

## Раздел 4. Выражение энергии магнитного поля через векторный магнитный потенциал

В курсе ТОЭ выражение для энергии электростатического поля было получено как результат расчета работы, затраченной на внесение пробного электрического заряда в точку наблюдения. Такой же прием может быть применен при выводе выражения для энергии магнитного поля. В качестве пробного элемента в этом случае за неимением магнитных зарядов должен быть выбран элементарный ток, вернее, достаточно малый замкнутый контур с током. Такой подход, в частности, использован в книге известного специалиста по теории электромагнитного поля и численным методам анализа полей Пола Силвестера (*P.P. Silvester, «Modern Electromagnetic Fields», Prentice-Hall, 1968*).

### Магнитный момент элементарного контура и его электромагнитный момент

Рассмотрим контур с током, достаточно малый для того чтобы считать, что пронизывающее его внешнее магнитное поле равномерно (рис. 4.1).

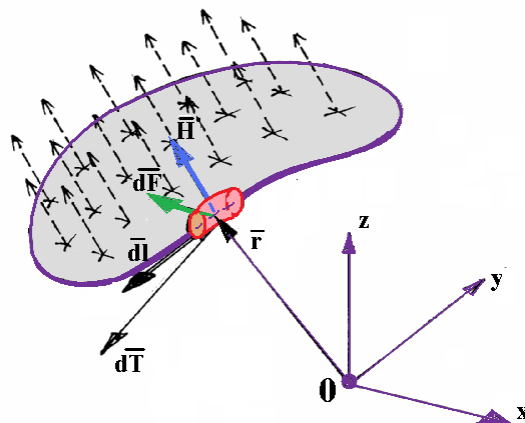


Рис. 4.1. К определению электромагнитного момента элементарного контура с током

Сила, действующая на элемент тока  $i\bar{dl}$  со стороны внешнего поля:

$$\bar{dF} = \mu_0 i \bar{dl} \times \bar{H} \quad (4.1)$$

Произведение этой силы на радиус – вектор  $\bar{r}$  дает *электромагнитный* момент относительно начала координат:

$$\bar{dT} = \bar{r} \times \bar{dF} = \bar{r} \times [i \cdot \bar{dl} \times \bar{B}] \quad (4.2)$$

Момент, действующий на весь контур:

$$\bar{T} = \oint_L \bar{r} \times [i \bar{dl} \times \bar{B}] \quad (4.3)$$

Используя свойства двойного векторного произведения

$$\bar{A} \times [\bar{B} \times \bar{C}] = \bar{B} \times [\bar{A} \times \bar{C}] - \bar{C} \times [\bar{A} \times \bar{B}]$$

и

$$\bar{A} \times [\bar{B} \times \bar{C}] = \bar{B} \times (\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{C} \times (\bar{A} \cdot \bar{B}),$$

получим:

$$\bar{T} = i \underbrace{\oint_L \bar{r} (\bar{dl} \cdot \bar{B})}_1 - i \underbrace{\oint_L \bar{B} (\bar{r} \cdot \bar{dl})}_2 - i \oint_L \bar{B} \times [\bar{r} \times \bar{dl}]. \quad (4.4)$$

Интеграл 2 равен нулю:

$$\oint_L \bar{B} (\bar{r} \cdot \bar{dl}) = \bar{B} \oint_L \bar{r} \cdot \bar{dl} = \bar{B} \int_S \text{rot} \bar{r} \cdot \bar{ds} = 0$$

В последнем выражении использована теорема Стокса и учтено, что  $\text{div}(\bar{r}) \neq 0$  и, следовательно,  $\text{rot}(\bar{r}) = 0$ .

Переписав интеграл 1 в виде

$$\oint_L \bar{r} (\bar{dl} \cdot \bar{B}) = \bar{l}_r \oint_L r (\bar{B} \cdot \bar{dl}),$$

рассмотрим очевидные неравенства:

$$r_{\min} \underbrace{\oint_L \bar{B} \cdot \bar{dl}}_{1.1} \leq \oint_L r (\bar{B} \cdot \bar{dl}) \leq r_{\max} \underbrace{\oint_L \bar{B} \cdot \bar{dl}}_{1.1}.$$

Здесь интеграл 1.1 также равен нулю на основании закона полного тока, т.к. поверхность рассматриваемого малого контура не пересекается никакими токами:

$$\oint_L \bar{B} \cdot \bar{dl} = \mu \oint_L \bar{H} \cdot \bar{dl} = \mu (i_{\text{стор.}} + i_{\text{мец.}}) = 0$$

и на этом основании нулю равен и интеграл 1:

$$0 \leq \oint_L r(\bar{B} \cdot d\bar{l}) \leq 0.$$

Следовательно,

$$\bar{T} = -i \oint_L \bar{B} \times [\bar{r} \times d\bar{l}]. \quad (4.5)$$

Поскольку индукция на поверхности контура постоянна,

$$\bar{T} = -i \bar{B} \times \bar{s}, \quad (4.6)$$

где  $\bar{s}$  – вектор площадки.

Определим *магнитный момент* контура с током как скалярное произведение вектора площадки на силу тока:

$$\bar{M}_m = \bar{s} \cdot i. \quad (4.7)$$

Введя понятие магнитного момента, мы по-существу определили понятие *магнитного диполя*. Заметим, что для площадки, положение которой в системе координат фиксировано, направление магнитного момента зависит от направления тока в контуре, т.е. от взаимной ориентации тока и нормали площадки.

Электромагнитный момент удобно выразить через магнитный момент:

$$\bar{T} = \bar{M}_m \times \bar{B}. \quad (4.8)$$

Перейдем теперь к рассмотрению «большого» контура с током. Его мы можем представить как совокупность малых контуров, каждый из которых обтекается тем же током (рис. 4.2)

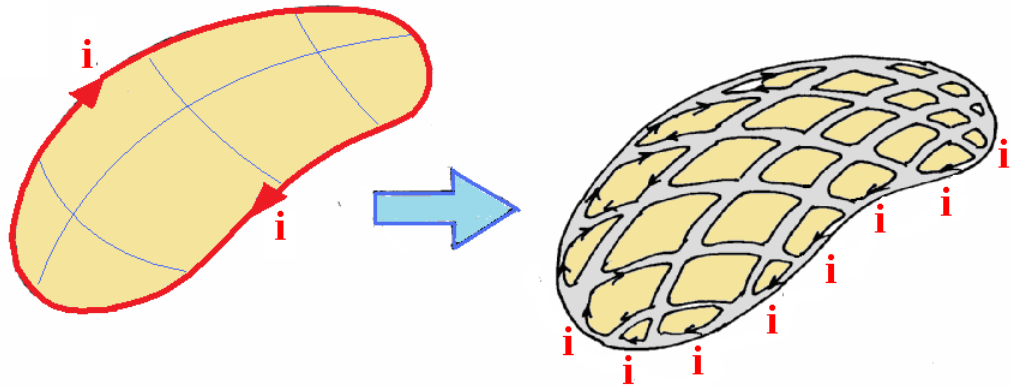


Рис. 4.2. Представление «большого» контура с током как совокупности малых контуров

## Энергия контура с током

Энергию большого контура можно подсчитать, определив работу, затрачиваемую на перенесение каждого диполя (малого контура) из достаточно удаленной области, где индукцию можно считать равной нулю, в его истинное положение. При этом диполь должен быть правильно ориентирован в его конечном положении.

Работа, затрачиваемая на поворот (ориентацию) диполя за счет «собственного» момента  $\bar{T}$ :

$$\delta W = T \cdot \delta\theta = [\bar{M}_m \times \bar{B}] \delta\theta = i\Delta S \cdot B \cdot \sin\theta d\theta \quad (4.9)$$

и при повороте на угол  $\theta$

$$\Delta W = -i \int (\Delta S \cdot B \cdot \sin\theta) d\theta \quad (4.10)$$

$$\Delta W = i(\Delta S \cdot B \cdot \cos\theta) d\theta = i\Phi_d, \quad (4.11)$$

где  $\Phi_d$  – потокосцепление диполя с внешним полем.

Из приведенных выражений следует, что если диполь ориентирован так, что его магнитный момент коллинеарен вектору индукции, энергия, которая необходима для его перемещения, равна нулю. Таким образом, выбрав и поддерживая такую ориентацию диполя, его можно «доставить на место» без затраты энергии. Остается только подсчитать работу, необходимую для ориентации диполя «на месте» «в правильное положение».

Эта операция, однако, требует больших вычислений. Предложим другой способ. Будем считать, что малые (элементарные) контуры *не обтекаются токами*. Тогда «доставка» их на место и «правильная ориентация» могут быть произведены *без затраты энергии*. И только после этого установим в каждом  $k$ -м контуре ток  $hi_k = hi$ , где  $0 < h \leq 1$ . Потокосцепление  $k$ -го диполя в этом случае будет равно  $h\Phi_k$ .

Приращение энергии большого контура при приращении токов в малых контурах на  $i_k dh$ :

$$dW = \sum_k h \Phi_k i_k dh = h dh \sum_k \Phi_k i_k.$$

Полную энергию контура получим в результате интегрирования:

$$W = \int_0^1 h dh \sum_k \Phi_k i_k$$

И окончательно:

$$W = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k i_k. \quad (4.12)$$

Однако и такой способ подсчета энергии не всегда удобен, поскольку он требует дискретизации рассматриваемой области. Найдем другое выражение для энергии контура с током. Напомним, что физический смысл векторного магнитного потенциала состоит в том, что циркуляция его по замкнутому контуру равна потоку вектора индукции (т.е. магнитному потоку) через поверхность, охваченную этим контуром. В соответствии с этим

$$W = \frac{1}{2} \sum_k \oint_{L_k} \bar{A}_k \bar{dl}_k \cdot i_k.$$

Элемент тока  $\bar{dl}_k i_k$  выразим через плотность тока  $\bar{j}_k$  и объем элемента  $dv_k$ . Тогда

$$W = \frac{1}{2} \sum_k \int \bar{A}_k \bar{j}_k dv_k.$$

Таким образом, энергия контура с током выражается следующим интегралом:

$$W = \frac{1}{2} \int \bar{A} \bar{j} dv, \quad (4.13)$$

причем интегрирование достаточно выполнить только по той части объема, в которой плотность тока не равна нулю.

При определении энергии магнитного поля могут быть учтены не только токи проводимости, но и токи смещения, обусловленные изменением электрического поля:

$$W_{\text{магн}} = \frac{1}{2} \int \bar{A} \left( \bar{j}_{\text{стоп.}} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) dv. \quad (4.14)$$

В соответствии с первым уравнением Максвелла выражение (4.13) может быть представлено следующим образом:

$$W_{\text{магн}} = \frac{1}{2} \int \bar{A} \cdot \text{rot} \bar{H} dv.$$

Используя известное выражение векторной алгебры

$$\text{div}(\bar{H} \times \bar{A}) = \bar{A} \cdot \text{rot} \bar{H} - \bar{H} \cdot \text{rot} \bar{A},$$

получим:

$$\begin{aligned} W_{\text{магн}} &= \frac{1}{2} \int \text{div}(\bar{H} \times \bar{A}) dv + \frac{1}{2} \int \bar{H} \cdot \text{rot} \bar{A} = \\ &= \frac{1}{2} \oint \underbrace{[\bar{H} \times \bar{A}]}_1 ds + \frac{1}{2} \int \bar{H} \bar{B} dv \end{aligned}$$

Поверхностный интеграл 1 распространим на замкнутую поверхность, достаточно большую для того чтобы считать, что индукция на ней равна нулю (индукция убывает при удалении от тока, являющегося источником поля). Векторный магнитный потенциал на удаленной от тока поверхности также убывает (если принять, что в бесконечности он равен нулю) и, таким образом, интеграл 1 может быть принят равным нулю, в связи с чем выражение для энергии магнитного поля принимает вид:

$$W = \frac{1}{2} \int \bar{B} \bar{H} dv. \quad (4.15)$$

### **Энергетический функционал. Метод конечных элементов**

Расчет энергии по (4.15) предполагает, что в рассматриваемой области известно распределение не только индукции  $\bar{B}$ , но и напряженности поля  $\bar{H}$ . Если при решении полевой задачи с использованием векторного магнитного потенциала распределение индукции может быть определено по известному (пусть даже на какой-либо *промежуточной* стадии решения) распределению потенциала, то для нахождения напряженности необходимо учесть свойства среды (в случае *ферромагнитной* среды – заданную кривую

намагничивания материала). Таким образом, если найденное распределение потенциала не является верным (т.е. *решением* задачи), то результаты расчетов энергии по (4.13) и (4.15) будут отличаться друг от друга. Это означает, что распределение потенциала должно быть *определенным образом скорректировано* с тем, чтобы уменьшить различие в значениях энергии, рассчитанных двумя способами. Если корректировка ведется правильно, то путем последовательных приближений можно добиться того, что различие между двумя значениями энергии поля будет меньше наперед заданной величины, определяющей *заданную точность* решения задачи. В математике такой результат достигается в процессе *минимизации функционала*. Составим функционал,  $F(\bar{A})$ , который назовем *энергетическим*:

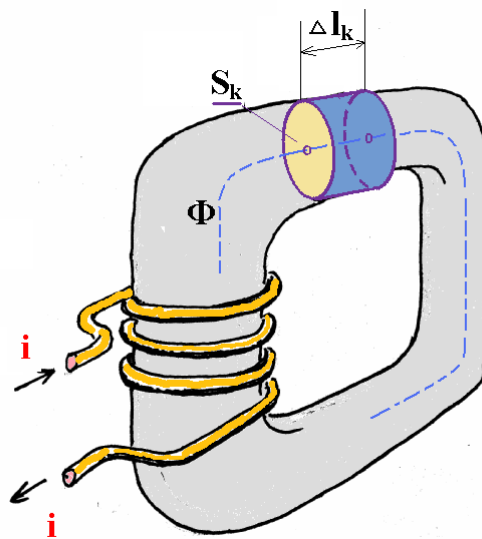
$$F(\bar{A}) = \int_R \left( \int_0^B H dB - \bar{J} \bar{A} \right) d\Omega. \quad (4.16)$$

Процедура описанного способа решения полевой задачи путем последовательных приближений напоминает подход, который обычно используется при проектировании электрических машин на стадии расчета магнитной цепи.

Допустим, требуется найти распределение индукции в сердечнике магнитопровода сложной формы, показанном на рис. 4.3, при заданном токе обмотки возбуждения.

Заданными считаются: ток и число витков обмотки возбуждения, размеры магнитопровода, кривая намагничивания материала магнитопровода.

Прежде чем проводить вычисления, заменим реальный магнитопровод множеством участков, достаточно малых для того чтобы считать, что поле в каждом из них равномерно. Один из таких участков показан на рис. 4.3 – он имеет постоянное поперечное сечение и, следовательно, если пренебречь потоком рассеяния, индукция на нем также будет постоянной.



**Рис. 4.3.** К иллюстрации метода последовательных приближений при расчете магнитной цепи

Процедура вычислений заключается в следующем.

1. Зададимся начальным приближением потока
2. Полагая, что значение потока на всем протяжении магнитопровода сохраняется, найдем значения индукции в каждом участке магнитопровода.
3. По заданной кривой намагничивания материала магнитопровода найдем значения напряженности поля в каждом участке.
4. Найдем сумму падений магнитных напряжений на всех участках магнитопровода и проверим выполнение закона полного тока, в соответствии с которым эта сумма должна быть равна МДС обмотки возбуждения. Определим *невязку* – разность между МДС и суммой падений магнитных напряжений, найденной на *текущей итерации*.
5. Если невязка превышает *наперед заданную величину, определяющую точность решения задачи*, корректируем значение потока и повторяем вычисления, начиная с п.2. В противном случае считаем задачу решенной.

Из приведенного описания процесса вычислений становится ясно, что эффективность и точность решения задачи зависят, во-первых, от степени *дискретизации* магнитопровода и, во-вторых, от *стратегии корректировки*



значений магнитного потока при переходе к следующей итерации. Заметим, что при неудачно выбранной стратегии решение задачи может быть не достигнуто. В частности, процесс вычислений может *расходиться* – невязка вместо того, чтобы уменьшаться, начинает возрастать от итерации к итерации (хотя перед этим, в начале процесса, она, возможно, и убывала). Существенное влияние на *сходимость* процесса решения оказывает и характер нелинейности кривой намагничивания.

Минимизация энергетического функционала является основным процессом, реализуемым *методом конечных элементов*, получившим в последние 20–30 лет широкое распространение при решении самых разнообразных задач электротехники.

**Метод конечных элементов, первые публикации. Статья П. Силвестра и М.В.К. Чэри 1970 г.**

К середине 60-х годов отчетливо сформировалась основная тенденция развития вычислительной техники и ее применения в технических расчетах – ЭВМ становятся практически доступными для обычного пользователя, быстрыми темпами растут быстродействие и объем оперативной памяти, разрабатывается стандартное программное обеспечение и методы прикладной математики. Революционные изменения обещает появление первых персональных компьютеров.

К этому времени относятся и публикации первых работ, посвященных применению численных методов при расчете магнитных полей в электрических машинах.

Первые значительные результаты были получены с использованием *метода конечных разностей* (см. раздел 3, выражения (3.76) и (3.77)): [4.1]: *F. C. Trutt, E. A. Erdélyi, and R. F. Jackson, "The nonlinear potential equation and numerical solution for highly saturated electrical machines*, (Нелинейное уравнение с использованием (векторного магнитного) потенциала и числен-

ный расчет поля в сильно насыщенных электрических машинах)", *IEEE Trans. Aerospace*, vol. AS-1, pp. 430-440, August 1963, [4.2]: E. A. Erdélyi, M. S. Sarma, and S. S. Coleman, "Magnetic fields in nonlinear salient-pole alternators, (Расчет магнитных полей в насыщенных явнополюсных генераторах)", *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-87, pp. 1848-1856, October 1968. Применение поначалу именно этого метода объясняется простотой аппроксимации дифференциального уравнения в частных производных конечными разностями и, соответственно, меньшими трудностями при программировании. Однако метод конечных разностей имеет существенный недостаток – трудности при воспроизведении в расчетной модели сложных по форме границ раздела сред и сложность сопряжения в одной модели участков со значительно отличающимися размерами.

Указанный недостаток метода конечных разностей успешно разрешается в *методе конечных элементов*.

Говоря о первых публикациях, посвященных применению метода конечных элементов для расчета полей в электрических машинах, следует особо остановиться на статье П. Силвестра и М.В.К. Чэри, опубликованной в 1970 г. [4.3]: P. Silvester, and Madabushi V. K. Chari "Finite Element Solution of Saturable Magnetic Field Problems, (Расчет магнитных полей с учетом насыщения методом конечных элементов)", *IEEE Trans. Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-89, No 7, pp. 1642-1651, September/October 1970.

В начале статьи дается обоснование метода конечных элементов, суть которого, как уже было замечено, заключается в формировании и минимизации энергетического функционала для области задачи, представленной множеством элементов простой формы, в составлении системы простых алгебраических уравнений и в последующем решении составленной системы уравнений, в общем случае нелинейной.

Надо сказать, что в то время, когда писалась эта статья, стремительное развитие вычислительной техники, которому вскоре все стали свидетелями, только предсказывалось, хотя и вполне уверенно. Действительные же воз-

возможности электронных вычислительных машин по нынешним меркам были весьма и весьма ограничены. В частности, по этой причине конечно-элементная модель, на примере которой авторы статьи демонстрировали возможности нового метода, выглядела чрезвычайно простой (рис. 4.4):

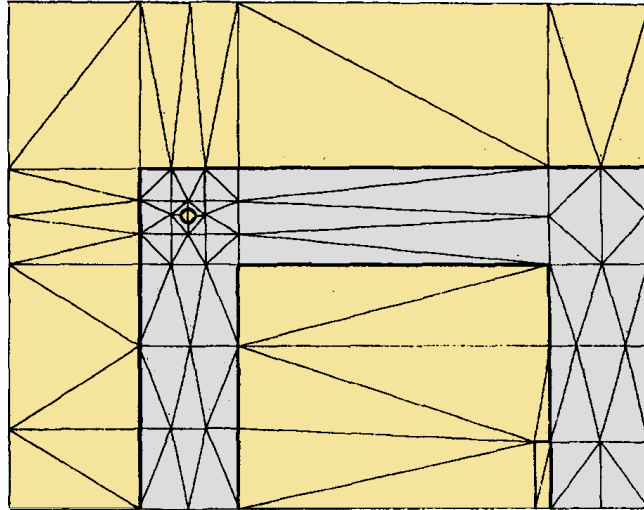
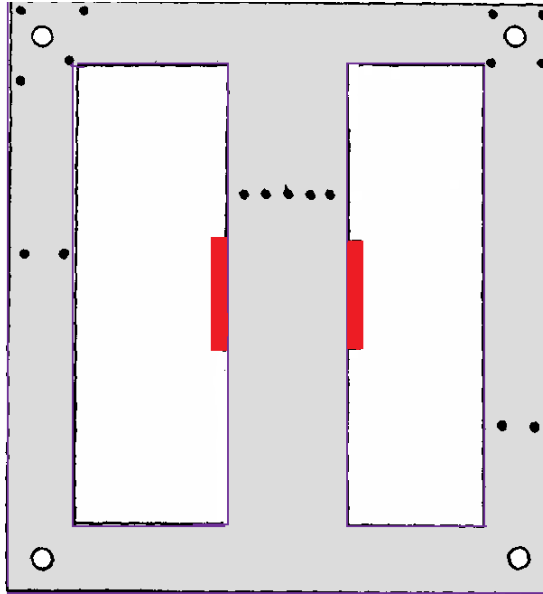


Fig. 1. Sectional view of transformer showing irregular triangular subdivisions.

**Рис. 4.4. (рис. 1 в [4.2]). Конечно-элементная структура полевой задачи, результаты решения которой приводятся в [4.3]. Представлена четверть области задачи. Рассчитывается поле в однофазном бронеовом трансформаторе с насыщенным магнитопроводом**

Однако, несмотря на простоту модели, полученные на ней результаты с замечательной точностью совпали с результатами измерений, выполненных с помощью измерительных катушек, установленных на магнитопроводе трансформатора (размещение катушек показано на рис. 4.5.).



**Fig. 5.** Location of search coils in transformer core used for flux measurements; maximum dimension of core 28 cm; other dimensions to scale.

**Рис. 4.5.** (рис. 5 в [4.2]). Размещение измерительных катушек на сердечнике трансформатора. Максимальный размер сердечника – 28 см

Сравнение результатов, полученных с помощью метода конечных элементов и с помощью измерительных катушек, иллюстрируется рисунком 4.6. Расчетная картина поля показана на рис. 4.7. Резкие изломы силовых линий объясняются малым числом конечных элементов в сетке (для современных конечно-элементных программ обычными являются сетки, содержащие десятки тысяч узлов).

Превосходная точность результатов расчета иллюстрируется рисунком 4.8, на котором сравниваются расчетная и экспериментальная временные зависимости намагничивающего тока, соответствующие синусоидальному напряжению источника питания.

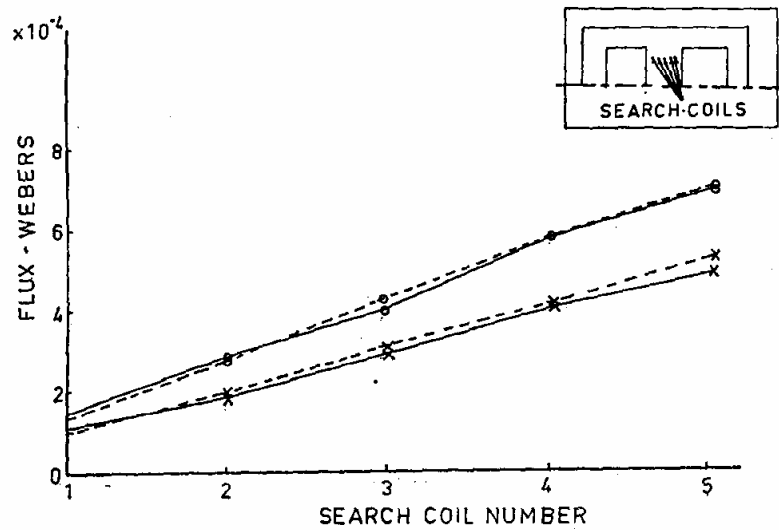


Fig. 8. Comparison of measured transformer core flux with estimated values from theory at  $1.08 \text{ Wb/m}^2$  and  $1.75 \text{ Wb/m}^2$  peak flux density: solid curves—experimental results; dashed curves—computed values.

Рис. 4.6. (рис. 8 в [4.2]). Сравнение расчетных и опытных значений магнитных потоков, сцепленных с измерительными катушками, размещенными на среднем стержне трансформатора (показано в верхней части рисунка). 1, 2, 3, 4 и 5 — номера катушек. Данные соответствуют двум расчетным значениям индукции —  $1,08 \text{ Т}$  и  $1,75 \text{ Т}$ . Сплошные кривые — эксперимент, штриховые — расчет по методу конечных элементов

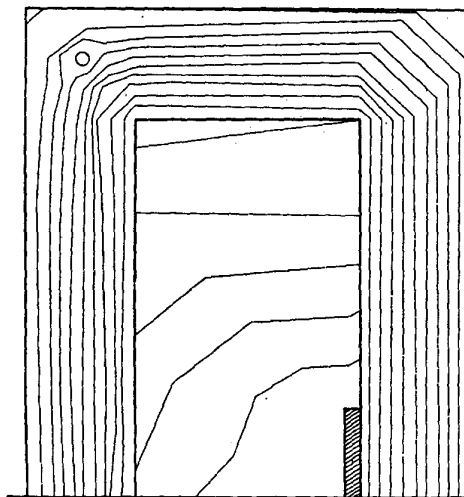


Fig. 7. Plot of predicted flux distribution in transformer with maximum flux density of  $1.5 \text{ Wb/m}^2$  in core and  $2.1 \text{ Wb/m}^2$  at corners.

Рис. 4.7. (рис. 7 в [4.2]). Картина поля, полученная по методу конечных элементов. Максимальная индукция в стержне равна  $1,5 \text{ Т}$ , в углах ярем —  $2,1 \text{ Т}$

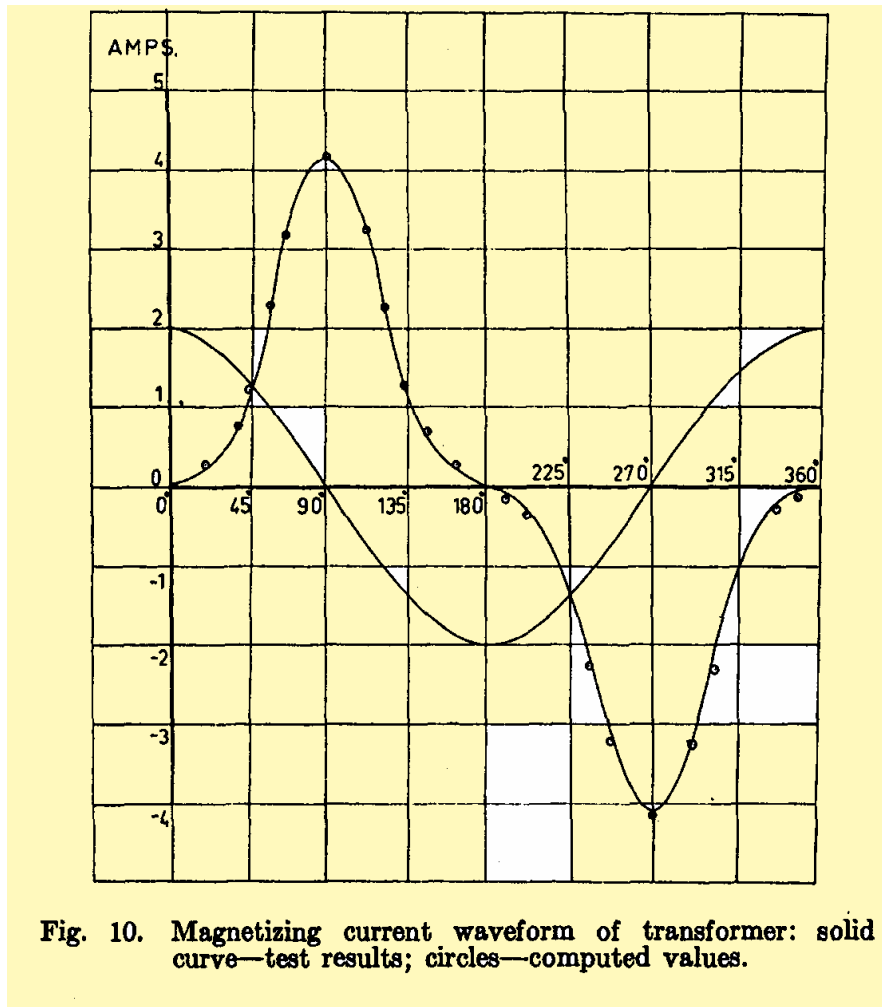


Рис. 4.8. (рис. 10 в [4.2]). Сравнение расчетной и экспериментальной временных зависимостей намагничивающего тока. Сплошные линии – эксперимент, точки – расчет по методу конечных элементов

С начала 70-х годов число работ с применением метода конечных элементов для расчета полей в электрических машинах возрастает примерно такими же темпами, какими возрастает производительность ЭВМ. Две эти тенденции, действительно, тесно связаны друг с другом. Сложность полевых задач, время их решения, объем информации, являющейся результатом обработки данных расчета, напрямую зависят от объема оперативной памяти и быстродействия вычислительных машин.

Можно выделить несколько этапов в развитии метода конечных элементов применительно к решению задач электромеханики.

Вначале решались главным образом локальные магнитостатические задачи, т.е. рассчитывались магнитные поля на ограниченных участках маг-

нитной цепи при заданных токах – источниках этих полей. Основные практические результаты применения метода конечных элементов на этом этапе – учет насыщения стали и учет сложных границ при расчете параметров электрических машин, другими словами, уточнение используемых на практике расчетных формул за счет частичного или полного снятия тех упрощающих допущений, при которых они были получены. Примером здесь могут служить работы, посвященные расчету пазового рассеяния полузакрытых пазов с учетом насыщения коронок зубцов или пазов с магнитными клиньями (см., например, [4.3]: В.П. Карашецкий, «Расчет коэффициента Картера при наличии магнитного клина в пазу электрической машины методом конечных элементов», Известия вузов «Электромеханика», 1988, №2, 14-19. Конечно-элементная модель, воспроизводящая одно пазовое деление, показана на рис. 4.9).

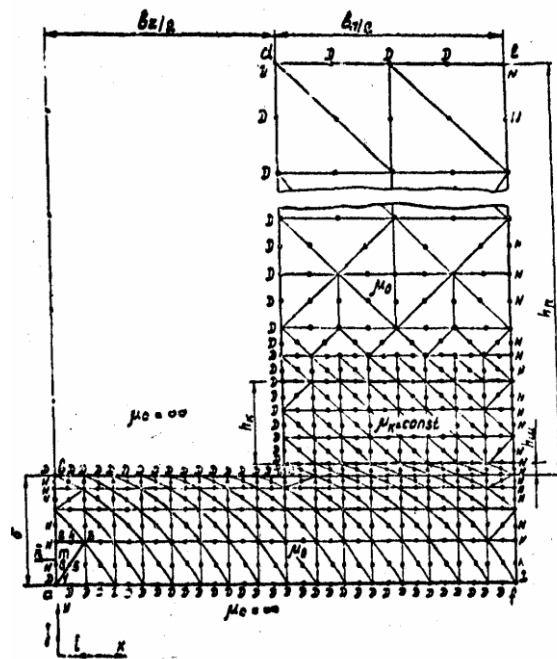
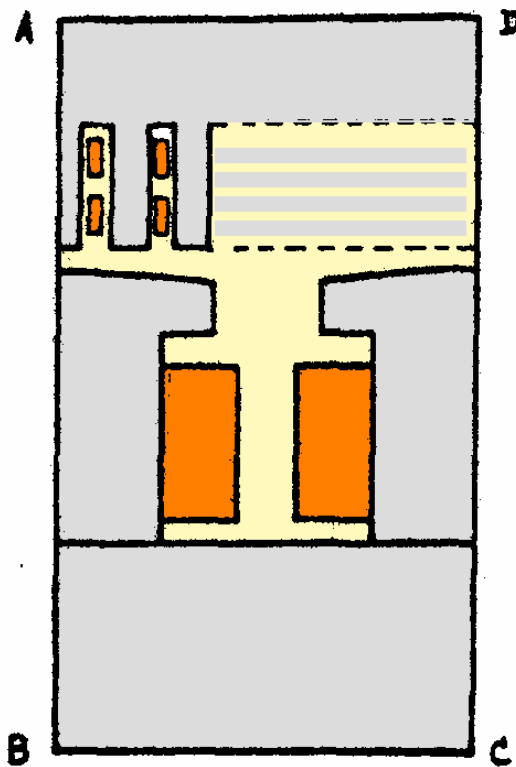


Рис.4.9. Конечно-элементная модель открытого паза с магнитным клином, использованная в [4.3].  $D$  и  $N$  – граничные условия Дирихле и Неймана (задача решается в терминах скалярного магнитного потенциала). С учетом симметрии рассматривается половина пазового деления. Магнитная проницаемость клина принята постоянной

Однако и уточнение формул для расчета параметров электрических машин зачастую требует моделирования областей, значительно больших, чем одно зубцовое деление. Так, например, в [4.4] (Wang Jian-She, “*Finite Element Analysis of Saturated Synchronous Reactances of Salient Pole Synchronous Machine*, - (Расчет насыщенных значений синхронных индуктивных сопротивлений явнополюсных синхронных машин методом конечных элементов)”, *Electric Machines and Power Systems*, 1986, №11, 201-213) для определения насыщенных значений синхронных индуктивных сопротивлений с помощью метода конечных элементов рассчитываются поля на полюсном делении гидрогенератора мощностью 194,2 МВА (рис. 4.10) для режимов короткого замыкания, холостого хода и режимов нагрузки при  $\cos\varphi = 0$  (для индуктивной и емкостной нагрузок).



**Fig.1. Cross section of one pole-pitch**

Рис. 4.10. (рис. 1 в [4.4]). Расчетная область – одно полюсное деление гидрогенератора. Число пазов на полюс и фазу равно трем



Картина поля в расчетной области при возбуждении по поперечной оси (по результатам этого численного эксперимента определялось синхронное индуктивное сопротивление  $X_{aq}$ ) показана на рис. 4.11.

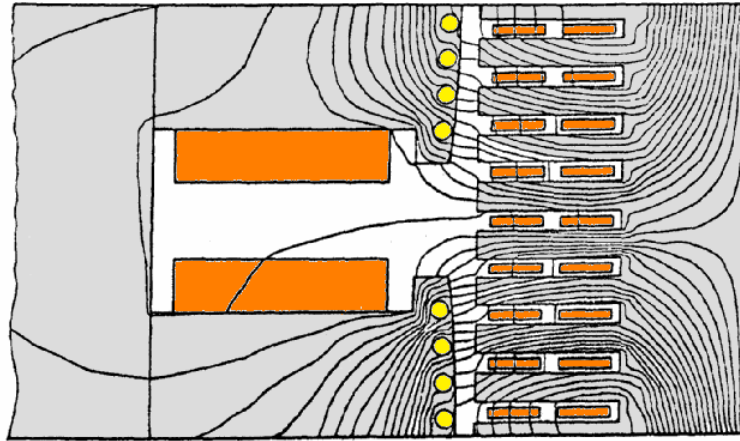


Fig.12. Flux plot for determining  $\tilde{X}_{aq}$

Рис. 4.11. (рис. 12 в [4.4]). Поперечное поле обмотки якоря

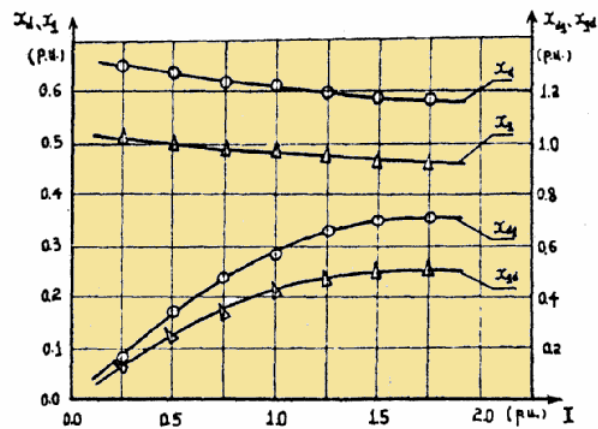


Fig.13. Variations of  $X_d$ ,  $X_q$ ,  $X_{dq}$  and  $X_{qd}$  with  $I$  as  $V=V_N$ ,  $\cos\phi = \cos\phi_N$

Рис. 4.12 (рис. 13 в [4.4]). Зависимости от тока якоря индуктивных сопротивлений  $X_d$ ,  $X_q$ ,  $X_{dq}$  и  $X_{qd}$ , рассчитанные по методу конечных элементов при номинальном напряжении и  $\cos\phi$  гидрогенератора

На рис. 4.12 показаны зависимости от тока якоря гидрогенератора синхронных индуктивных сопротивлений  $x_d$  и  $x_q$ , а также индуктивных со-

противлений  $x_{qd}$  и  $x_{dq}$ , учитывающих индуктивные связи по осям  $d$  и  $q$  машины при насыщении магнитной цепи.

Заметим, что пренебрежение взаимноиндуктивной связью по осям  $d$  и  $q$  является одним из основных допущений классической теории двух реакций.

При моделировании больших областей естественно возникает проблема рационального распределения узлов расчетной сетки. Обычно расчетчики, не имеющие достаточного опыта работы с конечно-элементными программами, формируют излишне подробные сетки с неоправданно большим числом узлов. При этом, несмотря на то, что в этом случае время решения задачи существенно возрастает, точность решения может не повышаться или повышаться незначительно.

При формировании конечно-элементной структуры следует руководствоваться довольно простым правилом: плотность узлов должна быть наибольшей там, где предполагается наиболее интенсивное изменение поля. В связи с этим уже на ранних этапах разработки математического обеспечения метода конечных элементов появились работы по формированию *адаптивных* сеток. Один из возможных способов построения таких структур состоит в следующем. Вначале задача решается на весьма грубой сетке, имеющей малое число узлов. Полученное приближенное решение позволяет определить участки области, на которых поле изменяется наиболее сильно. Как правило, эти участки располагаются вблизи изломов границ сердечников: у кромок зубцов, возле краев полюсных наконечников и т.п. После этого формируется вторая, более подробная сетка, причем плотность узлов увеличивается в основном на упомянутых участках. Таким же образом после второго решения формируется, если это окажется необходимым, третья сетка и т.д. Критерием, в соответствии с которым принимается решение о построении более подробной сетки, является сравнение локальной ошибки с наперед заданной величиной (например, проверка выполняемости закона полного тока на некоторых произвольно выбранных контурах).

В качестве примера рационального построения конечно-элементной структуры приведем статью, посвященную расчету поля в пятифазном цилиндрическом линейном двигателе с зубчатым сердечником статора. ([4.5]: *B. Tomzuk, G.Schroder, A.Waindk, "Finite-Element Analysis of the Magnetic and Electromechanical Parameters Calculation for a Slotted Permanent-Magnet Tubular Linear Motor (Расчет магнитного поля и электромеханических параметров цилиндрического линейного двигателя с зубчатым сердечником методом конечных элементов)"*, *IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 43, No. 7, July 2007, pp. 3229-3236* ). На рис. 4.13 показана конечно-элементная структура, на которой моделируется магнитное поле линейного двигателя. Используется цилиндрическая система координат, в связи с чем для осесимметричной конструкции достаточно отобразить только половину продольного сечения. Однородное условие Дирихле задано на всей внешней границе области – на продольной оси (оси симметрии), на линиях пересечения с плоскостью задачи двух ограничивающих торцевых плоскостей и на внешней цилиндрической поверхности. Плотность распределения узлов в области задачи неравномерна – в зазоре между сердечниками, где вследствие зубчатости одного из сердечников ожидаются наибольшие изменения индукции, она максимальна.

На увеличенном фрагменте сетки (рис. 4.13,*b*) виден след цилиндрической поверхности, проведенной посередине высоты зазора. Обычно при формировании конечно-элементной структуры предусматривают такую «технологическую» поверхность, для того чтобы при обработке результатов моделирования (в постпроцессорном режиме) считывать с этого контура значения индукции для последующего гармонического анализа и для расчета электромагнитных сил по составляющим поля в зазоре (по так называемым *максвелловским натяжениям*, о которых будет сказано в дальнейшем). Обычно для достижения хорошей точности при определении электромагнитных сил и вращающих моментов по максвелловским натяжениям рекомендуют плотность узлов сетки в этой зоне выбирать такой, чтобы в зазоре

формировалось 4–5 слоев конечных элементов. Как можно видеть на рис. 4.13,*b*, авторы статьи следовали этой рекомендации.

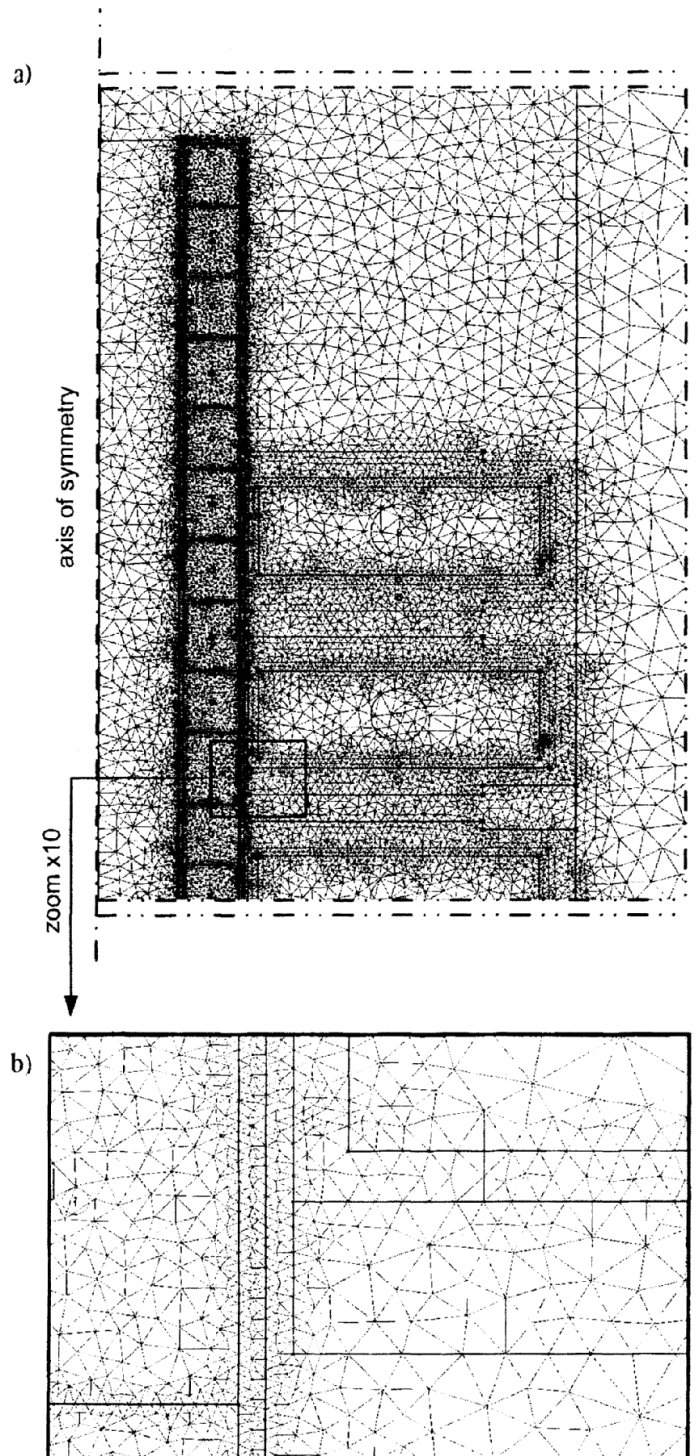


Fig. 3. Finite-element meshes: (a) 1/4 cross-section of the motor with outer region; (b) zoom in on air gaps and corners discretization.

**Рис. 4.13 (рис. 3 в [4.5]). Конечно-элементная структура продольного сечения цилиндрического линейного двигателя. *a*) общий вид; *b*) 10-кратное увеличение выделенного участка**

При формировании расчетной сетки необходимо следить за тем, чтобы в процессе ее построения не образовывалось «плохих» с вычислительной точки зрения конечных элементов. При использовании простых треугольных элементов, а, как правило, для решения двумерных задач применяют именно такие элементы, «плохими» считаются сильно вытянутые треугольники. Возможность образования треугольников с одним или даже двумя *очень* острыми углами возникает тогда, когда под малым углом пересекаются (или касаются друг друга) границы внутренних подобластей. В этом случае подпрограмма, обеспечивающая автоматическое построение сетки, может зависнуть, поскольку она сталкивается с необходимостью очень сильного дробления пространства в зоне малого зазора.

Избежать трудностей, связанных с моделированием малых зазоров удается при особом подходе к формированию сетки, предложенном в работе по исследованию двигателя с *катящимся ротором*, выполненной группой финских и польских инженеров, под руководством известного специалиста по расчету электрических машин методом конечных элементов проф. Антеро Арккио (*Antero Arkkio*) [4.6]: A. Arkkio et al., “*Finite-Element Analysis for a Rolling-Rotor Electrical Machine* (Расчет электрической машины с катящимся ротором методом конечных элементов)”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 46, No 8, 2010, pp. 2727-2730.

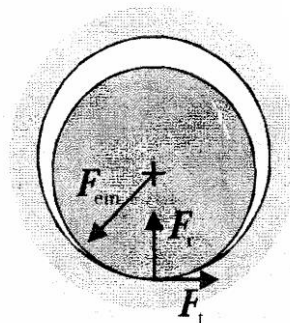


Fig. 1. Operating principle of the rolling-rotor machine.

**Рис. 4.14 (рис. 1 в [4.6]). Поперечное сечение двигателя с катящимся ротором. Стрелками показаны: электромагнитная сила одностороннего тяжения и тангенциальная и радиальная составляющие реакции в точке касания ротора и статора**

Поперечное сечение моделируемой машины с катящимся ротором показано на рис. 4.14.

Предложенный в работе способ формирования конечно-элементной структуры, позволяет моделировать эксцентрично расположенный ротор при больших отношениях максимального зазора к минимальному. Зона модели, соответствующая воздушному зазору, разделена на *радиальные* полосы, каждая из которых состоит из нескольких слоев *пар* конечных элементов в форме *прямоугольных* треугольников с общей гипотенузой. По мере приближения к точке контакта статора и ротора число слоев уменьшается до одного, причем радиальный размер этого слоя также уменьшается до допустимой величины. Движение ротора моделируется смещением точки контакта, конечно-элементная структура ротора при этом не вращается относительно конечно-элементной структуры статора.

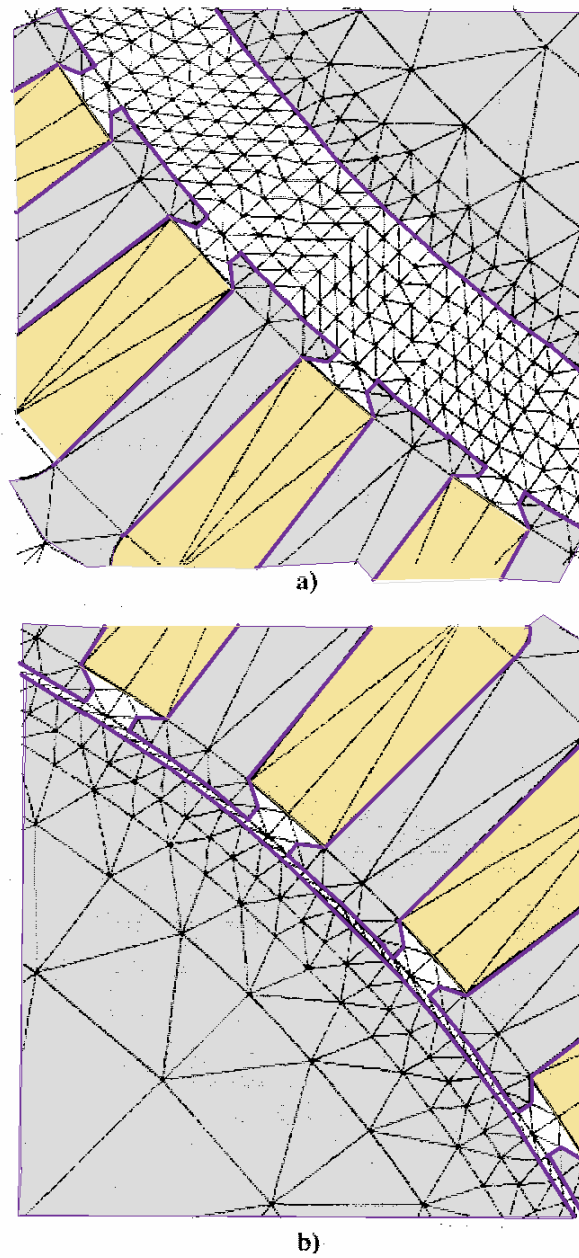


Fig. 2. Regions where the rotor and stator are (a) relatively far from each other and (b) close to each other.

**Рис. 4.15 (рис. 2 в [4.6]).** Фрагменты конечно-элементной структуры модели двигателя с катящимся ротором: а) в зоне максимального зазора; б) в зоне минимального зазора

На рис. 4.15 показаны фрагменты конечно-элементной структуры в зонах максимального и минимального зазоров.

Использованный прием построения сетки в неравномерном зазоре позволил смоделировать ротор, практически касающийся статора – на рис. 4.16 показана картина поля, полученная для эксцентриситета, составляющего 99% от среднего зазора.

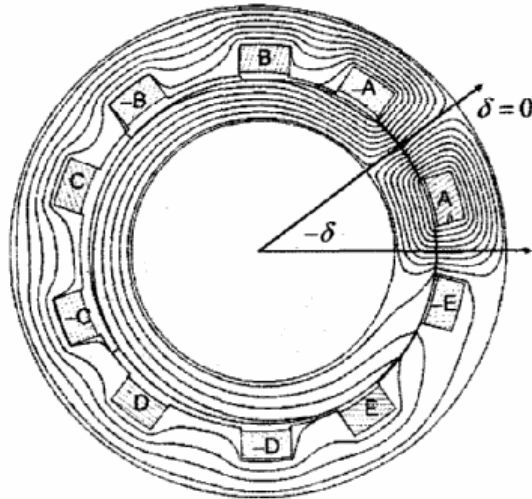


Fig. 3. Geometry of the rolling-rotor prototype motor. The eccentricity is 99% of the average air gap. The load angle  $\delta$  defines the phase of the excitation with respect to the rotor position.

**Рис. 4.16 (рис. 3 в [4.6]). Картина поля при эксцентриситете, составляющем 99% от среднего зазора. Угол  $\delta$  определяет положение магнитной оси обмотки статора относительно ротора при заданном его положении**

На рис 4.17 показаны результаты расчета по конечно-элементной модели и измерения на лабораторном образце двигателя индуктивности фазы обмотки статора. Измерения проводились при пониженном напряжении с тем, чтобы избежать влияния насыщения стали магнитопровода.



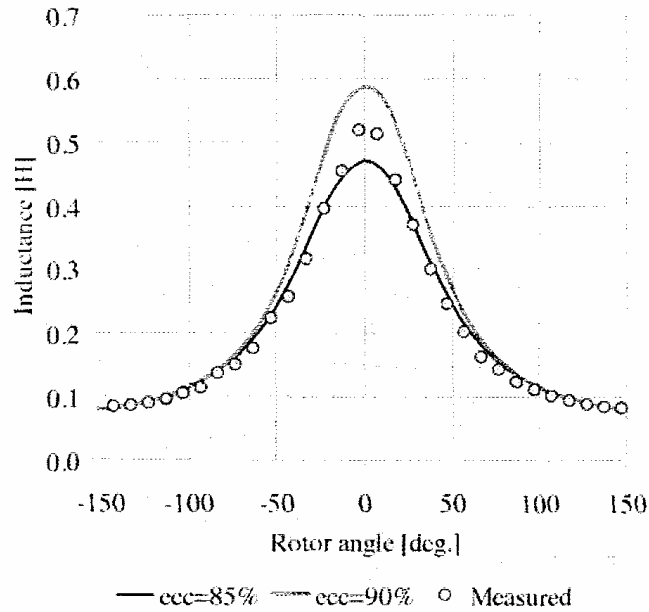


Fig. 4. Measured and computed phase inductance as a function of rotor angle  $\delta$  defined in Fig. 3. The computed curves are for the relative eccentricities of 85% and 90%.

**Рис. 4.17 (рис. 4 в [4.6]). Расчетные и опытные зависимости индуктивности фазы обмотки статора от углового положения катящегося ротора. На модели воспроизводились два эксцентриситета – 85% и 90% от среднего значения зазора**

По мере развития вычислительных машин становилось возможным решение все более и более сложных задач.

Важным этапом развития численных методов исследования электрических машин явилась разработка программ, позволяющих рассчитывать не только магнитостатические поля, но на их основе – устройств, питающихся от источников напряжения. При этом электрическая машина представляется в виде электрической цепи, для которой должно выполняться второе уравнение Кирхгофа, в общем случае в дифференциальной форме. Если временная зависимость напряжения в этом уравнении считается заданной, то ЭДС обмоток должны определяться по *расчетным* временным зависимостям *потокосцеплений*, которые, в свою очередь, должны находиться по результатам многократного решения магнитостатических задач – для фиксированных моментов времени при фиксированных угловых положениях ротора. Таким образом, численное интегрирование системы дифференциальных уравнений Кирхгофа требует на несколько порядков большего объема вы-

числений, чем отдельный, единичный расчет поля при заданных источниках. Особенно значительно объем вычислений и, соответственно, длительность расчета, возрастают, если на каждом шаге интегрирования рассчитываются *нелинейные* магнитные поля.

Тем не менее, примерно со второй половины 90-х годов в научно-технических журналах довольно часто, а в последнее время *постоянно*, появляются статьи, в которых сообщается о расчете переходных процессов в электрических машинах *методом численного интегрирования системы уравнений состояния* с использованием метода конечных элементов. В англоязычной литературе этот метод получил название *finite-element time-stepping method* (дословно – конечно-элементный метод с пошаговым интегрированием во времени).

Результаты одной из первых работ этого направления были опубликованы в сборнике докладов конференции *COMPUMAG-1987* ([4.7]: *Preston T.W., Reece A.B.J., and Sangha P.S., "Induction Motor Analysis by Time-Stepping Techniques* (Расчет процессов в асинхронном двигателе методом численного интегрирования дифференциальных уравнений), *IEEE Transactions on Magnetics, Vol. MAG-24, No. 1, Jan. 1988, pp. 471-474*). В дальнейшем число исследований в этом направлении быстро возрастало, особенно после того, как был разработан ряд коммерческих программ, реализующих этот метод. В настоящее время метод конечных элементов довольно широко применяется для расчета самых разнообразных временных процессов, происходящих в электрических машинах, и получения соответствующих им временных зависимостей, таких, например, как изменение электромагнитного момента при взаимном перемещении сердечников (*с учетом их зубчатости и локального насыщения*), изменение ЭДС обмоток (в том числе *с учетом насыщения стали и реакции индуктированных токов*), изменение локальных и полных потерь в стали (в том числе *с учетом локальных особенностей изменения поля во времени*) и т.д.

Так, в уже цитированной выше статье [4.6] приведена временная зависимость тока статора двигателя с катящимся ротором, рассчитанная с помощью метода численного интегрирования, очень хорошо, кстати, совпавшая с экспериментальной зависимостью, измеренной на лабораторном образце двигателя (рис. 4.18).

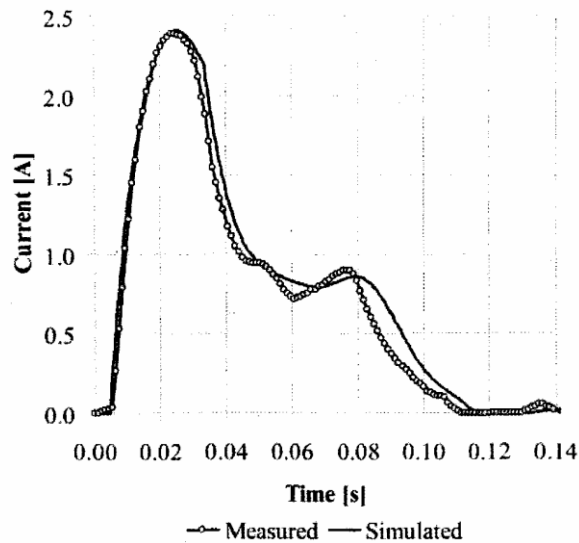


Fig. 9. Comparison of measured and computed current waveforms.

**Рис. 4.18 (рис. 9 в [4.6]). Расчетная и экспериментальная (кружки) временные зависимости тока фазы обмотки статора двигателя с катящимся ротором**

Примером исследования переходных процессов в электрических машинах методом численного интегрирования дифференциального уравнения напряжений может служить статья китайских (Гонг-Конг и Великобритания) авторов [4.8]: *Tze-Fun Chan, Weimin Wang, Loi-Lei Lai, "Permanent Magnet Synchronous Generator Supplying an Isolated Load (Работа синхронного генератора с постоянными магнитами на автономную нагрузку)"*, *IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 46, No. 8, August 2010, pp. 3353-3356*. На рис. 4.19 показано поперечное сечение исследуемой машины и приведена электрическая схема установки, включающей в себя кроме генератора трехфазный выпрямитель и автономную нагрузку.

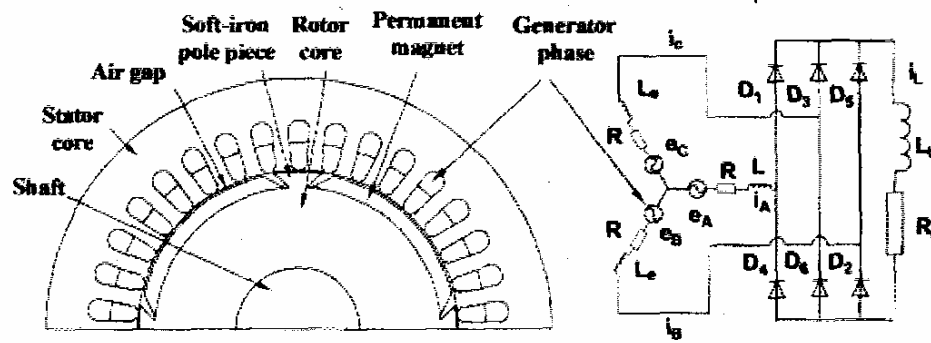


Fig. 1. Cross-section of prototype PMSG with inset rotor construction feeding a rectifier load.

Рис. 4.19. (рис. 1 в [4.8]). Поперечное сечение и схема включения исследуемого генератора. *Shaft* – вал; *Stator core* – сердечник статора; *Air gap* – воздушный зазор; *Soft-iron pole piece* – полюсный наконечник из магнетомягкого материала; *Rotor core* – сердечник ротора; *Permanent magnet* – постоянный магнит; *Generator phase* – фаза генератора

Математическая модель, разработанная авторами статьи, представляет собой сочетание двухмерной полевой (конечно-элементной) модели поперечного сечения генератора и модель электрической цепи, включающей в себя кроме источника напряжения индуктивное сопротивление лобовых частей и модель диодного выпрямителя. Методом численного интегрирования результирующей системы дифференциальных уравнений рассчитывались различные режимы: холостой ход, короткие замыкания, работа на пассивную активно-индуктивную и выпрямительную нагрузку. Результаты расчетов хорошо совпали с результатами измерений на опытном генераторе мощностью 2,5 кВт.

Расчетная картина поля в поперечном сечении генератора показана на рис. 4.20. На следующих двух рисунках сравниваются расчетные и экспериментальные временные зависимости напряжений и токов генератора в различных режимах работы.

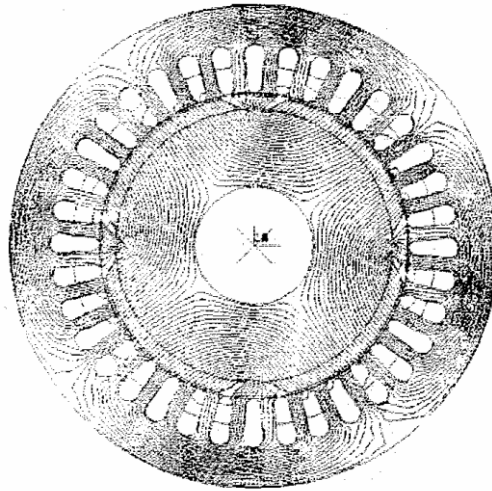


Fig. 2. Cross-section of PMSG with surface-inset rotor and the flux plot obtained from FEA.

Рис. 4.20. (рис. 2 в [4.7]). Картина поля в поперечном сечении исследуемого генератора

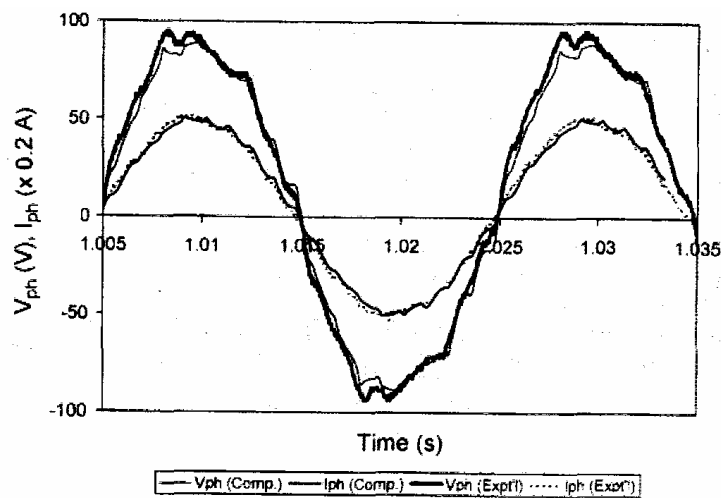


Fig. 4. Computed and experimental waveforms of phase voltage and phase current when the PMSG is supplying a load resistance of  $9.1 \Omega$  per phase.

Рис. 4.21. (рис. 4 в [4.7]). Расчетные и экспериментальные временные зависимости фазных напряжений и токов генератора при работе на нагрузку  $9,1 \text{ Ом}$

Здесь мы привели только несколько примеров применения метода конечных элементов для расчета электромагнитных и электромеханических процессов в электрических машинах. В последнее время этот метод настолько широко и успешно используется для решения самых разнообраз-

ных задач электротехники, что можно с уверенностью считать его *основным* инструментом исследования современных электрических машин.

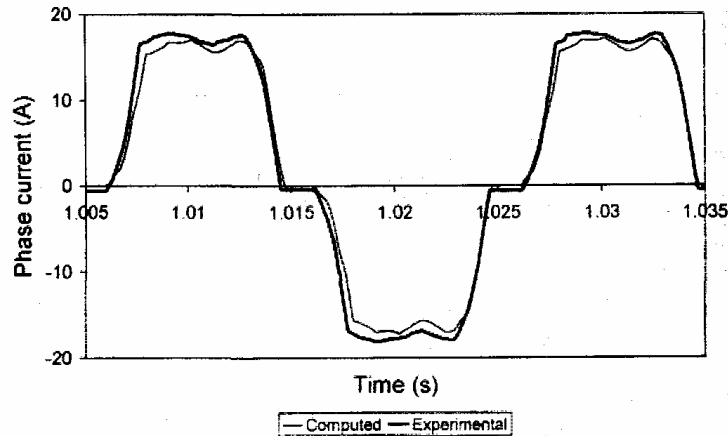


Fig. 15. Computed and experimental waveforms of phase current when the PMSG is supplying a rectifier load ( $R_L = 9.2 \Omega$ ,  $L_L = 11.27 \text{ mH}$ ).

**Рис. 4.22. (рис. 15 в [4.7]). Расчетная и экспериментальная временные зависимости фазного тока при работе генератора на выпрямительную нагрузку с активным сопротивлением 9,2 Ом и индуктивностью 11,27 мГн**

За прошедшие со времени появления первых публикаций 30 – 40 лет в развитии вычислительной техники и математического обеспечения произошли поистине революционные изменения. Современные расчетчики получили возможность, используя конечно-элементные программы, решать задачи такой сложности, которая совсем недавно казалась непреодолимой. В последнее время появились работы, в которых метод конечных элементов используется в оптимизационном проектировании и при решении так называемых *связанных* задач. Решение связанных задач предполагает расчет на одной общей конечно-элементной структуре различных по физической природе полей, причем учитывается их взаимное влияние. Например, одновременный расчет магнитного и теплового полей позволяет учесть изменение свойств стали в процессе нагрева и, с другой стороны, изменение потерь и температуры, связанное с изменением магнитных свойств.