Раздел 6. Электромагнитный момент и силы тяжения

До сих пор мы рассматривали силы, действующие на проводники с током, находящиеся во внешнем магнитном поле, т.е. поле, созданном другими токами или постоянными магнитами. Известное правило левой руки

$$F = B \cdot l \cdot i$$

определяет силу (ее называют *силой Ампера*), действующую на линейный провод с током i, расположенный перпендикулярно к силовым линиям равномерного магнитного поля.

Формула Максвелла для натяжений

Однако силы, действующие в магнитном поле, приложены не только к токам. Более того, если считать, что это не так и силы действуют только на токи, можно придти к существенно неверным результатам. Позднее мы рассмотрим задачу о распределении сил, действующих на провод с током, расположенный в пазу сердечника электрической машины, и убедимся в том, что силы, приложенные к стенкам паза, могут значительно превышать силу, приложенную к проводам.

Одним из наиболее эффективных способов определения электромагнитных сил и моментов является интегрирование удельных поверхностных сил, так называемых *максвелловских натяжений*, по поверхности, охватывающей тело, к которому приложены силы. Такой поверхностью может являться, в частности, разделительная поверхность S_{12}, проведенная в воздушном зазоре между ротором и статором машины. На рис. 6.1 показана часть этой поверхности, охватывающая ротор в активной зоне машины. Статор машины на рисунке не показан.

Формула для расчета удельных поверхностных сил предложена Дж. К. Максвеллом в одной из его ранних работ «О физических силовых линиях»:

$$\overline{T}_M = \mu_0\left(H_n\overline{H} - 0{,}5\cdot\overline{n}H^2\right). \qquad (6.1)$$

Здесь индекс “*M*” означает “максвелловское” (натяжение), $\overline{H}$ и H_n - вектор напряженности магнитного поля на элементарной площадке поверхности и его нормальная составляющая, $\overline{n}$ - единичный вектор, направленный нормально к площадке.

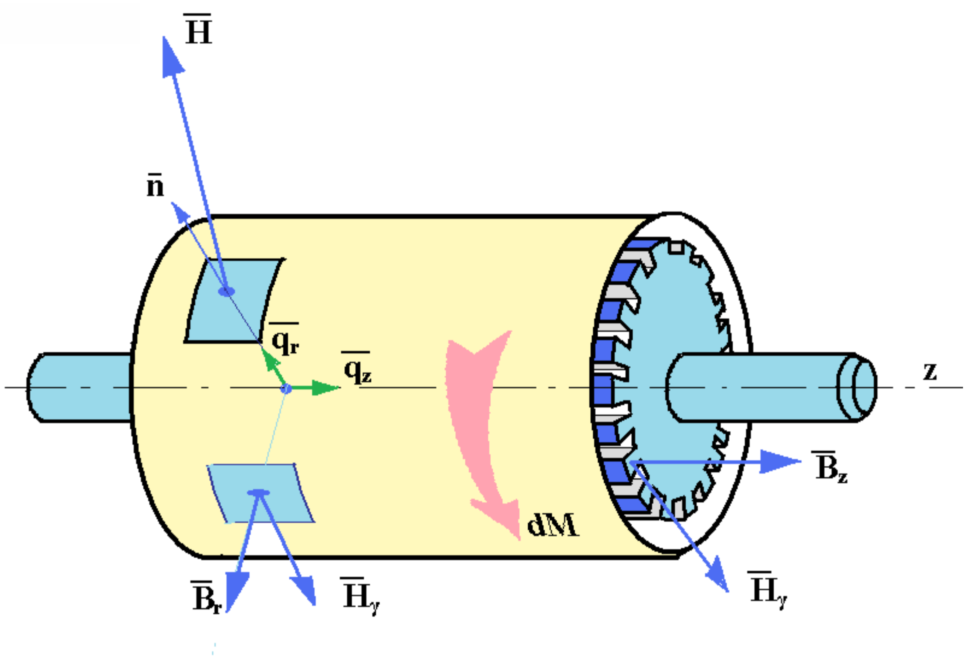

Рис. 6.1. К определению максвелловских натяжений в активной и в торцевой зонах вращающейся электрической машины

В частном случае, когда направление вектора напряженности поля совпадает с направлением нормали, удельная поверхностная сила пропорциональна квадрату индукции и также направлена по нормали:

$$\left|\overline{T}_M\right| = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2. \qquad (6.2)$$

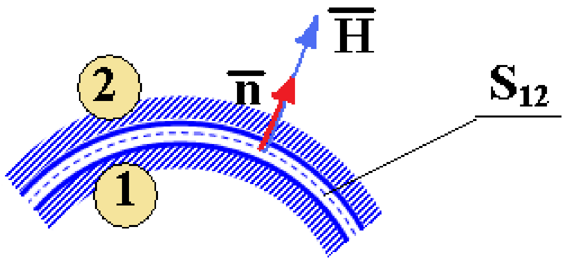

Рис. 6.2. Частный случай: $\overline{H} = \overline{n}H$ **,** $\overline{T}_M = \overline{n}T_M$

Как следует из выражения (6.1), вращающий момент, создающийся силой, приложенной к элементарной площадке, возникает только в том случае, если одновременно не равны нулю радиальная и тангенциальная составляющие напряженности поля на этой площадке. Для доказательства этого воспользуемся выражением для момента в цилиндрической системе координат:

$$M = M_z = \overline{q}_z \int_{S_{12}} \left[\overline{R}\,\overline{T}_M\right] ds, \qquad (6.3)$$

где $\overline{R}$ - радиус-вектор элементарной площадки.

Перепишем (6.3), выразив вектор максвелловского натяжения через его проекции на оси координат:

$$M = M_z = \overline{q}_z \int_{S_{12}} \left[\overline{R}\,\overline{q}_z\right] T_{M.z} ds + \overline{q}_z \int_{S_{12}} \left[\overline{R}\,\overline{q}_r\right] T_{M.r} ds + \overline{q}_z \int_{S_{12}} \left[\overline{R}\,\overline{q}_\gamma\right] T_{M.\gamma} ds =$$

$$= \int_{S_{12}} r T_{M.\gamma} ds, \qquad (6.4)$$

где r – радиус поверхности S_{12}.

В (6.4) учтено, что первый интеграл равен нулю, т.к. равно нулю скалярное произведение вектора $\overline{q}_z$ и ортогонального к нему вектора $\left[\overline{R}\,\overline{q}_z\right]$. Второй интеграл также равен нулю, поскольку равно нулю векторное произведение $\left[\overline{R}\,\overline{q}_r\right]$ (см. рис. 6.3).

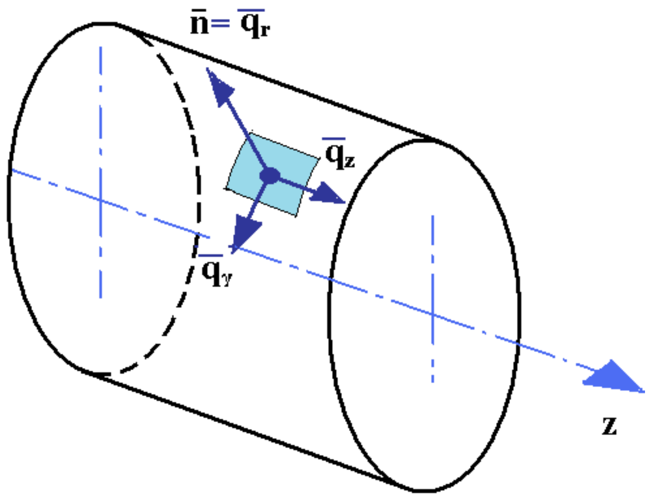

Рис. 6.3. К выводу уравнения (6.4).

Для цилиндрических участков поверхности S_{12} $\bar{q}_r = \bar{n}$ и

$$T_{M\gamma} = \bar{q}_\gamma \bar{T}_M = \mu_0 \left(H_n \bar{q}_\gamma \bar{H} - \frac{1}{2} \bar{n} \bar{q}_\gamma H^2 \right) = B_r H_\gamma . \qquad (6.5)$$

Вращающий момент, действующий на цилиндрическую часть разделительной поверхности S_{12}:

$$M_ц = \int_{S_ц} r \cdot T_{M\gamma} ds = r \int_{S_ц} B_r H_\gamma ds . \qquad (6.6)$$

На торцевой части ротора (тоже охваченной поверхностью S_{12}) $\bar{q}_z = \bar{n}$ и

$$T_{M\gamma} = \bar{q}_\gamma \bar{T}_M = \mu_0 \left(H_n \bar{q}_\gamma \bar{H} - \frac{1}{2} \bar{n} \bar{q}_\gamma H^2 \right) = B_z H_\gamma \qquad (6.7)$$

и вращающий момент, действующий на торцевую часть ротора, равен

$$M_m = \int_{S_m} r \cdot T_{M\gamma} ds = \int_{S_m} r B_z H_\gamma ds . \qquad (6.8)$$

В обычных электрических машинах, имеющих цилиндрические сердечники, вращающий момент создается главным образом силами, действующими на цилиндрическую часть поверхности S_{12}, однако в последнее время нашли довольно широкое распространение и машины торцевого типа с дисковыми роторами. Важным преимуществом таких машин является малая осевая длина, что позволяет, например, использовать их в так называемых *мотор-колесах*. В машинах такой конструкции основное усилие прикладывается к торцевым поверхностям роторов.

Основной вывод, который следует сделать из формулы Максвелла для натяжений, состоит в том, что если магнитное поле определено (рассчитано, смоделировано), то можно найти силу, действующую на *любой* объект, находящийся в области поля (не только на контуры с токами!) Для нахождения этой силы достаточно окружить объект замкнутой поверхностью и в соответствии с формулой Максвелла проинтегрировать составляющие поля на этой поверхности.

Поверхность интегрирования при этом целесообразно проводить так, чтобы вычисления по формуле Максвелла по возможности упрощались. Например, если на поверхности интегрирования поле направлено по нормали, то сила также оказывается направленной по нормали и формула для натяжений упрощается:

$$\overline{T}_M = \frac{1}{2}\mu H^2 \cdot \overline{n} = \frac{1}{2\mu} B^2 \cdot \overline{n}.$$

Анализируя (6.1), нетрудно получить выражения для нормальной и тангенциальной составляющих максвелловского натяжения:

$$\overline{T}_M = \overline{T}_{Mn} + \overline{T}_{M\tau}, \tag{6.9}$$

где

$$\overline{T}_{Mn} = T_{Mn}\overline{n} = \frac{B_n^2 - B_\tau^2}{2\mu\mu_0}\overline{n}, \tag{6.10}$$

$$\overline{T}_{M\tau} = T_{M\tau}\overline{\tau} = \frac{B_n B_\tau}{\mu\mu_0}\overline{\tau}. \tag{6.11}$$

Из (6.11) следует, что тангенциальная составляющая максвелловского натяжения возникает только в том случае, если одновременно не равны нулю и радиальная, и тангенциальная составляющие индукции. В то же время из (6.10) следует, что максвелловское натяжение будет чисто тангенциальным, если радиальная и тангенциальная составляющие индукции равны по величине, т.е. если вектор индукции направлен под углом 45° к нормали элементарной площадки. Легко показать, что при такой ориентации вектора индукции тангенциальное усилие, действующее на площадку, будет наибольшим. Обозначив через α угол между вектором индукции и нормалью, выразим нормальную и тангенциальные составляющие напряженности поля и, после подстановки в (6.5), продифференцируем полученное по α и найдем максимум $T_{M\gamma}$.

$$\bar{q}_\gamma \bar{H} = H \cdot \mathbf{cos}\,\alpha$$

$$B_r = \mu_0 H_r = \mu_0 H \cdot \mathbf{sin}\,\alpha$$

$$T_{M\gamma} = \bar{q}_\gamma \bar{T}_M = \underbrace{\mu_0 \mathbf{(} H_n}_{B_r} \underbrace{\bar{q}_\gamma \bar{H}}_{H_\gamma} - \frac{1}{2} \underbrace{\bar{n}\bar{q}_\gamma H^2 \mathbf{)}}_{0} = B_r H_\gamma =$$

$$= \mu_0 H^2 \mathbf{cos}\,\alpha \cdot \mathbf{sin}\,\alpha = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \cdot \mathbf{sin}(2\alpha) \qquad (6.12)$$

После дифференцирования получим:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(T_{M\gamma}\right) = \mu_0 H^2 \cdot \mathbf{cos}(2\alpha) = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$