю означает, что поле (в рассматриваемой точке) имеет вихревой характер. Пользуясь выражением (2.26), в частности, легко показать, что для равномерного поля ротор равен нулю (рис. 2.4).

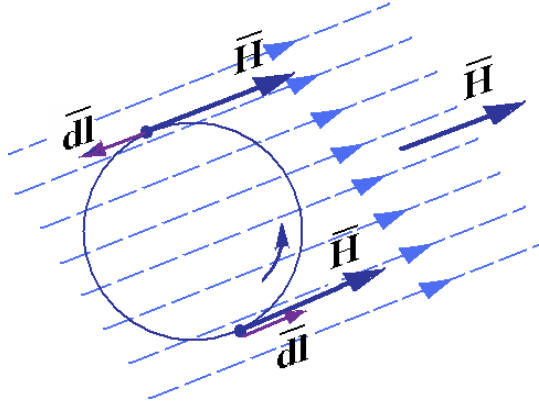


Рис. 2.4. Ротор равномерного магнитного поля равен нулю

Выведем выражение $rot_z \bar{H}$ через частные производные вектора \bar{H} по направлениям координатных осей. Для этого рассмотрим циркуляцию этого вектора вдоль контура со сторонами Δx и Δy (рис. 2.1). Предварительно заметим, что $\bar{dl}_1 = \bar{q}_x dx$ и $\bar{H}_{x1} = \bar{q}_x H_{x1}$, где H_{x1} – x -составляющая вектора напряженности \bar{H} в некоторой точке на стороне 1.

Тогда

$$\int_x^{x+\Delta x} \bar{H}_{x1} \bar{dl}_1 = \int_x^{x+\Delta x} H_{x1} dx = H_{x1,cp} \cdot \Delta x$$

и

$$C_z = \oint_{L_z} \bar{H}_1 \bar{dl} = \underbrace{\int H_{x1} dx}_{[1]} - \underbrace{\int H_{x3} dx}_{[3]} + \underbrace{\int H_{y2} dy}_{[2]} - \underbrace{\int H_{y4} dy}_{[4]}$$

Обозначим значения составляющих напряженности поля в средних точках сторон 1 и 4 через H_x и H_y и найдем средние значения составляющих напряженности в средних точках сторон 2 и 3, полагая, что вследствие малости рассматриваемой площадки напряженность поля вдоль ее сторон изменяется *линейно*.

$$\left. \begin{aligned} H_{x1} \left(\left(x + \frac{\Delta x}{2} \right), y \right) &= H_x \\ H_{x3} \left(\left(x + \frac{\Delta x}{2} \right), (y + \Delta y) \right) &= H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} \Delta y \\ H_{y4} \left(x, \left(y + \frac{\Delta y}{2} \right) \right) &= H_y \\ H_{y4} \left((x + \Delta x), \left(y + \frac{\Delta y}{2} \right) \right) &= H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x \end{aligned} \right\}$$

После подстановки выражений для средних значений составляющих напряженности магнитного поля в выражение для циркуляции вектора C_z получим:

$$\begin{aligned} C_z &= \underbrace{H_x \Delta x}_{[1]} - \underbrace{\left(H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x}_{[3]} - \underbrace{H_y \Delta y}_{[4]} + \underbrace{\left(H_y + \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \Delta y}_{[2]} = \\ &= \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \cdot \underbrace{\Delta x \Delta y}_{S_z} \end{aligned} \quad (2.3)$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} rot_z \bar{H} &= \lim_{\Delta S_z \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_z} H_l dl}{\Delta S_z} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ \text{и аналогично} \\ rot_x \bar{H} &= \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ rot_y \bar{H} &= \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Выражения (2.4) легко запоминаются, если заметить, что индексы циклически меняются местами.

Вернемся к плотности тока, выраженной из закона полного тока (см. (2.1)) и найдем выражение для остальных двух составляющих вектора \bar{J} :

$$J_x = \lim_{\Delta S_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_x} H_l dl}{\Delta S_x} = rot_x \bar{H} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (2.5)$$

$$J_y = \lim_{\Delta S_y \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_y} H_l dl}{\Delta S_y} = \text{rot}_y \bar{H} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad (2.6)$$

где ΔS_x и ΔS_y - площадки $\Delta y \cdot \Delta z$ и $\Delta x \cdot \Delta z$ с нормальями $\bar{n}_x = \bar{q}_x$ и $\bar{n}_y = \bar{q}_y$ соответственно.

Наконец, в векторной форме

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{q}_x \text{rot} \bar{H} + \bar{q}_y \text{rot} \bar{H} + \bar{q}_z \text{rot} \bar{H} = \bar{q}_x J_x + \bar{q}_y J_y + \bar{q}_z J_z = \bar{J}$$

или кратко:

$$\text{rot} \bar{H} = \bar{J}. \quad (2.7)$$

Полученное выражение представляет собой *первое* уравнение Максвелла. Иногда его называют законом полного тока в дифференциальной форме.

Полезна и такая форма записи:

$$\bar{q}_x \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \bar{q}_y \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \bar{q}_z \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \bar{q}_x J_x + \bar{q}_y J_y + \bar{q}_z J_z \quad (2.8)$$

В последнем выражении уже намечен путь к численному решению дифференциального уравнения поля – и дискретизация пространства, и аппроксимация искомой функции с помощью конечных разностей. Заметим, что численные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных – мощное современное средство расчета полей.

Прежде чем перейти ко второму уравнению Максвелла, приведем еще один вывод первого уравнения с использованием известной теоремы Стокса.

Стокс (Stokes) Джордж Габриэль (1819-1903) – английский физик и математик, президент Лондонского Королевского Общества (1885 – 1890). Фундаментальные исследования по гидродинамике (уравнение Навье-Стокса), труды по оптике, спектроскопии и люминесценции, гравиметрии и векторному анализу. Формула Стокса – 1854 г.

Теорема Стокса:

$$\underbrace{\oint_L \vec{A} d\vec{l}}_{\substack{\text{Циркуляция} \\ \text{вектора } \vec{A} \dots \text{по} \\ \text{контур } \dots L}} = \underbrace{\int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S}}_{\substack{\text{Поток } \dots \text{ротора} \\ \text{через } \dots \text{поверхность} \\ \text{опирающуюся } \dots \text{на} \\ \text{контур } \dots L}} \quad (2.9)$$

Вначале посмотрим, чему равна циркуляция вектора \vec{H} по контуру L .

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \Sigma i,$$

где Σi - алгебраическая сумма токов через поверхность, опирающуюся на контур L (в данном случае $\Sigma i = i_1 - i_2$)

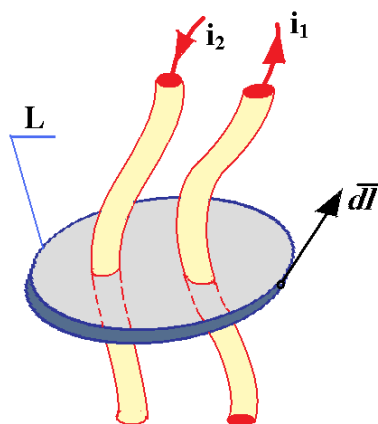


Рис. 2.5. Применение закона полного тока к малому контуру

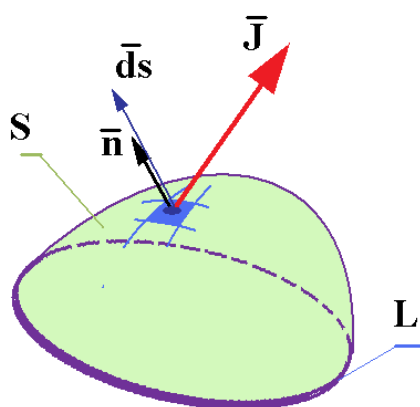


Рис. 2.6. Вычисление тока по известному распределению плотности тока

В более общем случае

$$I = \int_S \overline{J} dS = \int_S J_n dS \quad (2.10)$$

Теперь применим теорему Стокса:

$$\oint_L \overline{H} dl = \int_S \text{rot} \overline{H} dS = \int_S \overline{J} dS, \quad (2.11)$$

откуда

$$\overline{J} = \text{rot} \overline{H}.$$

Вывод получился значительно более кратким, однако здесь мы воспользовались *доказанной ранее* теоремой.

Второе уравнение Максвелла

Это уравнение устанавливает связь между изменением во времени индукции *магнитного* поля в некоторой точке пространства с направлением вектора напряженности *электрического* поля, возникающего в этой точке. Таким образом, второе уравнение Максвелла можно трактовать как запись закона электромагнитной индукции в дифференциальной форме.

Воспользуемся тем же приемом, что и при выводе первого уравнения: рассмотрим в декартовой системе координат достаточно малый контур, применим к нему закон электромагнитной индукции и получим выражение этого закона в предельном случае – при устремлении площадки, которую ограничивает рассматриваемый контур, к нулю.

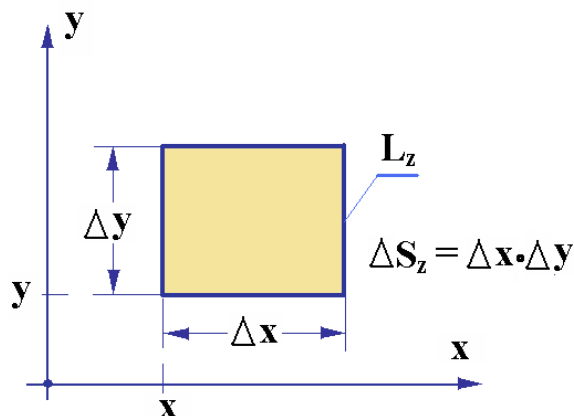


Рис. 2.7. К выводу второго уравнения Максвелла

Будем считать, что контур L_z , ограничивающий площадку $S_z = \Delta x \cdot \Delta y$, содержит только один виток.

Тогда

$$e_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi_z}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Воспользуемся определением ЭДС контура как циркуляции по нему вектора напряженности электрического поля:

$$e_z = \int_{L_z} \overline{E} d\overline{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -S_z \frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (2.13)$$

где

$$\Phi_z = B_z \Delta x \Delta y, \quad B_z = B_n = \overline{B} n_z = \overline{B} q_z.$$

Найдем частную производную индукции магнитного поля по времени для точки пространства, устремив размеры площадки S_z к нулю:

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} = \lim_{S_z \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_z} \overline{E} d\overline{l}}{S_z} = \text{rot}_z \overline{E} = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}. \quad (2.14)$$

Аналогично для контуров, ограничивающих площадки S_x и S_y :

$$-\frac{\partial B_x}{\partial t} = \lim_{S_x \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_x} \overline{E} d\overline{l}}{S_x} = \text{rot}_x \overline{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (2.15)$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial t} = \lim_{S_y \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_y} \overline{E} d\overline{l}}{S_y} = \text{rot}_y \overline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}. \quad (2.16)$$

И далее, так же, как и при выводе первого уравнения:

$$\text{rot} \overline{E} = \overline{q}_x \text{rot} \overline{E} + \overline{q}_y \text{rot} \overline{E} + \overline{q}_z \text{rot} \overline{E} = -\overline{q}_x \frac{\partial B_x}{\partial t} - \overline{q}_y \frac{\partial B_y}{\partial t} - \overline{q}_z \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

или кратко:

$$\text{rot} \overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Напомним, что это уравнение справедливо в любой *точке* пространства.

И при выводе второго уравнения Максвелла можно воспользоваться теоремой Стокса:

$$e = \oint_L \overline{E} d\overline{l} = \int_S \text{rot} \overline{E} d\overline{s} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \overline{B} d\overline{s} = -\int_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} d\overline{s}, \quad (2.18)$$

откуда непосредственно следует (2.17).

Здесь мы воспользовались известным определением потока вектора:

$$\Phi = \int_S \overline{B} d\overline{s}$$

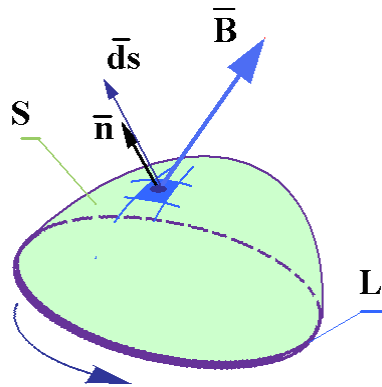


Рис. 2.8. К определению магнитного потока

Если вектор индукции не зависит от времени, $\overline{B} = \text{const}(t)$, магнитное поле называется *стационарным*, в противном случае – *нестационарным*.

Третье уравнение Максвелла (уравнение непрерывности магнитного потока)

Магнитный поток (*скалярная величина!*) можно понимать, как число *силовых трубок* поля, изображенных по определенному правилу: во-первых, все трубки заключают в себе одинаковые элементарные потоки, и, во-вторых, площадь поперечного сечения каждой трубки обратнопропорциональна индукции поля в центре этого сечения. С таким представлением согласуется и изображение *картины поля* с помощью *силовых линий*.

Для магнитного поля, в отличие от электрического, не существует *зарядов*, которые можно было бы считать *источниками* (началами) или *стоками* (концами) силовых линий. Это означает, что поток через замкнутую поверхность всегда равен нулю:

$$\Phi = \int_S \overline{B} ds = 0 \quad (2.19)$$

Эта математическая запись равнозначна утверждению, что силовые линии магнитного поля всегда замкнуты. Рассматривая некоторую ограниченную область (*область задачи*, отделенную от остального пространства *внешней границей*), мы можем получить картину поля, в которой имеются незамкнутые силовые линии, вернее, отрезки силовых линий, начинающиеся и заканчивающиеся на внешней границе области. Однако, повторим, в неограниченном пространстве силовые линии магнитного поля всегда замкнуты.

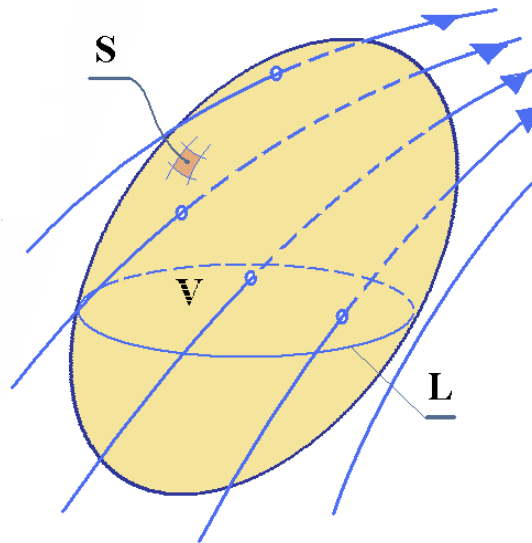


Рис. 2.9. Магнитный поток через замкнутую поверхность равен нулю

Равенство нулю магнитного поля через замкнутую поверхность эквивалентно также утверждению о равенстве нулю *дивергенции* вектора индукции, что следует из определения дивергенции:

$$\operatorname{div} \overline{B} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_S \overline{B} ds}{\Delta v} \quad (2.19)$$

Уравнение

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0, \quad (2.20)$$

устанавливающее свойство *непрерывности* силовых линий магнитного поля, и представляет собой *третье уравнение Максвелла*.

Прийти к выводу (2.20) можно и на основании известной теоремы Остроградского-Гаусса.

Остроградский Михаил Васильевич (1801-1861) – русский математик, академик Петербургской Академии наук (1830) – труды по математическому анализу, математической физике, небесной механике, гидромеханике, баллистике, теории упругости.

Формула предложена в 1828-31 гг.

Гаусс (Gauss) Карл Фридрих (1777- 1855) – немецкий ученый, иностранный член Петербургской АН (1802), иностранный Почетный член Петербургской АН (1824). Теорема Гаусса для электростатики устанавливает связь между потоком напряженности электрического поля через замкнутую поверхность и электрическим зарядом внутри этой поверхности. Труды по математическому анализу, алгебре, физике, астрономии, электричеству и магнетизму, геодезии.

$$\oint_S \bar{B} d\bar{s} = \int_V \operatorname{div} \bar{B} dv \quad (2.21)$$

Полезно выразить $\operatorname{div} \bar{B}$ через частные производные вектора \bar{B} по направлениям координатных осей. Для этого рассмотрим, как и прежде, в декартовых координатах, малый объем $dv = dx \cdot dy \cdot dz$ (рис. 2.10)

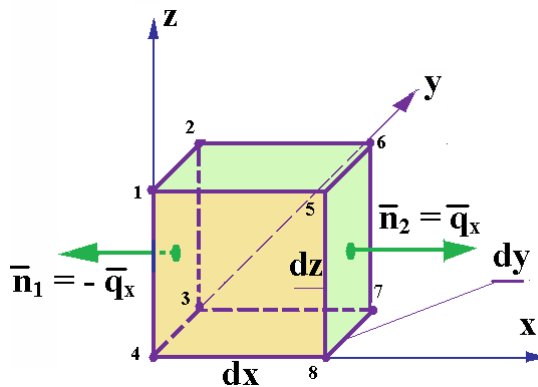


Рис. 2.10. К выражению $\operatorname{div} \bar{B}$ через частные производные вектора \bar{B}

Вычислим поток через грань 1234:

$$d\Phi_1 = B_n dS_1 = -B_x dydz, \quad (2.22)$$

где B_x – проекция вектора \bar{B} (среднего для грани 1234) на ось x .

Поток через грань 5678, для которой x -составляющая вектора \bar{B} равна

$$B_x(x+dx, y, z) = B_x(x, y, z) + \frac{\partial B_x}{\partial x} dx:$$

$$d\Phi_x = d\Phi_1 + d\Phi_2 = \frac{\partial B_x}{\partial x} \cdot dx \cdot (dydz). \quad (2.23)$$

Суммарный поток через эти две грани:

$$d\Phi_x = \frac{\partial B_x}{\partial x} \cdot dx \cdot (dydz) = \frac{\partial B}{\partial x} dv \quad (2.24)$$

Аналогичные выражения для двух других пар граней:

$$d\Phi_y = \frac{\partial B_y}{\partial y} dv \quad (2.25)$$

$$d\Phi_z = \frac{\partial B_z}{\partial z} dv. \quad (2.26)$$

Полный поток через поверхность, ограничивающую объем dv :

$$d\Phi = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z = \underbrace{\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right)}_{\text{div} \bar{B}} dv. \quad (2.27)$$

Таким образом,

$$\text{div} \bar{B} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right). \quad (2.28)$$

В заключение заметим, что если дивергенция равна нулю, поле называется *соленоидальным*.

Четвертое уравнение Максвелла.

Это уравнение устанавливает связь между вектором *электрической индукции* \bar{D} (часто его называют вектором электрического *смещения*) и вектором напряженности электрического поля:

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \bar{E}, \quad (2.29)$$

где ε_0 – диэлектрическая постоянная, ε относительная диэлектрическая проницаемость среды.

В отличие от магнитного поля, дивергенция вектора индукции электрического поля не равна нулю, что, в частности, следует из известной теоремы Гаусса:

$$N = \oint_S \bar{D} d\bar{s} = \Sigma q = \int_V \rho \cdot dv = \int_V \text{div} \bar{D} dv, \quad (2.30)$$

где N – поток вектора электрической индукции, Σq – суммарный электрический заряд в объеме v , ограниченном поверхностью S , ρ – удельная (объемная) плотность электрических зарядов.

Пятое уравнение Максвелла

Пятое уравнение Максвелла часто называют законом Ома в дифференциальной форме:

$$\bar{J} = \gamma \bar{E} \quad (2.31)$$

где γ – электропроводность среды, $\text{Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$, \bar{J} – вектор плотности тока в рассматриваемой точке пространства, $\text{А}/\text{м}^2$, \bar{E} – вектор напряженности электрического поля в той же точке, $\text{В}/\text{м}$.

От (2.31) легко перейти к формулировке закона Ома в его обычной форме – для физического объекта. При этом используются *интегральные* величины: ток, напряжение, сопротивление.

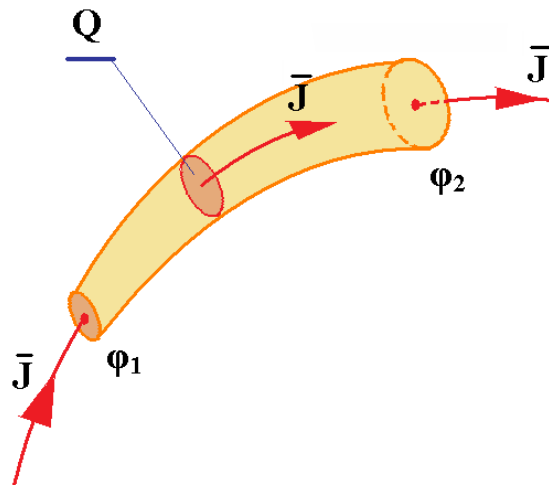


Рис. 2.11. Определение тока по плотности тока

- Ток: $i = JQ = \gamma EQ$, Q - площадь поперечного сечения проводника;
- напряжение: $U_{12} = \phi_1 - \phi_2$, в правой части – разность потенциалов;
- сопротивление:

$$r = \frac{U_{12}}{i} = \frac{El}{\gamma EQ} = \frac{l}{\gamma Q} = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{Q}$$

Говоря об электрическом сопротивлении физического объекта, следует понимать, что эта величина зависит не только от свойств материала и формы объекта, но и от того, как приложены электроды, к которым подводится напряжение при измерении (действительном или воображаемом). Таким образом, точное определение сопротивления требует решения полевой задачи (см. рис. 2.12).

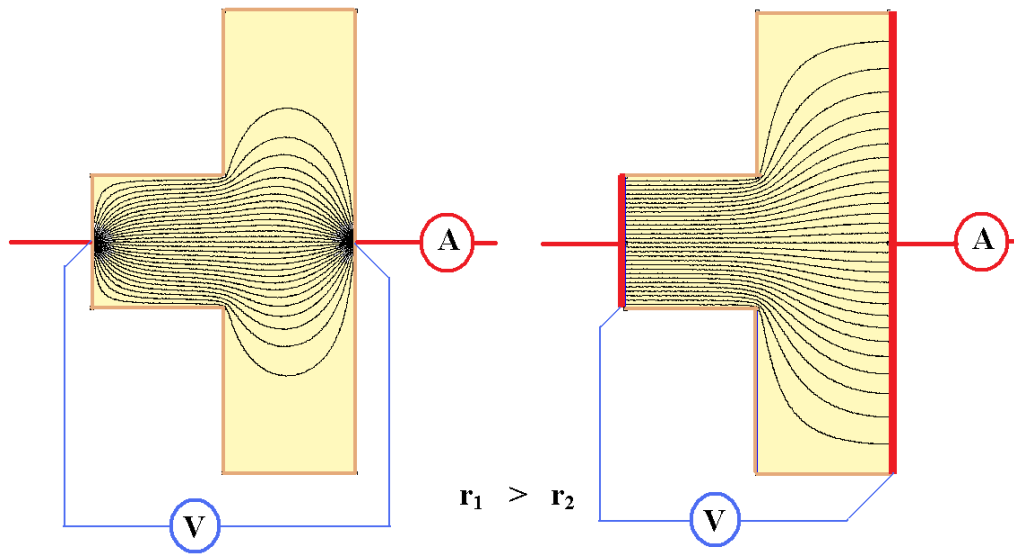


Рис. 2.12. Активное сопротивление проводника зависит от формы электродов

Шестое и седьмое уравнения Максвелла.

Эти уравнения связывают векторы индукции и векторы напряженности электрического и магнитного полей. Соотношения между этими величинами определяются свойствами среды – ε и μ - значениями абсолютных диэлектрической и магнитной проницаемостей:

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \bar{E} \quad (2.32)$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H} = \mu_0 \mu_r \bar{H} \quad , \quad (2.33)$$

где ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, ε_r и μ_r – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Значения электрической и магнитной постоянных:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot c^2} \frac{\text{Фарад}}{\text{м}} \quad \text{и} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Генри}}{\text{м}},$$

где c – скорость света в пустоте, равная $2,998 \cdot 10^8$ м/с.

Магнитные свойства материалов весьма различны. Особо следует выделить группу *ферромагнитных* материалов, к которым, в частности, относятся *электротехнические стали*. Эти материалы обладают свойством уси-

ливать приложенное внешнее поле (проницаемость μ в (2.33) можно рассматривать как некий коэффициент усиления). В наибольшей мере это свойство проявляется в сравнительно слабых полях, а при увеличении напряженности внешнего поля оно заметно снижается, причем довольно резко. Связано это явление с доменной структурой ферромагнетиков и с ориентацией доменов во внешнем поле. Уменьшение магнитной проницаемости в сильных полях называется *насыщением*, а нелинейная зависимость между индукцией B и напряженностью H – *кривой намагничивания* материала. В таблице 2.1. приведены значения магнитной проницаемости типичной электротехнической стали для пяти значений напряженности поля. Обычно о степени насыщения стали судят не по величине напряженности поля, а по индукции. Из таблицы видно, что резкое уменьшение магнитной проницаемости наступает, если индукция в стали превышает примерно 1,5 Т.

Таблица 2.1

$H, A/m$	414	3850	23000	70000	300000
B, T	1,0	1,5	1,8	2,0	2,29
μ_r	1910	311	62	23	6

Для магнитотвердых материалов (постоянных магнитов) связь между индукцией и напряженностью выражается с помощью *вектора намагниченности* \bar{M} :

$$\bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H} = \mu (\bar{M} + \bar{H}).$$

Об уравнениях Максвелла

Эти уравнения представляют собой математическую запись наблюдаемых в опыте явлений. Они составляют полный набор (систему) уравнений, из которых вытекают все *основные свойства поля*. Эти уравнения сформу-

лировал Максвелл в 60-х гг. XIX в, а окончательную математическую форму им придал Г. Герц.

Несомненной заслугой Дж.К. Максвелла явилось то, что он ввел понятие *токов смещения*. С помощью этого понятия по существу утверждается *теория близкодействия*. Заметим, что многие ученые того времени, включая Ампера и других представителей французской школы, придерживались *теории далекодействия*.

Уравнения Максвелла представляют собой электромагнитную модель Вселенной.