

Раздел 3. Основные понятия векторной алгебры, используемые при описании электромагнитного поля. Векторный магнитный потенциал

В этом разделе мы очень кратко, без доказательств, напомним о тех основных понятиях и выражениях векторной алгебры, которые окажутся нам полезными при расчетах электромагнитных полей.

Скалярное и векторное произведения двух векторов

Скалярное произведение:

$$(\bar{a}\bar{b}) = ab \cdot \cos(\angle ab) \quad (3.1)$$

Векторное произведение:

$$[\bar{a}\bar{b}] = \bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}; \quad |\bar{c}| = ab \cdot \sin(\angle ab), \quad (3.2)$$

Вектор \bar{c} направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы \bar{a} и \bar{b} , при этом направление \bar{c} таково, что если смотреть с конца вектора-произведения \bar{c} на плоскость, в которой расположены векторы-сомножители \bar{a} и \bar{b} , то перемещение от первого вектора, \bar{a} , ко второму, \bar{b} , по кратчайшему пути (поворот на угол $\varphi < \pi$) должно происходить против часовой стрелки (рис. 3.1).

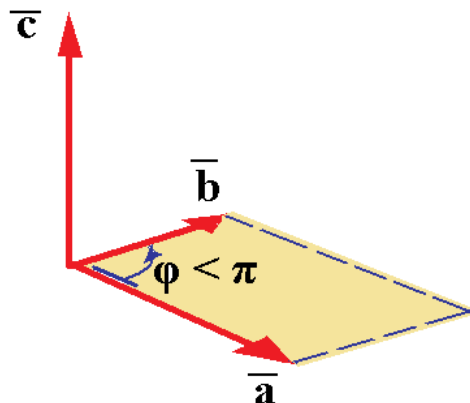


Рис. 3.1. Векторное произведение двух векторов

С помощью векторного произведения в виде вектора можно представить любую площадку.

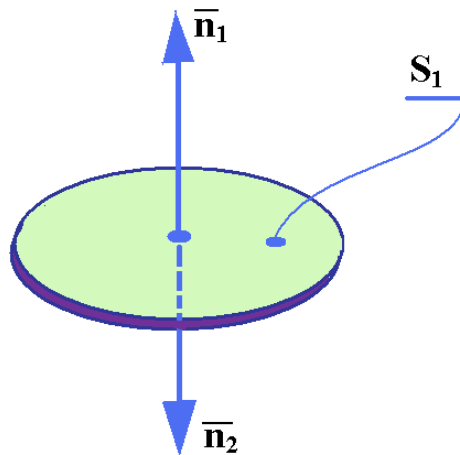


Рис. 3.2. К определению вектора площадки

Участок бесконечно тонкой оболочки (рис. 3.2) может рассматриваться как часть двусторонней поверхности. Таким образом, этот участок представляет собой совокупность двух площадок, в случае на рис. 3.2 – «верхней» с нормалью \bar{n}_1 и «нижней» с нормалью \bar{n}_2 . Выражения для *векторов площадок* записываются следующим образом:

$$\bar{S}_1 = S_1 \bar{n}_1 \text{ и } \bar{S}_2 = S_2 \bar{n}_2.$$

Очевидно, $S_1 = S_2$ и вектор двусторонней площадки $S = S_1 + S_2$ равен нулю:

$$\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = S_{12}(\bar{n}_1 + \bar{n}_2) = 0, \text{ где } S_{12} = S_1 = S_2.$$

Отсюда следует, что вектор любой замкнутой поверхности равен нулю.

Свойства произведений:

– скалярного:

– коммутативность:

$$(\bar{a}\bar{b}) = (\bar{b}\bar{a}) \tag{3.3}$$

– дистрибутивность:

$$\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{ab} + \overline{ac} \quad (3.4)$$

– ассоциативность относительно скалярного множителя, но не относительно векторного:

$$\left. \begin{aligned} m(\overline{ab}) &= (\overline{ma})\overline{b} \\ \overline{a}(\overline{bc}) &\neq (\overline{ab})\overline{c} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

- скалярное произведение может быть представлено через проекции векторов на координатные оси:

$$(\overline{ab}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (3.6)$$

Часто используемое свойство скалярного произведения двух векторов:

$$\overline{ab} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a} \perp \overline{b}.$$

С помощью скалярного произведения «вектора» оператора Гамильтона на какой-либо вектор можно записать дивергенцию вектора. Например, для вектора индукции магнитного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \overline{B} &= \nabla \overline{B} = \\ &= \left(\overline{q}_x \frac{\partial}{\partial x} + \overline{q}_y \frac{\partial}{\partial y} + \overline{q}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (\overline{q}_x B_x + \overline{q}_y B_y + \overline{q}_z B_z) = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Свойства векторного произведения:

– отсутствие коммутативности:

$$[\overline{ab}] = -[\overline{ba}] \quad (3.7)$$

- ассоциативность относительно скалярного множителя, но не относительно векторного:

$$\left. \begin{aligned} m[\overline{ab}] &= [\overline{mab}] \\ \overline{a}[\overline{bc}] &\neq [(\overline{ab})\overline{c}] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

- дистрибутивность:

$$[\overline{a}, \overline{b} + \overline{c}] = [\overline{ab}] + [\overline{ac}] \quad (3.9)$$

– векторное произведение может быть представлено через проекции векторов на координатные оси:

$$[\overline{ab}] = \overline{q}_x (a_y b_z - b_y a_z) + \overline{q}_y (a_z b_x - b_z a_x) + \overline{q}_z (a_x b_y - b_x a_y) \quad (3.10)$$

ИЛИ

$$[\bar{a}\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{q}_x & \bar{q}_y & \bar{q}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

Часто используемое свойство векторного произведения двух векторов:

$$[\bar{a}\bar{b}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} \text{ параллелен } \bar{b}$$

Векторные функции одного скалярного аргумента

Векторная функция \bar{a} скалярного аргумента t в декартовой системе координат и ее производная выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}(t) &= \bar{q}_x a_x(t) + \bar{q}_y a_y(t) + \bar{q}_z a_z(t) \\ \frac{d\bar{a}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{a}(t + \Delta t) - \bar{a}(t)}{\Delta t} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Свойства производных и правила дифференцирования:

$$\frac{d(\bar{a} + \bar{b})}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} + \frac{d\bar{b}}{dt}; \quad (3.13)$$

$$\frac{d[m(t)\bar{a}(t)]}{dt} = m \frac{d\bar{a}(t)}{dt} + \bar{a}(t) \frac{dm(t)}{dt}, \quad (3.14)$$

где $m(t)$ – скалярная функция;

$$\frac{d(\bar{a}\bar{b})}{dt} = \left(\frac{d\bar{a}}{dt} \bar{b} \right) + \left(\bar{a} \frac{d\bar{b}}{dt} \right); \quad (3.15)$$

$$\frac{d[\bar{a}\bar{b}]}{dt} = \left[\frac{d\bar{a}}{dt} \bar{b} \right] + \left[\bar{a} \frac{d\bar{b}}{dt} \right]. \quad (3.17)$$

Векторные и скалярные поля

Поле некоторой величины (a или \bar{a}) характеризуется тем, что каждой точке пространства ставится в соответствие определенное значение этой

величины. В зависимости от того, скаляром или вектором является эта величина, соответствующие поля называются *скалярными* или *векторными*.

Примеры полей:

– скалярных: поле температуры, поле плотности вещества, поле электрической проводимости и т.д.

– векторных: поле сил, поле скоростей, поле вектора напряженности электрического поля, поле вектора плотности тока и т.д.

Важным является понятие радиус-вектора \vec{r} – вектора, проведенного из начала координат в точку наблюдения P . Рассматриваемый в качестве аргумента скалярной или векторной функции, радиус-вектор позволяет выразить скалярные и векторные поля в виде: $\varphi(\vec{r})$ или $\vec{A}(\vec{r})$.

В декартовой системе координат векторное поле может быть задано *тремя* скалярными функциями: $A_x(\vec{r})$, $A_y(\vec{r})$ и $A_z(\vec{r})$.

Как скалярные, так и векторные поля могут как не зависеть от времени, и в этом случае они называются *стационарными*, так и зависеть от него (*нестационарные* поля: $\varphi(t)$ и $\vec{A}(t)$).

Графическое изображение полей

Скалярные поля можно изображать в виде совокупности *эквипотенциальных поверхностей*. Если поле изображается в некотором плоском сечении, то следы пересечения эквипотенциальных поверхностей с плоскостью сечения образуют *эквипотенциальные линии*, т.е. линии, на которых функция имеет одно и то же значение. На рис. 3.3 показана картина скалярного поля, причем значения потенциала φ на соседних эквипотенциалах отличаются на одну и ту же величину $\Delta\varphi$.

Уравнение эквипотенциальной поверхности (иногда говорят *поверхности уровня*):

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0$$

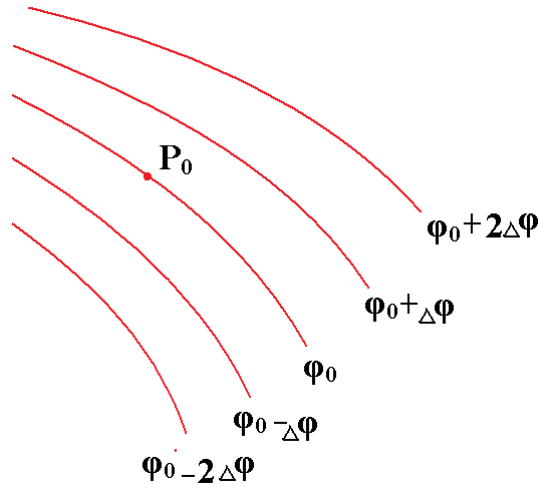


Рис. 3.3. Эквипотенциали скалярного поля $\varphi(\vec{r})$

Векторные поля изображаются в виде картин *линий поля* (в применении к электрическим и магнитным полям обычно говорят о картинах *силовых линий*):

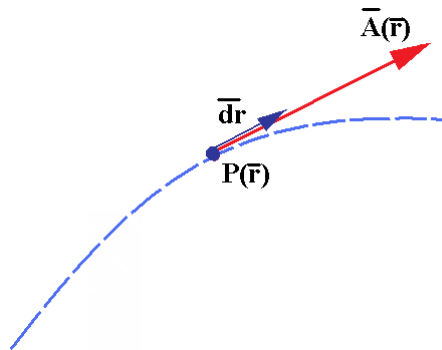


Рис. 3.4. Силовая линия векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$

В любой точке линии поля $\vec{A}(\vec{r})$ векторная величина \vec{A} направлена по *касательной* к ней. С помощью понятия векторного произведения это можно записать следующим образом:

$$[d\vec{r}\vec{A}(\vec{r})] = 0$$

Используя (3.11), несложно показать, что в декартовой системе координат

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad (3.18)$$

Силовая трубка (трубка поля) – это понятие обычно используется при расчете потоков и магнитных проводимостей. Силовая трубка – это часть пространства, ограниченная непрерывной поверхностью, образованной силовыми линиями. На рис. 3.5 показана силовая трубка магнитного поля. В точках P_1 и P_2 векторы индукции \vec{B}_1 и \vec{B}_2 направлены по касательным к силовой линии, проведенной на поверхности силовой трубки пунктиром.

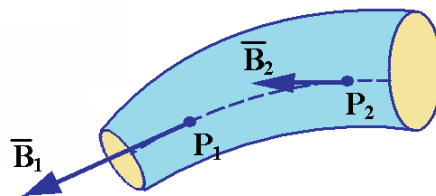


Рис. 3.5. Силовая трубка магнитного поля

Градиент скалярной функции

Пусть задано скалярное поле $\varphi(\vec{r})$. Возьмем производную функции $\varphi(\vec{r})$ по направлению s :

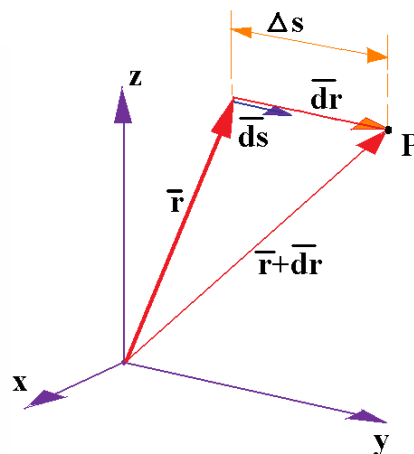


Рис. 3.6. К выводу выражения для градиента

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(\bar{r} + d\bar{r}) - \varphi(\bar{r})}{\Delta s}. \quad (3.19)$$

Запишем выражение для производной через проекции на координатные оси:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds}. \quad (3.20)$$

Но

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\bar{s}, \bar{q}_x), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\bar{s}, \bar{q}_y), \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\bar{s}, \bar{q}_z), \quad (3.21)$$

где \bar{s} – единичный вектор направления перемещения.

Вектор перемещения $d\bar{s}$ также выразим через проекции на оси координат:

$$d\bar{s} = \bar{q}_x dx + \bar{q}_y dy + \bar{q}_z dz \quad (3.22)$$

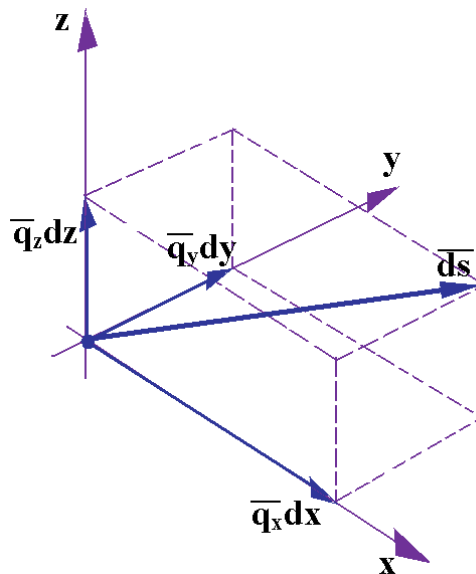


Рис. 3.7. Представление вектора $d\bar{s}$ через проекции на оси координат

Заметим, что скалярные произведения типа $(\bar{q}_x d\bar{s})$ могут быть записаны следующим образом:

$$(\bar{q}_x d\bar{s}) = dx = ds \cdot \cos(\bar{s}, \bar{q}_x) \quad (3.33)$$

С учетом этого

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \cos(\bar{s}, \bar{q}_x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \cos(\bar{s}, \bar{q}_y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \cos(\bar{s}, \bar{q}_z) \quad (3.24)$$

Правая часть этого выражения представляет собой не что иное, как проекцию некоторого вектора $\bar{q}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{q}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{q}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ на направление вектора \bar{s} . Проекция этого вектора на направление вектора \bar{s} есть скалярное произведение этих векторов, таким образом:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \left(\bar{q}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{q}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{q}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) \bar{s}. \quad (3.25)$$

Вектор, стоящий в (3.25) в качестве первого сомножителя, называется *градиентом* – он показывает направление быстрейшего возрастания скалярной величины φ и по абсолютной величине равен производной φ в этом направлении.

$$grad\varphi = \bar{q}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{q}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{q}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (3.26)$$

Частная производная φ по направлению \bar{s} есть s -ая компонента градиента:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = (\bar{s} \cdot grad\varphi) = grad_s \varphi \quad (3.27)$$

Положив $\bar{s} = \bar{n}$, где \bar{n} - нормаль к линии уровня, легко показать, что

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \bar{n}. \quad (3.28)$$

Несколько полезных формул, связанных с градиентом:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \cdot \cos(\bar{s}, \bar{n}) \quad (3.29)$$

$$|grad\varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2} \quad (3.30)$$

$$grad(\varphi + \psi) = grad\varphi + grad\psi \quad (3.31)$$

$$grad(\varphi\psi) = \varphi \cdot grad\psi + \psi \cdot grad\varphi \quad (3.32)$$

$$grad(F(\varphi)) = F'(\varphi) grad\varphi. \quad (3.33)$$

Таким образом, рассматривая *скалярное* поле, мы определили связанное с ним *векторное* поле – поле градиента.

Вектор, являющийся градиентом некоторого скаляра φ , называется *потенциальным вектором*, а скаляр φ - *потенциалом*.

Геометрическая интерпретация градиента дается рисунком 3.8.

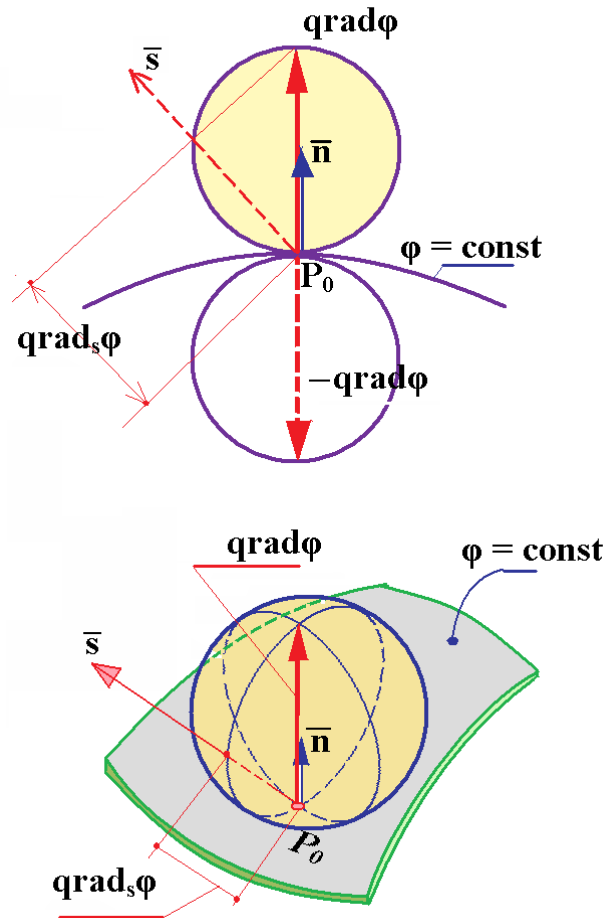


Рис. 3.8. Изображение градиентов двух- и трехмерного полей

Часто градиент выражают с помощью оператора Гамильтона ∇ :

$$\nabla = \bar{q}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{q}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{q}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.34)$$

$$grad\varphi = \nabla\varphi \quad (3.35)$$

Говоря об операторе Гамильтона, следует иметь в виду, что это именно *оператор* (т.е. символ, обозначающий выполнение некоторой операции

над величиной, называемой операндом), но не вектор. Однако использование его как вектора в выражениях скалярного и векторного произведений позволяет записывать результаты действий в более краткой форме. Например, умножение (3.34) на скаляр φ и использование свойства (3.6) позволяет получить (3.35).

Так же формально выполнив действия, соответствующие скалярному произведению «вектора» ∇ на вектор индукции магнитного поля, получим выражение для скалярной величины $div\bar{B}$:

$$\begin{aligned} (\nabla\bar{B}) &= \left(\bar{q}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{q}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{q}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (\bar{q}_x B_x + \bar{q}_y B_y + \bar{q}_z B_z) = \\ &= \left(\left(\bar{q}_x \frac{\partial}{\partial x} \right) (\bar{q}_x B_x) \right) + \left(\left(\bar{q}_y \frac{\partial}{\partial y} \right) (\bar{q}_y B_y) \right) + \left(\left(\bar{q}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (\bar{q}_z B_z) \right) + \dots = \\ &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = div\bar{B} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Таким же образом можно показать, что

$$rot\bar{a} = [\nabla\bar{a}]. \quad (3.37)$$

Используя выражение (3.10) для векторного произведения, с помощью оператора Гамильтона можно получить выражение ротора через составляющие вектора по координатным осям:

$$rot\bar{a} = \bar{q}_x \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \bar{q}_y \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \bar{q}_z \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \quad (3.38)$$

Введение условного вектора ∇ позволяет не только сократить запись выражений, но и, пользуясь свойствами скалярного и векторного произведений и других операций векторной алгебры, выявлять важные свойства рассматриваемых полей.

Например, найдем в декартовых координатах ротор градиента некоторой скалярной величины ψ :

$$[\nabla(\nabla\psi)] = \dots = \left(\frac{\partial\psi}{\partial z\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y\partial z} \right) \bar{q}_x + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z\partial x} \right) \bar{q}_y + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x\partial y} \right) \bar{q}_z = 0 \quad (3.39)$$

Как следует из (3.39), поле (вектора) градиента некоторой скалярной величины не имеет ротора, т.е. является *безвихревым*.

Верно и обратное утверждение: *если ротор вектора равен нулю, существует скалярный потенциал*, характеризующий поле этого вектора.

Еще один пример. Найдем *дивергенцию ротора* некоторого вектора \bar{a} :

$$\begin{aligned} \nabla[\nabla\bar{a}] &= \underbrace{\left(\bar{q}_x \frac{\partial}{\partial x} + \bar{q}_y \frac{\partial}{\partial y} + \bar{q}_z \frac{\partial}{\partial z} \right)}_{\text{скалярное произведение}} \left(\text{правая часть (3.38)} \right) = \\ &= \frac{\partial a_z}{\partial y\partial x} - \frac{\partial a_y}{\partial z\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial z\partial y} - \frac{\partial a_z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial a_y}{\partial x\partial z} - \frac{\partial a_x}{\partial y\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Вывод: *дивергенция ротора (вектора) всегда равна нулю.*

Верно и обратное утверждение: *если дивергенция вектора равна нулю, этот вектор является ротором* некоторой другой векторной величины, которая в этом случае называется *векторным потенциалом*.

$$\operatorname{div}\bar{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} = \operatorname{rot}\bar{b}. \quad (3.41)$$

Вспомним, что согласно третьему уравнению Максвелла $\operatorname{div}\bar{B} = 0$. В соответствии с (3.41)

$$\bar{B} = \operatorname{rot}\bar{A}. \quad (3.42)$$

Векторная функция \bar{A} , называемая *векторным магнитным потенциалом*, широко используется при описании электромагнитного поля.

Выражение (3.42) можно рассматривать как формальное определение векторного магнитного потенциала. Физический смысл этой векторной функции удобно выявить на примере. Рассмотрим цилиндрический провод с равномерно распределенной по его сечению плотностью тока, изображенный на рис. 3.9 (пример взят из книги В.А. Говоркова «Электрические и магнитные поля», Связьиздат, 1951).

Рассмотрим поле провода в цилиндрической системе координат (r, z, θ) .

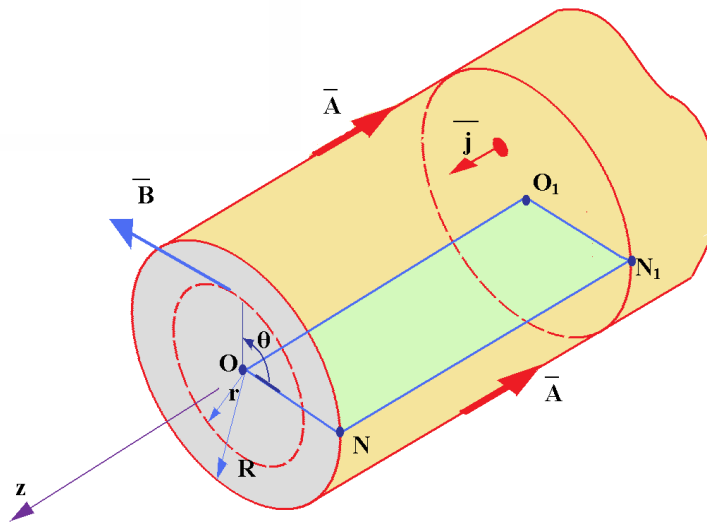


Рис. 3.9. К выводу выражения для векторного магнитного потенциала цилиндрического провода с постоянной плотностью тока (пример из книги В.А. Говоркова)

Применим закон полного тока к контуру в виде окружности радиуса r , проведенной на поперечном сечении внутри провода ($r < R$):

$$\oint \frac{1}{\mu} \overline{B} d\overline{l} = I_{0-r} \quad (3.43)$$

В силу симметрии модуль вектора индукции не зависит от угловой координаты θ :

$$\overline{B} = B_0 \overline{l}_\theta, \quad (3.44)$$

где \overline{l}_θ - единичный вектор в точке (r, z, θ) , направленный по касательной к окружности радиуса r .

С учетом этого

$$\oint \frac{1}{\mu} \overline{B} d\overline{l} = 2\pi r B_0 \frac{1}{\mu}. \quad (3.45)$$

Ток, протекающий через часть проводника, охваченную контуром:

$$I_{0-r} = j_z \pi r^2 = I \left(\frac{r}{R} \right)^2,$$

откуда, учитывая (3.43) и (3.45):

$$2\pi r B_0 \frac{1}{\mu} = I \left(\frac{r}{R} \right)^2 \quad (3.46)$$

и

$$B = B_0 = \frac{\mu I}{2\pi R^2} r \quad (3.47)$$

Воспользовавшись выражением ротора в цилиндрических координатах (рекомендуем в качестве справочного пособия: А.А. Татур, Основы теории электромагнитного поля, «Высшая школа», 1989), с учетом условий симметрии получим:

$$[\nabla \bar{B}] = \frac{\partial}{\partial r} (r B_0) \frac{\bar{q}_z}{r} = \frac{\mu I}{\pi R^2} \bar{q}_z = \mu j_z \bar{q}_z \quad (3.48)$$

После деления на μ :

$$[\nabla \bar{H}] = j_z \bar{q}_z \quad (3.49)$$

Поскольку ротор поля не равен нулю, вектор \bar{H} не может быть представлен в виде градиента какой-либо скалярной величины (см. (3.39)), и, следовательно, поле внутри провода с током является вихревым.

Найдем выражение для векторного магнитного потенциала.

$$\bar{B} = [\nabla \bar{A}] = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \bar{l}_0 = \frac{\mu j_z \pi r^2}{2\pi r} \bar{l}_0 = \frac{\mu j_z r}{2} \bar{l}_0$$

Здесь учтено, что по условиям симметрии задачи векторный магнитный потенциал имеет только z -ую составляющую. Доказать это несложно, рассмотрев две точки, расположенные на одной прямой, параллельной оси провода (т.е. оси z) и рассчитав сумму составляющих векторного магнитного потенциала в некоторой третьей точке, расположенной, например, между ними. При этом следует учесть, что значения векторов индукции в двух выбранных точках одинаковы, и то, что векторы индукции, являясь роторами, определенным образом ориентированы относительно площадок, на контурах которых рассчитываются циркуляции векторного магнитного потенциала.

После интегрирования:

$$A_z = -\frac{\mu j_z r^2}{4} + const$$

и, если считать, что на оси провода векторный магнитный потенциал равен нулю,

$$\bar{A} = A_z \bar{q}_z = -\frac{\mu j_z r^2}{4}. \quad (3.50)$$

Далее, вычислим циркуляцию векторного магнитного потенциала по замкнутому контуру ONN_1O_1O (приняв, что $OO_1 = NN_1 = ed.$ длины) и применим теорему Стокса:

$$\oint_l \bar{A} d\bar{l} = \int_s [\nabla \bar{A}] d\bar{s} \quad (3.51)$$

и, поскольку $\bar{B} = rot \bar{A}$,

$$\oint_l \bar{A} d\bar{l} = \int_s \bar{B} d\bar{s}. \quad (3.52)$$

Выражение (3.52) позволяет сделать важный вывод: циркуляция векторного магнитного потенциала по замкнутому контуру равна потоку вектора магнитной индукции через площадку, ограниченную этим контуром.

Закончим с вычислением циркуляции \bar{A} :

$$\oint_l \bar{A} d\bar{l} = \underbrace{A_{z(O_1N)} \bar{q}_z \overline{O_1N}}_0 + A_{z(NN_1)} \bar{q}_z \overline{NN_1} + \underbrace{A_{z(N_1O_1)} \bar{q}_z \overline{N_1O_1}}_0 + \underbrace{A_{z(OO_1)} \bar{q}_z \overline{OO_1}}_0$$

Учитывая (3.50) и то, что $\overline{NN_1} = -\bar{1}$, получим:

$$A_{z(NN_1)} = -\frac{\mu j_z R^2}{4} \quad (3.53)$$

Итак, циркуляция векторного магнитного потенциала по рассматриваемому контуру равна магнитному потоку, замыкающемуся внутри провода (напомним, что силовые линии поля представляют собой окружности с центром на оси провода):

$$\oint_{ONN_1O_1} \bar{A} d\bar{l} = \Phi_{внутр} = \frac{\mu j_z R^2}{4} = \frac{\mu I}{4\pi} \quad (3.54)$$

Посмотрим, каким уравнением описывается распределение векторного магнитного потенциала по поперечному сечению проводника с током при $\vec{j} = j_z \vec{q}_z = \text{const}$.

Воспользуемся первым и седьмым уравнениями Максвелла и выражением вектора индукции через векторный магнитный потенциал:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j},$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H},$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

Умножим первое уравнение на μ и учтем второе и третье уравнения:

$$\mu \cdot \text{rot} \vec{H} = \text{rot}(\mu \vec{H}) = \text{rot} \vec{B} = \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \mu \vec{j}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае вектор плотности тока коллинеарен оси z , отлична от нуля только z -ая составляющая ротора:

$$\text{rot}_z(\text{rot} \vec{A}) = \mu \cdot j_z.$$

Выразив проекцию ротора на ось z через частные производные по направлениям координатных осей, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\text{rot}_y \vec{A}) - \frac{\partial}{\partial y}(\text{rot}_x \vec{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) = \\ &= -\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\nabla^2 A_z = \mu \cdot j_z \end{aligned}$$

или в стандартной форме:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu \cdot j_z. \quad (3.55)$$

Выражение (3.55) представляет собой уравнение Пуассона – одно из классических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, методы решения которых изучаются в математической физике.

Проверим, удовлетворяет ли найденное распределение векторного магнитного потенциала по поперечному сечению провода (см. (3.50)) уравнению Пуассона:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-\mu \cdot j_z \frac{r^2}{4} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(-\mu \cdot j_z \frac{r^2}{4} \right) = \\
& = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-\mu \cdot j_z \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(-\mu \cdot j_z \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} \right) = \\
& = -\mu \cdot j_z \cdot \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 (x^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (y^2)}{\partial y^2} \right] = -\mu \cdot j_z \cdot \frac{1}{4} \left[\frac{\partial (2x)}{\partial x} + \frac{\partial (2y)}{\partial y} \right] = -\mu \cdot j_z
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение Пуассона выполняется.

Найдем теперь распределение индукции по поперечному сечению провода с током, рассматривая вектор индукции как ротор векторного магнитного потенциала.

$$\begin{aligned}
\bar{B} = \text{rot} \bar{A} &= \bar{q}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \bar{q}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \bar{q}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \\
&= \bar{q}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - \bar{q}_y \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \bar{q}_x \frac{\partial}{\partial y} \left(-\mu \cdot j_z \frac{x^2 + y^2}{4} \right) - \bar{q}_y \frac{\partial}{\partial x} \left(-\mu \cdot j_z \frac{x^2 + y^2}{4} \right) = \\
&= -\mu \cdot j_z \cdot \frac{1}{4} (2y \cdot \bar{q}_x - 2x \cdot \bar{q}_y) = \frac{\mu \cdot j_z}{2} (x \cdot \bar{q}_y - y \cdot \bar{q}_x) = \frac{\mu \cdot j_z}{2} r \cdot \bar{l}_0 \quad (3.56)
\end{aligned}$$

что согласуется с (3.47).

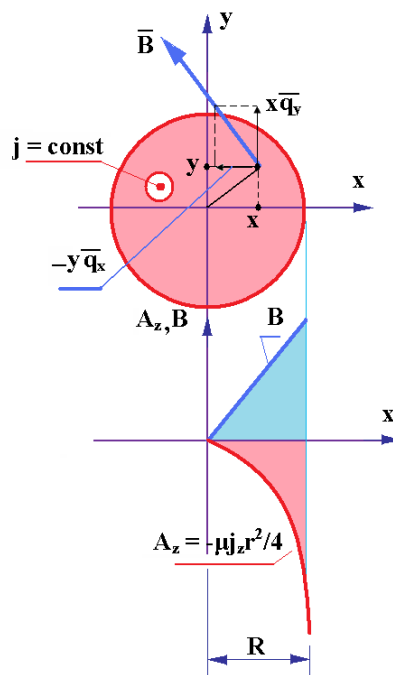


Рис. 3.10. Распределение B и A внутри провода с током

Физический смысл векторного магнитного потенциала для плоскопараллельного поля, картины которого повторяются в плоскостях, параллельных плоскости поля (на рис. 3.11 в качестве такой плоскости взята координатная плоскость xOy), состоит в том, что магнитный поток через площадку единичной длины, построенную на отрезке 12, соединяющем точки 1 и 2, равен разности векторных магнитных потенциалов в этих точках:

$$|\Delta A_z| = |A_{z1} - A_{z2}| = \left| \frac{\Phi_{12}}{l_z} \right|.$$

Как видно из рис. 3.11, силовые линии плоскопараллельного поля являются эквипотенциалами векторного магнитного потенциала. Это несложно доказать, имея в виду, что магнитный поток постоянен по длине силовой трубки, и то, что циркуляция векторного магнитного потенциала по контуру равна магнитному потоку через площадку, которую этот контур ограничивает.

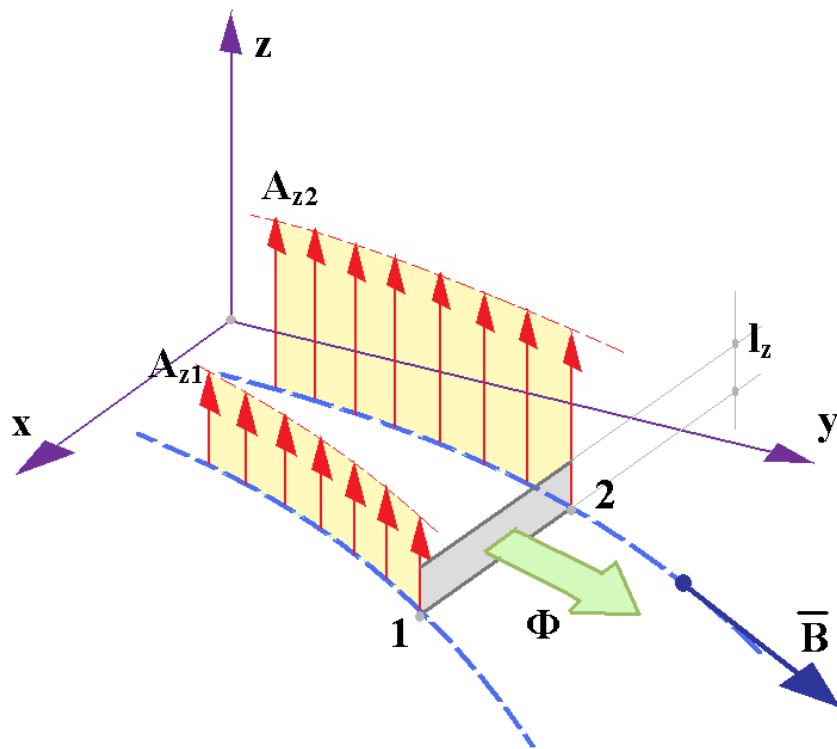


Рис. 3.11. Физический смысл векторного магнитного потенциала плоскопараллельного поля

Поле вне проводника с током (продолжение примера)

Продолжим рассмотрение поля проводника с током и найдем распределение индукции и векторного магнитного потенциала в пространстве, окружающем провод.

По условиям симметрии поле вне провода также имеет только тангенциальную составляющую: $\vec{B} = B_\theta \vec{l}_\theta$. Для окружности с центром на оси провода и с радиусом $r_1 > R$ из закона полного тока следует:

$$B_\theta = \frac{\mu I}{2\pi r_1} \quad (3.57)$$

Таким образом, магнитная индукция во внешней области распределяется совершенно иначе, чем внутри проводника. Начиная от максимального значения на поверхности провода ($r_1 = R$), индукция убывает обратнопропорционально расстоянию от его оси. Напомним, что внутри провода индукция возрастает пропорционально расстоянию от оси.

Поскольку вне провода плотность тока равна нулю, $\text{rot}\vec{B} = 0$ (что следует из первого уравнения Максвелла) и, следовательно, поле в этой области потенциально. Скалярный потенциал, характеризующий безвихревое магнитное поле, будем называть *магнитным* и будем обозначать его ψ (иногда, чтобы подчеркнуть, что речь не идет о потокосцеплении, в обозначении потенциала мы будем использовать индекс m):

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} = -\text{grad}(\psi_m) \quad (3.58)$$

С помощью скалярного магнитного потенциала удобно описывать безвихревые магнитные поля, т.е. поля *вне* проводов с токами (вне обмоток электрических машин и вне тех элементов конструкции, в которых наводятся вихревые токи, если эти токи учитываются в расчете). Важнейшей такой областью в электрической машине является *зазор* между сердечниками (часто говорят – *воздушный зазор*, хотя в действительности *зазор* может быть

заполнен как немагнитным (например, в жидкометаллических электромагнитных насосах), так и магнитным (например, магнитной жидкостью) материалом. Скалярный магнитный потенциал – весьма продуктивное понятие, и в дальнейшем мы часто будем использовать его при рассмотрении аналитических методов решения полевых задач.

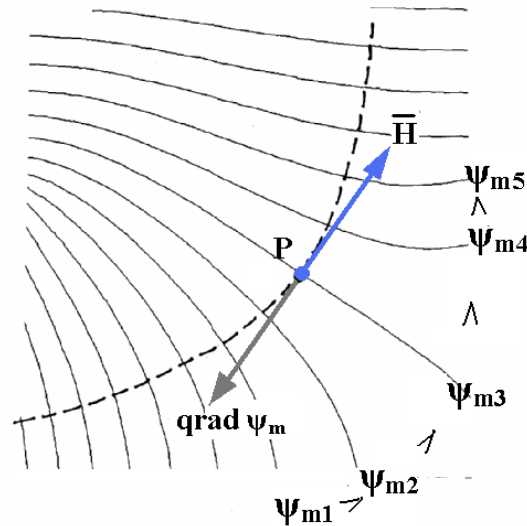


Рис. 3.12. Картина эквипотенциалей, векторы градиента скалярного магнитного потенциала и напряженности магнитного поля

Найдем теперь распределение векторного магнитного потенциала при $r_1 > R$.

Учитывая, что в силу симметрии векторный магнитный потенциал имеет в рассматриваемом случае только z -ю составляющую, и выражение для $rot \bar{A}$ в цилиндрических координатах в этом случае упрощается, получим:

$$\bar{B} = [\nabla \bar{A}] = -\frac{\partial A_z}{\partial r_1} \bar{l}_0 = B_0 \bar{l}_0 = \frac{\mu I}{2\pi r_1} \bar{l}_0,$$

откуда

$$\frac{\partial A_z}{\partial r_1} = \frac{\mu I}{2\pi r_1}$$

и после интегрирования:

$$A_z = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln r_1 + const. \quad (3.59)$$

Воспользовавшись полученным ранее выражением векторного магнитного потенциала внутри провода для $r_1 = R$, определим постоянную в (3.59):

$$-\frac{\mu I}{2\pi} \ln R + const = -\frac{\mu j_z R^2}{4} = -\frac{\mu I}{4\pi},$$

откуда

$$const = \frac{\mu I}{2\pi} \left(\ln R - \frac{1}{2} \right),$$

и окончательно

$$\bar{A} = A_z \bar{q}_z = \frac{\mu I}{2\pi} \left(\ln \frac{R}{r_1} - \frac{1}{2} \right) \bar{q}_z = -\frac{\mu I}{2\pi} \left(\ln \frac{R}{r_1} + \frac{1}{2} \right) \bar{q}_z \quad (3.60)$$

Заметим, что во всей рассматриваемой области, как внутри проводника, так и вне его, векторный магнитный потенциал отрицателен. Это объясняется тем, что нулевое значение потенциала приписано оси проводника. Обычно в подобного рода задачах ноль потенциала назначается на внешней границе области.

Найдем теперь распределение скалярного магнитного потенциала. В цилиндрических координатах:

$$-grad(\psi_m) = -\nabla\psi_m = -\frac{\partial\psi_m}{\partial r_1} \bar{l}_r - \frac{1}{r_1} \frac{\partial\psi_m}{\partial\theta} \bar{l}_\theta - \frac{\partial\psi_m}{\partial z} \bar{q}_z.$$

Учитывая, что $\bar{B} = B_\theta \bar{l}_\theta$, упростим это выражение:

$$-\nabla\psi_m = -\frac{1}{r_1} \frac{\partial\psi_m}{\partial\theta} \bar{l}_\theta = H_\theta \bar{l}_\theta,$$

откуда

$$-\frac{1}{r_1} \frac{\partial\psi_m}{\partial\theta} = \frac{I}{2\pi r_1} \quad \text{и} \quad d\psi_m = -\frac{I}{2\pi} d\theta$$

и после интегрирования

$$\Psi_m = -\frac{I}{2\pi}\theta + const.$$

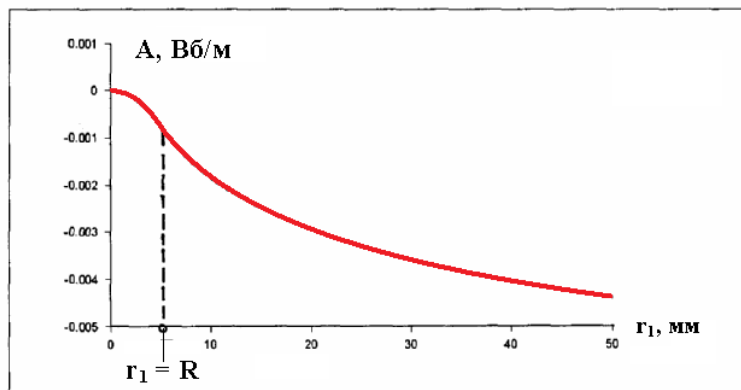
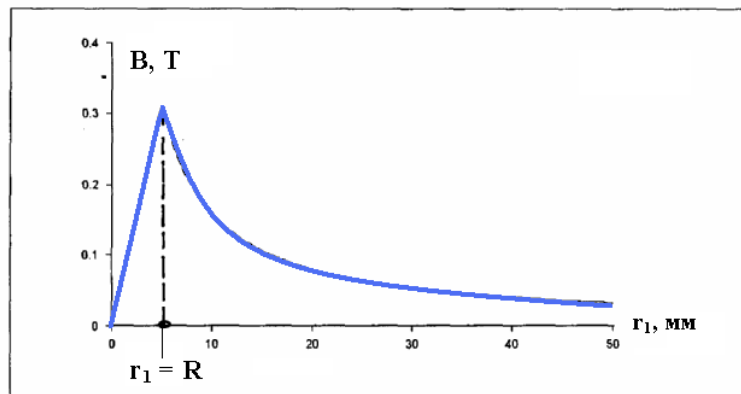
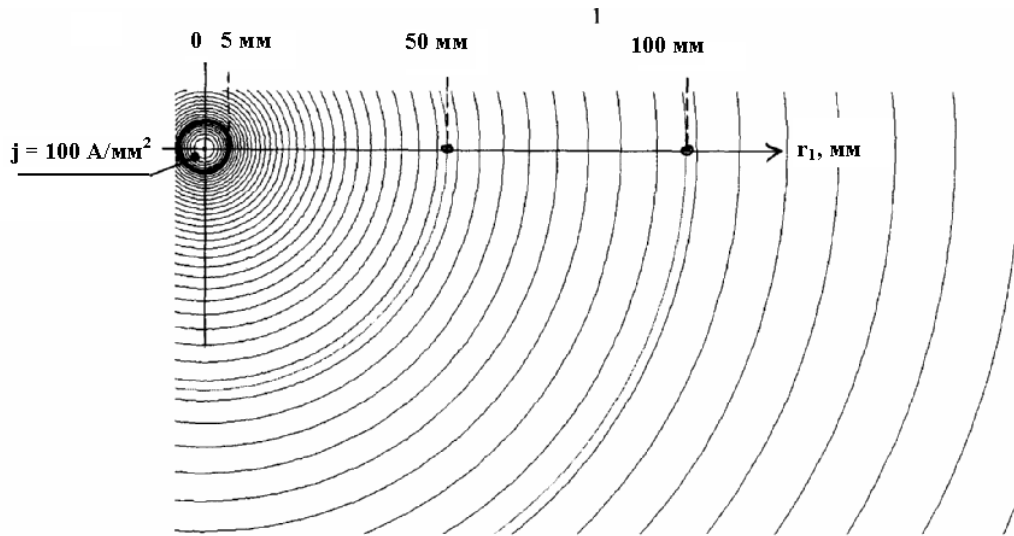


Рис. 3.13. Поле цилиндрического провода с током. Картина поля, распределения индукции и векторного магнитного потенциала по радиальному направлению. Результаты получены с помощью конечно-элементной программы *FEMM*

Из полученного выражения следует, что эквипотенциальные поверхности – радиальные плоскости (плоскости, проходящие через ось цилиндрического провода).

Если принять, что $\psi_m = 0$ на плоскости $\theta = 0$, то $const = 0$.

Следовательно,

$$\psi_m = -\frac{I}{2\pi} \theta . \quad (3.61)$$

Для того чтобы исключить неоднозначность скалярного магнитного потенциала, запретим многократный обход вокруг провода, ограничив изменение угловой координаты: $0 < \theta \leq 2\pi$.

В дальнейшем скалярный магнитный потенциал будет использован нами для определения такого важного понятия, как *магнитодвижущая сила (МДС)*. В частности, будет показано, что если на поверхности сердечника располагается *линейный ток* (провод с током, имеющий бесконечно малое поперечное сечение), то участки сердечника по обе стороны от места приложения тока имеют скалярные магнитные потенциалы, отличающиеся на величину этого тока (рис. 3.14). Это означает, что при заданном распределении токов по поверхностям сердечников, ограничивающих зазор машины, мы можем построить распределение МДС зазора и, выполнив гармонический анализ, найти амплитуду основной (рабочей) и дополнительных (как правило, ухудшающих работу машины) гармоник МДС.

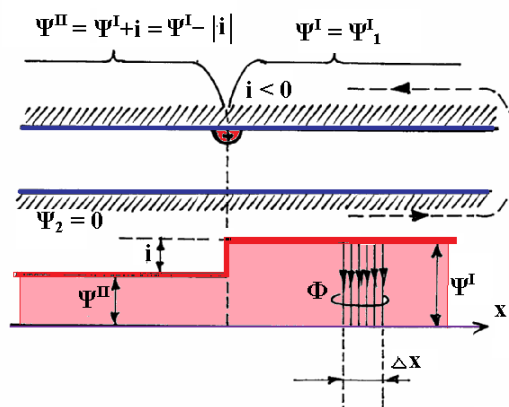


Рис. 3.14. Распределение скалярного магнитного потенциала по поверхностям сердечников электрической машины

Зная распределение скалярного магнитного потенциала по поверхностям сердечников, можно рассчитать магнитные потоки и значения индукции на отдельных участках воздушного зазора. Так, например, на участке зазора шириной Δx поток Φ равен:

$$\Phi = \Delta\psi \cdot \Lambda = \Delta\psi \cdot \mu_0 l_\delta \left(\frac{\Delta x}{\delta} \right) = \Delta\psi \cdot \mu_0 l_\delta \lambda,$$

где Λ - магнитная проводимость рассматриваемого участка зазора, l_δ - расчетная длина машины, m , λ - коэффициент магнитной проводимости, $\Delta\psi$ - разность скалярных магнитных потенциалов сердечников на рассматриваемом участке зазора, равная в данном случае (при том, что потенциал нижнего сердечника принят равным нулю) потенциалу верхнего сердечника на участке «до тока»; направление обхода области задачи на рисунке показано штриховой линией – оно выбирается таким образом, чтобы область всегда была слева.

Индукция на рассматриваемом участке зазора:

$$B = \frac{\Phi}{\Delta x \cdot l_\delta} = \Delta\psi \cdot \mu_0 l_\delta \cdot \frac{\Delta x}{\delta} \cdot \frac{1}{\Delta x l_\delta} = \Delta\psi \frac{\mu_0}{\delta} = \psi' \frac{\mu_0}{\delta} \quad (3.62)$$

Общее выражение для векторного магнитного потенциала

Получим теперь общее выражение для векторного магнитного потенциала. Выведенное ранее выражение (3.60) относится к конкретному примеру (цилиндрический провод с равномерно распределенной по его сечению плотностью тока) и, к тому же, соответствует ограничивающему общность условию равенства нулю потенциала на оси провода.

Приведенный ниже вывод основывается на подходе, изложенном в книге И.Е. Тамма «Теория электричества».

По закону Био-Савара вклад элемента тока с плотностью тока на сечении j и объемом dv в значение индукции в точке наблюдения, отстоящей от центра элемента тока на расстояние r (см. рис. 3.15), равен:

$$\overline{dB} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{[\overline{j}\overline{r}]}{r^3} dv \quad (3.63)$$

Полная величина индукции в точке наблюдения от всего замкнутого контура, по которому протекает ток I :

$$\overline{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{[\overline{j}\overline{r}]}{r^3} dv. \quad (3.64)$$

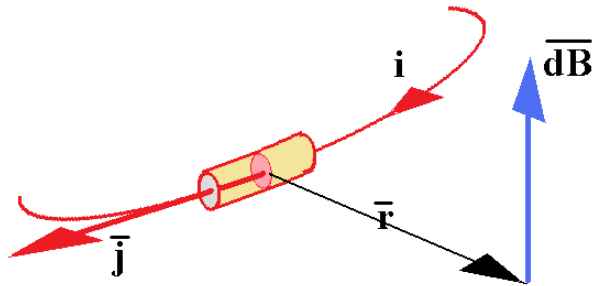


Рис. 3.15. К иллюстрации закона Био-Савара

При выводе используются два вспомогательных выражения.

Во-первых, находится градиент скалярной функции $\varphi(\overline{r}) = \left(\frac{1}{r}\right)(\overline{r})$:

$$\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\overline{r}}{r^3}, \quad (3.65)$$

откуда

$$\frac{[\overline{j}\overline{r}]}{r^3} = \left[\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \overline{j} \right]. \quad (3.66)$$

Второе вспомогательное выражение может быть проверено непосредственными вычислениями:

$$\text{rot}(\varphi\overline{a}) = [\text{grad}\varphi \cdot \overline{a}] + \varphi \cdot \text{rot}\overline{a}, \quad (3.67)$$

где φ скалярная функция, \overline{a} - вектор.

Подставив $\left(\frac{1}{r}\right)$ вместо φ и \overline{j} вместо \overline{a} , получим:

$$\frac{[\bar{j}r]}{r^3} = \left[\text{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \bar{j} \right] = \text{rot} \left(\left(\frac{1}{r} \right) \bar{j} \right) - \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \text{rot} \bar{j} \quad (3.68)$$

В последнем выражении $\text{rot} \bar{j} = 0$, поскольку применение оператора rot к вектору плотности тока означает дифференцирование этого вектора по направлениям координатных осей при изменении положения точки наблюдения (рассматриваются операторы grad и rot именно этого типа), в то время как величина и направление \bar{j} от положения этой точки не зависят. С учетом этого

$$\bar{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int \text{rot} \left(\frac{\bar{j}}{r} \right) dv = \text{rot} \left(\frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\bar{j}}{r} dv \right). \quad (3.69)$$

Поскольку $\text{div} \bar{B} = 0$ и $\bar{B} = \text{rot} \bar{A}$,

$$\bar{A} = \left(\frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\bar{j}}{r} dv \right). \quad (3.70)$$

Вычисление векторного магнитного потенциала по (3.70) требует интегрирования только по объемам, занятым проводниками с током.

Уравнение Пуассона для векторного магнитного потенциала

Ранее, при рассмотрении поля цилиндрического провода с плотностью тока, равномерно распределенной по его поперечному сечению, было показано, что распределение векторного магнитного потенциала описывается уравнением Пуассона (см. 3.55). В этом частном случае магнитное поле провода было двумерным, а векторный магнитный потенциал содержал только одну компоненту ($\bar{A} = \bar{q}_z A_z$). Применяв тот же прием, что и в рассмотренном примере, покажем, что это уравнение описывает распределение векторного магнитного потенциала и в общем случае, если в области задачи имеются участки с отличной от нуля плотностью тока.

Найдем ротор от обеих частей первого уравнения Максвелла, умножив предварительно их на магнитную проницаемость μ . С учетом того, что $\bar{B} = \text{rot} \bar{A}$ получим:

$$\mu \cdot \text{rot} \bar{H} = \text{rot}(\text{rot} \bar{A}) = \mu \bar{j}. \quad (3.71)$$

В частности, для проекции на ось x в декартовой системе координат:

$$\text{rot}_x(\text{rot} \bar{A}) = \mu \cdot j_x. \quad (3.71)$$

Напомним, что проекция ротора некоторого вектора \bar{a} на ось координат может быть выражена через частные производные этого вектора:

$$\text{rot}_x \bar{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}.$$

В данном случае в качестве вектора \bar{a} выступает вектор $\text{rot} \bar{A}$. Тогда:

$$\begin{aligned} \text{rot}_x(\text{rot} \bar{A}) &= \frac{\partial}{\partial y} \text{rot}_z \bar{A} - \frac{\partial}{\partial z} \text{rot}_y \bar{A} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_y}{\partial y}}_{\substack{\text{меняем} \\ \text{порядок} \\ \text{дифференцирования}}} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial z} \left(\underbrace{+ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}}_0 \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \text{div} \bar{A} - \nabla^2 A_x \end{aligned}$$

В последнем выражении можно положить, что $\text{div} \bar{A} = 0$. В противном случае, векторный магнитный потенциал можно представить как сумму двух составляющих: $\bar{A} = \bar{A}' + \bar{A}''$, таких, что $\text{div} \bar{A}' = 0$ и $\text{div} \bar{A}'' \neq 0$. Но в этом случае $\text{rot} \bar{A} = \text{rot} \bar{A}'$, т.к. $\text{rot} \bar{A}'' = 0$, поскольку поле вектора \bar{A}'' потенциально. В результате:

$$\text{rot}_x(\text{rot} \bar{A}) = - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) = -\nabla^2 A_x \quad (3.72)$$

Рассматривая проекции на две другие координатные оси, получим систему трех скалярных уравнений, каждое из которых является уравнением Пуассона:

$$\nabla^2 A_x = \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right) = -\mu \cdot j_x \quad (3.73a)$$

$$\nabla^2 A_y = \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right) = -\mu \cdot j_y \quad (3.73б)$$

$$\nabla^2 A_z = \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) = -\mu \cdot j_z. \quad (3.73в)$$

Таким образом, *одно векторное уравнение*

$$\text{rot}(\text{rot} \bar{A}) = -\mu \cdot \bar{j} \quad (3.74)$$

эквивалентно *трем скалярным* уравнениям (3.73а – 3.73в).

Для *двухмерного* поля задача существенно упрощается – как мы уже видели, в этом случае векторный магнитный потенциал имеет только одну компоненту и, таким образом, *вместо трех* скалярных уравнений остается только *одно*. Это означает, что, во-первых, значительно возрастают шансы найти аналитическое решение задачи, и, во-вторых, при численном решении, значительно сокращается объем необходимых вычислений. Вот почему, приступая к решению какой-либо полевой задачи, сформулированной вначале для трехмерного пространства, следует внимательно рассмотреть возможность сведения ее к более простой двухмерной, пусть даже ценой снижения точности решения вследствие принимаемых допущений.

Дальнейшее упрощение уравнений, описывающих магнитное поле, получается при рассмотрении областей, в которых отсутствуют источники поля, т.е. участки с распределенной плотностью тока. В этом случае уравнение поля называется уравнением Лапласа. Так, например, уравнение Лапласа для векторного магнитного потенциала плоскопараллельного поля, силовые линии которого замыкаются в плоскостях, перпендикулярных оси z , выглядит следующим образом:

$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = 0. \quad (3.75)$$

Расчету так называемых лапласовых полей будут посвящены следующие разделы курса.

Относительно численного решения полевых задач

Описание магнитного поля с помощью уравнений второго порядка в частных производных, примером которых являются уравнения Пуассона и Лапласа, указывает путь к численному решению полевой задачи. Идея заключается в том, что при достаточно подробной дискретизации рассматриваемой области производные от искомой функции с достаточно хорошим приближением могут быть заменены конечными приращениями функций и их аргументов. Это дает возможность заменить исходное дифференциальное уравнение системой алгебраических уравнений, пусть и большого порядка, но удобной для решения на вычислительных машинах.

Рассмотрим в качестве примера представление частных производных в численном методе, получившем название метода конечных разностей. Этот метод в последнее время редко применяется на практике, но он, пожалуй, наиболее удобен для иллюстрации построения алгоритма численного метода расчета поля.

Пусть поле описывается уравнением Лапласа:

$$\nabla^2 A_z = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = 0.$$

Нанесем на область задачи сетку из горизонтальных и вертикальных линий. Для простоты будем считать, что расстояния между линиями одинаковы и равны h (рис. 3.16). Точки пересечения линий назовем узлами. Допустим, значения векторного магнитного потенциала в узлах расчетной сетки известны (это может быть некоторое приближенное начальное распределение, задаваемое для того чтобы инициировать вычислительный процесс). Тогда для трех узлов, расположенных на одной горизонтальной линии, средний из которых имеет координату x , в соответствии с разложением в ряд Тейлора имеем:

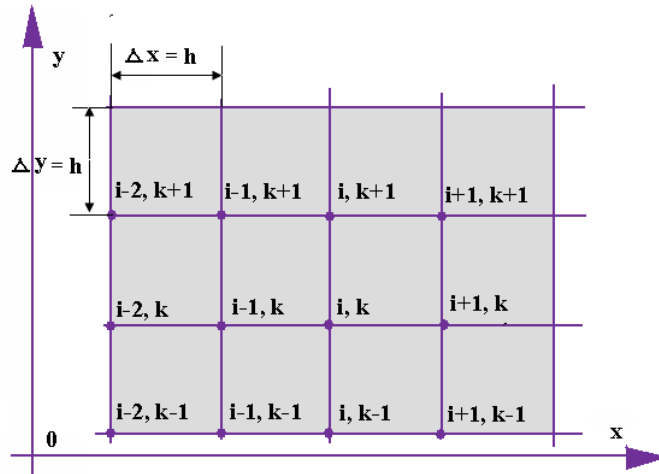


Рис. 3.16. К выводу аппроксимирующих выражений для вторых производных в методе конечных разностей

$$A(x+h) = A(x) + \frac{h}{1!} A'(x) + \frac{h^2}{2!} A''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} A^{(n)}(x)$$

$$A(x-h) = A(x) - \frac{h}{1!} A'(x) + \frac{h^2}{2!} A''(x) - \dots + \frac{h^n}{n!} A^{(n)}(x)$$

$$A(x+h) + A(x-h) = 2A(x) + h^2 A''(x) + \varepsilon(h^4),$$

откуда

$$\begin{aligned} A''(x) &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \approx \frac{A(x+h) - 2A(x) + A(x-h)}{h^2} = \\ &= \frac{A_{i+1,k} - 2A_{i,k} + A_{i-1,k}}{h^2}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \approx \frac{A_{i,k+1} - 2A_{i,k} + A_{i,k-1}}{h^2}. \quad (3.77)$$

С помощью выражений (3.76) и (3.77) аппроксимируется уравнение, описывающее поле. В образующейся системе алгебраических уравнений узловые значения потенциалов являются неизвестными. Порядок этой системы, таким образом, оказывается весьма большим (*обычным* в практике численных расчетов полей считается сеточная структура с числом узлов порядка *нескольких десятков тысяч*), но поскольку сами уравнения просты, мат-

рица коэффициентов системы, во-первых, оказывается сильно *разреженной*, а, во-вторых, может быть приведена к ленточной форме, что удобно для вычислений.

В заключение заметим, что наибольшее распространение среди численных методов расчета электромагнитных полей нашел *метод конечных элементов*, более подробно о котором будет сказано в дальнейшем.