

Раздел 5. Математическое описание электромагнитного поля в электрической машине

В этом разделе в общем виде описывается математическая модель электрической машины, определяется терминология, устанавливается вид и число уравнений, составляющих полную систему уравнений, решение которой необходимо для расчета режимов работы машины и ее характеристик.

Область задачи.

Как правило, мы будем рассматривать области, заключенные внутри внешней границы, достаточно удаленной, чтобы считать, что поле на ней практически отсутствует. Можно, однако, сформулировать полевою задачу и на неограниченной области, но в этом случае решение достигается с помощью специального приема.

На рис. 5.1 показаны поперечное и продольное сечения электрической машины с цилиндрическими сердечниками (иногда такие машины, в отличие от *линейных*, называют *вращающимися*). Для того чтобы рассчитать электромагнитное поле во внутреннем объеме этой машины (и в части окружающего ее пространства, если внешняя граница области задачи отстоит на некоторое расстояние от поверхности корпуса), необходимо описать формы и свойства всех участков области и определить условия, связывающие величины поля на границах раздела этих участков – так называемые *внутренние* граничные условия.

Имея в виду, что положение сердечников друг относительно друга изменяется во времени (в данном случае ротор вращается в расточке статора), удобно рассчитывать поле каждого из сердечников в собственной системе координат. Разделение единой (общей) области задачи на две подобласти осуществляется с помощью поверхности S_{12} , отделяющей неподвижные части машины от вращающихся. Поверхность S_{12} проходит по поверхности ва-

ла, *сквозь* подшипники, в торцевой зоне, *посередине* воздушного зазора в активной зоне, далее опять в торцевой зоне, *сквозь* подшипники и по поверхности второго выходного конца вала, если таковой имеется.

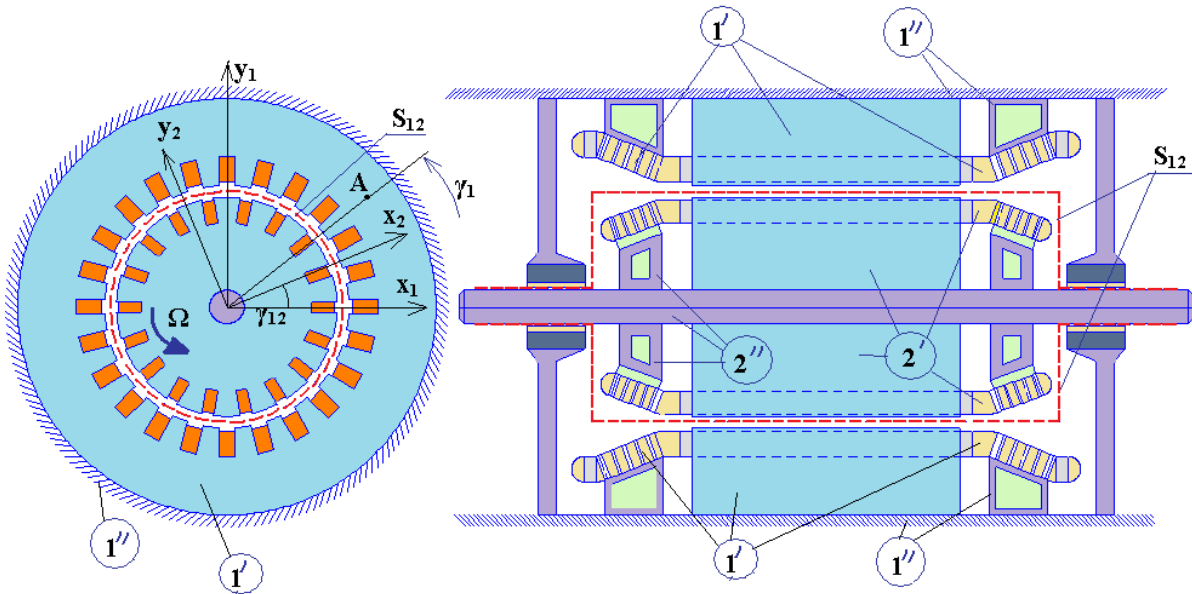


Рис. 5.1. Область задачи, индексация активных и конструктивных частей

На рис. 5.1 приняты следующие обозначения. Цифрами 1 и 2 обозначены части, относящиеся к статору и к ротору соответственно. Одним штрихом обозначены части машины, относящиеся к *активным* (сердечники, обмотки, включая лобовые части). Двумя штрихами обозначены части, называемые *конструктивными* (корпус, бандажи и кронштейны, обеспечивающие крепление лобовых частей обмоток, вентиляторы, подшипники).

Очевидно, что процессы, происходящие в статоре, удобнее описывать в неподвижной системе координат x_1, y_1, z , а процессы и величины поля, связанные с ротором, - во вращающейся системе координат x_2, y_2, z . Связь между этими системами координат определяется углом γ_{12} :

$$\gamma_{12} = \gamma_{12.нач.} + \int_0^t \Omega dt, \quad (5.1)$$

где Ω - угловая скорость вращения ротора.

Уравнение поверхности S_{12} :

$$r = f(z) \quad (5.2)$$

Формы поверхностей, отделяющих участки с различными свойствами (часто говорят: отделяющих различные *среды*) друг от друга, должны определяться специальными уравнениями. В современных вычислительных программах, предназначенных для расчета полей, границы сред обычно задаются пользователем либо с помощью графической подпрограммы, либо в виде массивов координат характерных точек, а необходимые вычисления, определяющие принадлежность участка той или иной среде, выполняются автоматически.

Допущение о квазистационарности поля

Будем считать, что внешние воздействия (токи и напряжения) и процессы внутри машины изменяются с частотами примерно одного порядка, причем не очень большими. Другими словами, не будем рассматривать таких высоких частот, при которых следует считаться с *токами смещения*:

$$\bar{j}_{см} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.$$

Кроме того, пренебрежем явлением *запаздывания* распространением электромагнитных волн внутри машины.

При этих двух условиях поле, соответствующее мгновенным значениям плотностей токов (переменных во времени) не отличается от того поля, которое имело бы место в том случае, если бы токи были не переменными, а постоянными. Такое поле называется *квазистационарным*.

Всякое допущение создает некоторую погрешность. Допущение о квазистационарности поля электрической машины, если не рассматриваются очень быстрые процессы, например, волновые, вызванные электрическими разрядами, является наименее грубым - связанная с ним погрешность составляет примерно 0,001%.

При пренебрежении токами смещения уравнения Максвелла записываются более просто:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{H}_k &= \bar{j}_k & \operatorname{rot} \bar{E}_k &= -\frac{\partial \bar{B}_k}{\partial t} \\ \bar{j}_k &= \gamma_k \bar{E}_k & \bar{B}_k &= \mu_k \bar{H}_k \\ \operatorname{div} \bar{j}_k &= 0 & \operatorname{div} \bar{B}_k &= 0 \end{aligned}$$

Для области, показанной на рис. 5.1, индекс k принимает значения 1 или 2.

Если рассчитываются не только *электромагнитные*, но и *электро-механические* процессы, к этим уравнениям должны быть добавлены уравнения, связывающие *моменты* (электромагнитный, внешний момент, приложенный со стороны приводного устройства, момент сопротивления, создаваемый в результате трения, в том числе о воздух или другую среду, в которой вращается ротор, динамический момент, обусловленный моментом инерции вращающихся частей):

$$M_{эм} + M_{внешн.} + M_{сопр.} + J \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0.$$

Аналогичное уравнение должно быть рассмотрено, если рассчитывается не вращающаяся, а *линейная* машина, в которой сердечники линейно перемещаются друг относительно друга.

Внутренние граничные условия

Мы уже говорили о *внешних* граничных условиях, которым должна подчиняться искомая функция, описывающая распределение поля в области задачи. Из трех типов внешних граничных условий (Дирихле, Неймана, смешанные) мы, как правило, будем рассматривать первые два, причем в достаточно простой форме: когда функция или ее производная по направлению нормали к границе либо равны нулю (однородные условия), либо равны постоянной или изменяются по гармоническому закону.

Если в области задачи существует несколько различных сред, то они отделяются друг от друга границами, на которых также должны быть заданы

граничные условия, называемые в этом случае *внутренними*. Таким образом, каждая среда рассматривается как *подобласть* и вся задача разбивается на подзадачи.

Внутренние граничные условия устанавливают связь между величинами поля на границах сред. К числу уравнений, описывающих внутренние граничные условия, относится и уравнение поверхности S_{12} , отделяющей подобласти 1 и 2:

$$f_{km}(z, r, \gamma) = 0. \quad (5.3)$$

Следует заметить, что при расчетах полей с помощью современных конечно-элементных программ внутренние граничные условия непосредственно, в виде уравнений, не задаются. При формировании модели кроме геометрических очертаний подобластей задаются и их свойства: электропроводность, магнитная проницаемость (постоянная или зависящая от напряженности поля в соответствии с заданной кривой намагничивания), плотность тока и т.д. На основании этих данных в процессе расчета поля внутренние граничные условия *выполняются автоматически*.

Исходя из условия сохранения потока при прохождении силовых линий магнитного поля через поверхность раздела сред m и k , нетрудно получить соотношения между нормальными и тангенциальными составляющими индукции и напряженности поля:

$$B_{mn} = B_{kn}, \quad (5.4)$$

$$\frac{H_{mn}}{H_{kn}} = \frac{\mu_k}{\mu_m}, \quad (5.5)$$

В соответствии с (5.4) и (5.5) при пересечении границы сред сохраняется нормальная составляющая вектора индукции магнитного поля, а нормальные составляющие напряженности поля относятся друг к другу обратнопропорционально магнитным проницаемостям сред.

Применив закон полного тока к контуру, охватывающему малый участок поверхности раздела (рис. 5.2), получим (для случая, когда на границе раздела не задан поверхностный ток):

$$H_{m\tau} = H_{k\tau} \quad (5.6)$$

и, следовательно,

$$\frac{B_{m\tau}}{B_{k\tau}} = \frac{\mu_m}{\mu_k}. \quad (5.7)$$

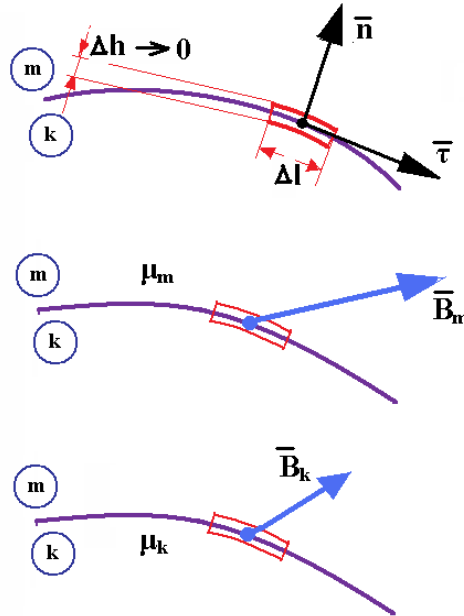


Рис. 5.2.К определению внутренних граничных условий.

Таким же образом для электрического поля можно получить уравнения, выражающие внутренние граничные условия, в частности:

$$j_{mn} = j_{kn}, \quad (5.8)$$

$$E_{m\tau} = E_{k\tau}. \quad (5.9)$$

В электрическом поле при пересечении поверхности раздела двух сред сохраняются нормальные составляющие плотности тока (непрерывность тока, рассматриваемого как поток вектора плотности тока) и тангенциальные составляющие напряженности поля.

Граничные условия на поверхности раздела подобластей 1 и 2 S_{12} , проведенной в воздушном зазоре машины:

$$\bar{B}_1(r, z, \theta_1) = \bar{B}_2(r, z, \theta_2). \quad (5.10)$$

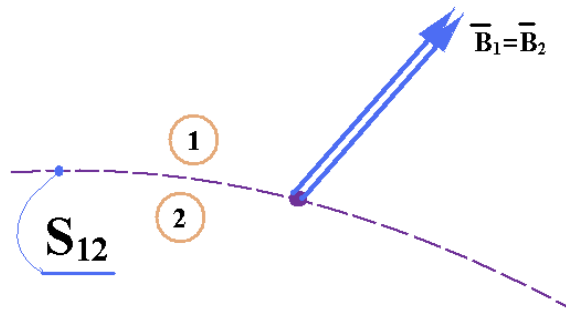


Рис. 5.3. Внутренние граничные условия на поверхности S_{12}

Внутренние граничные условия остаются неизменными при *любых режимах работы*.

Используя закон полного тока, нетрудно получить выражение для тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля в контактирующих средах и для того случая, когда на поверхности раздела имеется поверхностный ток.

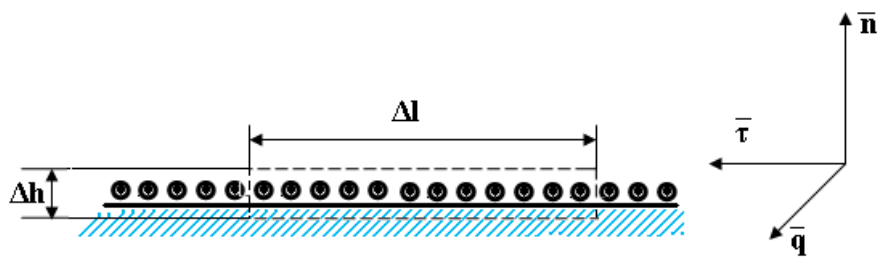


Рис. 5.4. Граничные условия на поверхности раздела сред при наличии поверхностного тока

$$(-H_{k\tau} + H_{m\tau})\Delta l = i,$$

где $i = j_q \cdot \Delta s = j_q \cdot \Delta l \cdot \Delta h$, j_q - плотность тока в поверхностном токовом слое, которая на длине Δl малого выделенного контура считается постоянной.

После подстановки получим выражение для изменения (скачкообразного) тангенциальной составляющей напряженности поля при пересечении поверхности раздела:

$$(-H_{\text{кт}} + H_{\text{мт}}) = j_q \frac{\Delta l \cdot \Delta h}{\Delta l} = j_q \Delta h = \sigma.$$

Величину σ называют *линейной плотностью тока* (размерность – А/м).

$$-H_{\text{кт}} + H_{\text{мт}} = \sigma. \quad (5.11)$$

Заметим, что при проектировании электрической машины на начальной стадии задаются *электромагнитными нагрузками*, одной из которых является *линейная нагрузка*, имеющая такую же размерность и представляющая собой, в сущности, линейную плотность тока, эквивалентирующую МДС обмотки.

Внешние граничные условия на поверхности, отделяющей электрическую машину от сети, с которой она работает.

Вернемся к внешним граничным условиям на поверхности S_0 , отделяющей область задачи от сети, к которой присоединяется рассматриваемая электрическая машина. Условимся считать, что обмотка машины представлена одним витком (см. рис. 5.5).

Рассмотрим второе уравнение Максвелла применительно к витку обмотки, изображенному на рис. 5.5.

$$\text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}.$$

Поток ротора напряженности электрического поля через поверхность витка равен:

$$\int_{S_m} \text{rot}_n \bar{E} \cdot ds = -\int_{S_m} \left(\frac{\partial B_n}{\partial t} \right) ds.$$

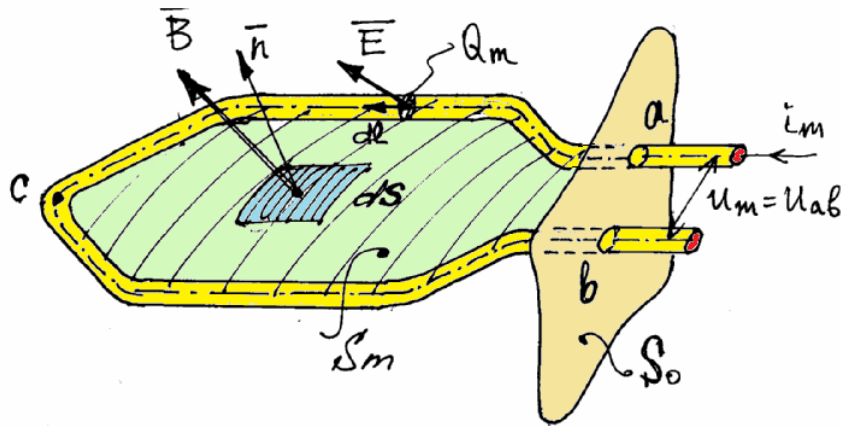


Рис. 5.5. К выводу уравнения (5.12). Вектор напряженности электрического поля, как правило (но не обязательно!), направлен вдоль проводников обмотки. Так же, как и вектор индукции обычно (но не обязательно) направлен нормально к поверхности витка

Применим теорему Стокса к левой части этого уравнения и вынесем оператор дифференцирования за знак интеграла:

$$\oint_{(acba)} E_l dl = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_m} B_n ds = -\frac{\partial \psi}{\partial t} = e_m$$

Падения напряжения на контуре витка рассмотрим на двух участках:

$$\int_{acb} E_l dl + \int_{ba} E_l dl = e_m$$

Первый из этих интегралов есть падение напряжения на сопротивлении витка:

$$\int_{acb} E_l dl = \int_{acb} \left(\frac{j_l}{\gamma_m} \right) dl = \int_{acb} \left(\frac{i_m}{Q_m} \right) \rho_m dl = \frac{i_m}{Q_m} \rho_m l_m = i_m R_m,$$

где γ_m и ρ_m – электропроводность и удельное сопротивление материала провода витка, i_m – ток витка, R_m – его сопротивление.

Второй интеграл представляет собой *напряжение на зажимах обмотки машины, противоположное по знаку напряжению сети*:

$$\int_{ba} E_l dl = u_{ba} = -u_{ab} = -u_m.$$

Окончательно:

$$R_m i_m = u_m - \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_m} B_n ds. \quad (5.12)$$

Уравнение (5.12) является очень важным – оно выражает собой переход от представления машины в виде электрической цепи к полевой ее модели.

Заметим, при выводе (5.12) мы упрощенно представили сопротивление витка обмотки:

$$R_m = \rho_m \frac{l_m}{Q_m}.$$

При более строгом подходе активное сопротивление витка должно определяться по результатам расчета поля внутри провода, поскольку оно зависит от распределения плотности тока в нем.

Формулировка полевой задачи

При формулировке полевой задачи, связанной с расчетом электромагнитных или электромеханических процессов в электрической машине, должно быть задано:

1. размеры и физические свойства сред;
2. размеры области поля и уравнения границы;
3. уравнения поверхностей, отделяющих статор от ротора;
4. временные зависимости напряжений, приложенных к *ветвям* обмотки и/или временные зависимости токов в них;
5. момент инерции вращающихся частей J и внешний момент $M_{\text{внешн.}}$, сообщаемый электрической машине приводным устройством в случае генератора или нагрузкой в случае двигателя;
6. начальное угловое положение ротора относительно статора γ_{12} ;
7. начальная угловая скорость ротора Ω_0 .

В результате расчета поля требуется определить:

1. частоту вращения (угловую скорость) Ω ;

2. распределение магнитного поля $\bar{B}(x, y, z, t)$;

3. распределение плотности тока $\bar{j}(x, y, z, t)$.

Расчет поля состоит в решении системы, включающей в себя такие уравнения:

1. $\text{rot} \bar{H}_k = \bar{j}_k$, где k – индекс среды;

2. $\text{rot} \bar{E}_k = -\frac{\partial \bar{B}_k}{\partial t}$;

3. $\text{div} \bar{B}_k = 0$;

4. $\text{div} \bar{D}_k = \rho_k$, где ρ_k – объемная плотность электрических зарядов;

5. $\bar{j}_k = \gamma_k \bar{E}_k$;

6. $\bar{D}_k = \varepsilon \varepsilon_0 \bar{E}_k$;

7. $\bar{B}_k = \mu \mu_0 \bar{H}_k$;

8. $f_0(r, \theta, z) = 0$ – уравнение внешней поверхности S_0 ;

9. $B_{n0} = 0$, $j_{n0} = 0$ – условие отсутствия поля на внешней границе;

10. $f_{12}(r, \theta_1, z) = 0$ – уравнение разделительной поверхности S_{12} ;

11. $B_1(r, \theta_1, z) = B_2(r, \theta_2, z)$ – условие непрерывности на поверхности S_{12} ;

12. $\theta_1 = \theta_2 + \theta_{12}$ – уравнение связи систем координат статора и ротора;

13. $f_{km}(r, \theta_1, z) = 0$ или $f_{km}(r, \theta_2, z) = 0$ – уравнения внутренних границ;

14. $H_{m\tau} = H_{k\tau}$; $B_{mn} = B_{kn}$; $j_{mn} = j_{kn}$; $E_{m\tau} = E_{k\tau}$ – внутренние граничные

условия;

15. $u_m(t) = \int_{lm} \bar{E}_m \bar{dl} + \int_{Sm} \frac{\partial \bar{B}_m}{\partial t} ds$ или $i_m = \int_{Q_m} \gamma_m \bar{E}_m \bar{dQ}$;

16. $\theta_{12} = \theta_{12(0)} + \int_0^t \Omega dt$;

17. $M + M_{\text{внешн.}} = J_{\text{рот}} \frac{d\Omega}{dt}$, где $M = f(\bar{B}, \bar{H})$.

Пример формулирования и решения полевой задачи

В качестве примера приведем решение численным методом (используется конечно-элементная программа *FEMM*) достаточно простой задачи – расчет магнитного поля, созданного постоянным магнитом, с учетом того, что вблизи магнита расположен стальной стержень (рис. 5.6).

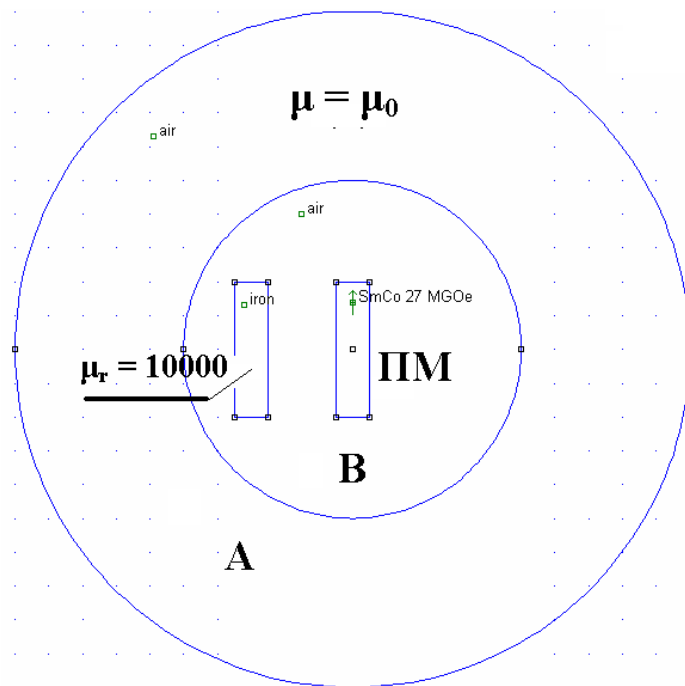


Рис. 5.6. Область задачи, приведенной в качестве примера. Рассчитывается поле постоянного магнита (ПМ) в присутствии стального стержня с постоянной магнитной проницаемостью ($\mu_r = 10000$)

Кратко опишем задачу.

Двухмерное (плоскопараллельное) магнитное поле описывается уравнением Пуассона относительно векторного магнитного потенциала. В центре области расположен самарий-кобальтовый постоянный магнит с размерами поперечного сечения 10 мм x 40 мм, намагниченный в направлении вертикали. Слева от магнита расположен стальной стержень, имеющий такие же размеры, что и магнит. Относительная магнитная проницаемость стержня постоянна, равна 1000. На достаточно удаленной внешней границе (ее диа-

метр равен 200 мм) задано однородное условие Дирихле – векторный магнитный потенциал принят равным нулю.

Область задачи разделена на две подобласти – А и В. Размеры элементов в подобласти А заданы равными 1 мм. В подобласти В размеры элементов вначале также задаются равными 1 мм (вариант расчета I), а затем уменьшаются в 10 раз – до 0,1 мм (вариант II). Полная картина поля показана на рис. 5.7.

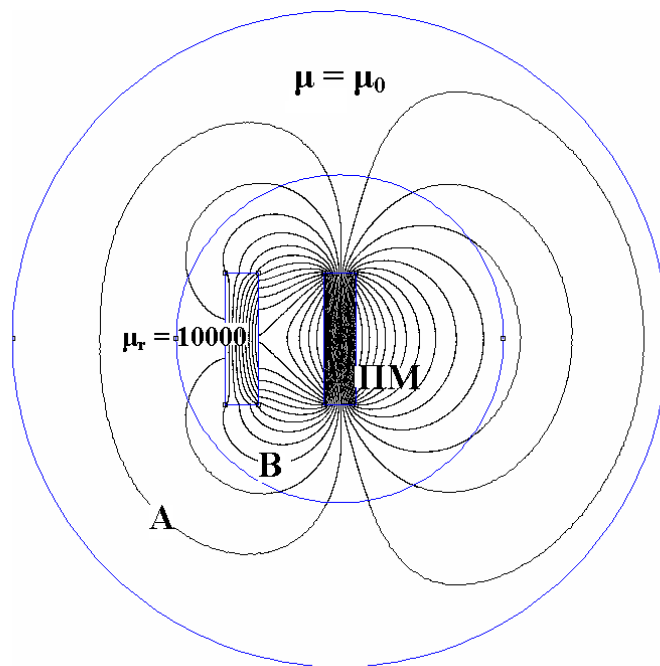


Рис. 5.7. Картина поля, рассчитанная с помощью программы *FEMM*

На рисунках 5.8 и 5.9 приведены фрагменты картины поля, соответствующие вариантам расчета 1 и 2.

Первый фрагмент, как уже было замечено, соответствует более грубой сетке. Некоторые силовые линии на рис. 5.8 имеют изломы, и может показаться, что построенная в этом варианте расчета конечно-элементная структура недостаточно точна. Действительно, при уменьшении размеров элементов на порядок (до 0,1 мм) изломы силовых линий пропадают и картина поля

выглядит презентабельнее (рис. 5.9). Сравним, однако, количественные показатели двух вариантов решения.

В первом варианте общее число узлов конечно-элементной структуры равно 33783, число треугольных элементов – 66868. Время расчета на ПК средней производительности составляет примерно 3 сек. Во втором варианте число узлов возрастает до 793502, а число элементов – до 1586305, время решения возрастает до примерно 7 мин.

Для оценки точности выполнения внутренних граничных условий сравним нормальные составляющие индукции в двух точках, отстоящих на одинаковое расстояние (0,5 мм) от границы раздела сред «сталь-воздух». Выбранные точки 1 и 2 имеют координаты: $x_1 = -25,5$ мм, $x_2 = -24,5$ мм, $y_1 = y_2 = 14,0$ мм (начало координат находится в центре области). Нормальные составляющие индукции в этих точках (верхние индексы соответствуют вариантам расчета): $B_{x1}^I = -0,1021$ Т, $B_{x2}^I = -0,1058$ Т, $B_{x1}^{II} = -0,1025$ Т, $B_{x2}^{II} = -0,1066$ Т.

Сравним также модули индукции в центре стального стержня, т.е. в точке с координатами $x = -30$ мм, $y = 0$: $|\bar{B}_{-30,0}^I| = 0,2988$ Т, $|\bar{B}_{-30,0}^{II}| = 0,2983$ Т. Как видим, существенное усложнение модели и увеличение времени счета в этом случае практически не отразилось на строгости выполнения внутренних граничных условий и привело к очень малому изменению значений индукции в отдельных точках.

В рассматриваемом случае увеличение дробности сетки при выборе меньших по размеру конечных элементов не сказывается существенно и на расчетном значении силы притяжения, действующей между стальным стержнем и магнитом. Постпроцессор программы *FEMM* позволяет рассчитать эту силу по составляющим поля на контуре, охватывающем рассматриваемый объект (в качестве такого объекта выбирается либо стальной стержень, либо магнит). В первом варианте расчетное значение силы, действующей на пластину, равно 0,18041 Н, а на магнит – 0,18032 Н. Во втором варианте эти значения равны соответственно 0,19167 Н и – 0,18156 Н. Таким об-

разом, увеличение дробности сетки при расчете силы привело в данном случае к небольшому уменьшению различия в значениях одной и той же силы, определенной на двух взаимодействующих объектах. В первом варианте это различие составляло 2,6%, во втором – 0,7%.

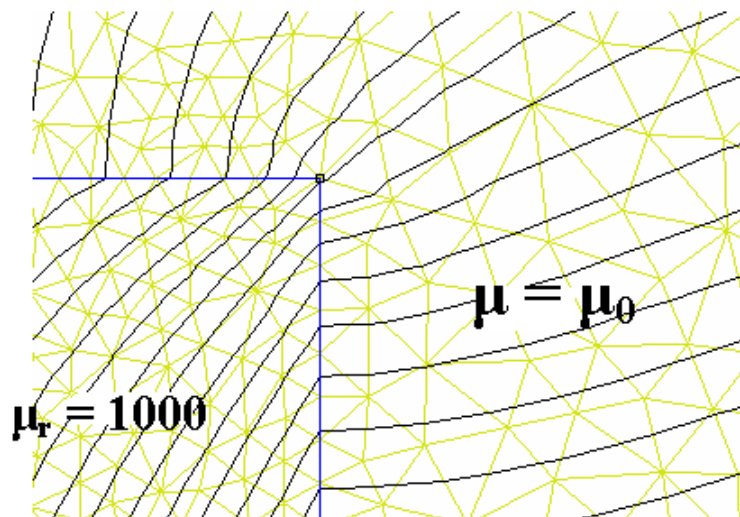


Рис. 5.8. Фрагмент картины поля, рассчитанной в варианте 1

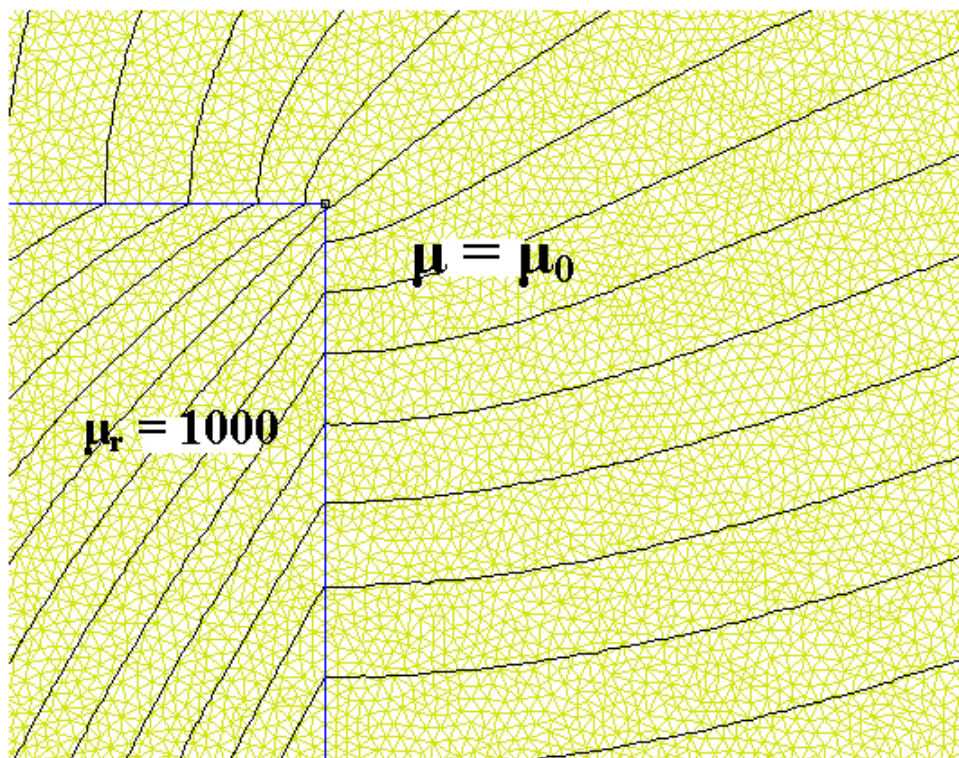


Рис. 5.9. Фрагмент картины поля, рассчитанной в варианте 2