

Раздел 9. Конформные преобразования

Комплексная потенциальная функция

Мы определили комплексную потенциальную функцию следующим образом: $w = \varphi + j\psi$. Покажем, что если $w(z)$ является аналитической, т.е. имеет однозначную производную $w'(z) = dw/dz$, то φ и ψ являются гармоническими функциями, т.е. каждая из них удовлетворяет уравнению Лапласа (то, что при этом эти функции должны удовлетворять условиям Коши-Римана, было показано раньше).

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = w'(z),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w'(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = w''(z).$$

Аналогично

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = jw'(z),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial w'(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = -w''(z).$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = w''(z) - w''(z) = 0. \quad (9.1)$$

С другой стороны:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

+

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + j \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + j \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0$$

Поскольку комплексное число равно нулю, если равны нулю его действительная и мнимая составляющие, обе функции, φ и ψ удовлетворяют уравнению Лапласа.

Можно доказать и обратную теорему: если φ и ψ удовлетворяют уравнению Лапласа, и условиям Коши-Римана, то $w = \varphi + j\psi$ является аналитической функцией, т.е. имеет однозначную производную $w'(z) = dw/dz$.

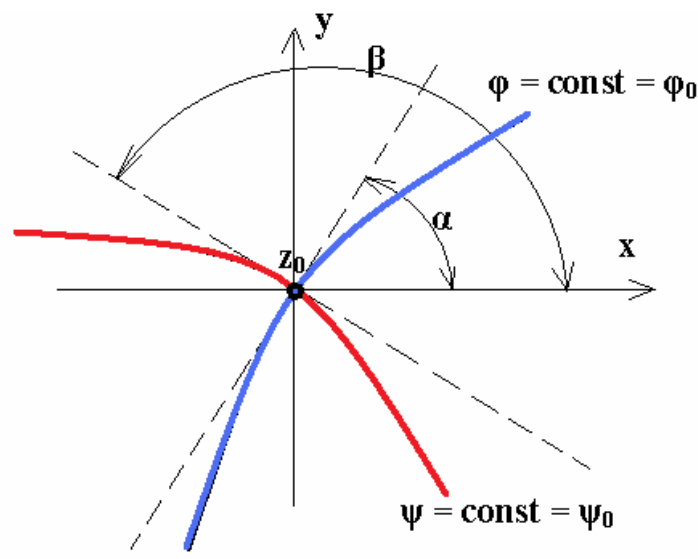


Рис. 9.1. К доказательству ортогональности эквипотенциалей и линий уровня функции потока

Мы уже говорили об ортогональности линий $\varphi = const$ и $\psi = const$ - показали ортогональность градиентов этих двух функций, т.е. нормалей к рассматриваемым линиям. Ввиду важности этого вопроса докажем ортогональность этих линий еще раз, но иным способом.

Рассмотрим две линии:

$\varphi = const = \varphi_0$ и $\psi = const = \psi_0$, пересекающиеся в точке z_0 .

Перемещение вдоль линии уровня функции потока означает, что выполняется условие $\Delta\varphi = 0$, откуда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \Delta x = 0$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}.$$

Найдем тангенс угла наклона касательной линии уровня функции потока к направлению оси x в точке пересечения с эквипотенциалью:

$$tg\alpha = \frac{dy}{dx}\bigg|_{\substack{z=z_0 \\ \varphi=\varphi_0}} = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}\bigg|_{(z=z_0)}$$

Перемещаясь вдоль эквипотенциали (линии уровня скалярного магнитного потенциала), получим аналогичное выражение для тангенса угла β , воспользовавшись при этом условиями Коши-Римана:

$$tg\beta = \frac{dy}{dx}\bigg|_{\substack{z=z_0 \\ \psi=\psi_0}} = -\frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)}\bigg|_{(z=z_0)} = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}\bigg|_{(z=z_0)}.$$

Произведение тангенсов двух углов равно минус единице. Это означает, что две касательные к линиям уровня функций φ и ψ в точке пересечения перпендикулярны:

$$tg\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -ctg(\alpha) = -\frac{1}{tg(\alpha)} \text{ и } tg(\alpha)tg\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

следовательно,

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \tag{9.3}$$

Еще одно свойство линий уровня функции потока и функции скалярного магнитного потенциала состоит в том, что, будучи проведены через равные интервалы, они образуют сетку криволинейных квадратов.

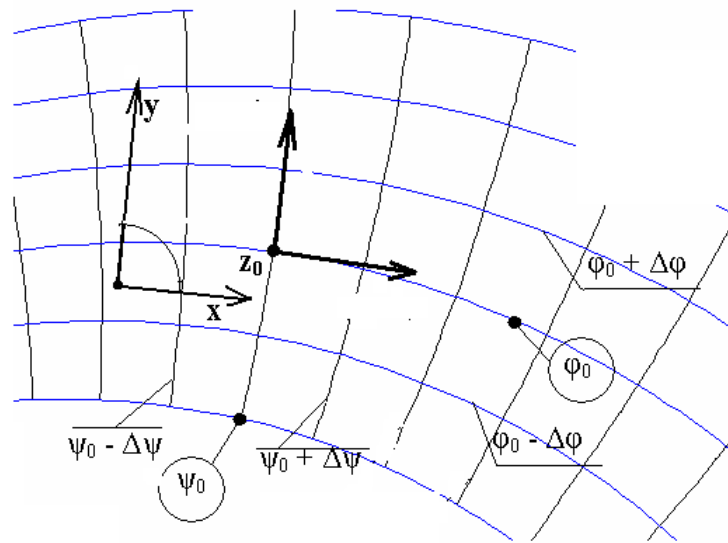


Рис. 9.2. Семейства эквипотенциалей и силовых линий образуют множество криволинейных квадратов

Для доказательства разместим систему координат так, чтобы начало ее находилось в точке z_0 , а оси координат совпадали с касательными к линиям уровня ϕ и ψ .

Приращение функции ϕ :

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y$$

Будем двигаться от точки z_0 так, чтобы приращение Δx не вызывало изменения функции ϕ , т.е. вдоль линии $\phi = \phi_0$: $(\partial\phi/\partial x)\Delta x = 0$.

Тогда $\Delta\phi = (\partial\phi/\partial y)\Delta y$.

Аналогично для перемещения по эквипотенциали $\psi = \psi_0$ вдоль оси y :

$$\Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial\psi}{\partial x}\Delta x.$$

По условиям Коши-Римана

$$\left| \frac{\partial\psi}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial\phi}{\partial y} \right| \text{ и, следовательно, } |\Delta x| = |\Delta y| \quad (9.4)$$

Важный вывод: полевую задачу, состоящую в отыскании функций φ и ψ , можно решать графически, строя картину поля. Обычно это делают с помощью карандаша и резинки, постепенно корректируя положение линий уровня функции потока (силовых линий поля) и эквипотенциалей и следя за тем, чтобы, пересекаясь, они образовывали криволинейные квадраты.

Еще раз о выражении напряженности поля через комплексную потенциалную функцию.

$$w^* = \varphi - j\psi ;$$

При $dz = dx$ и $\arg(dz) = 0$

$$w'^* = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - j \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - j \frac{\partial \psi}{\partial x} = j \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} - j \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = j(H_x + jH_y) = jH ,$$

откуда

$$H = -j w'^*(z)$$

Аналогичные рассуждения дают другую полезную формулу:

$$w = \varphi + j\psi$$

При $dz = dx$ и $\arg(dz) = 0$

$$w' = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \psi}{\partial x} = -j \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} + j \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = -j(H_x - jH_y) = -jH^*$$

$$H = j w'(z) \quad (9.5)$$

Часто в результате конформных преобразований трудно бывает найти саму функцию w , в то время как ее производная становится известной раньше. В этом случае мы можем найти напряженность поля, не находя самой функции $w(z)$:

$$\left. \begin{aligned} |H| &= |w'| = \left| \frac{dw}{dz} \right| \\ \arg(H) &= -\arg\left(w' \right) = -\arg\left(j \frac{dw}{dz} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.5,a)$$

Два примера комплексной потенциальной функции (для уже рассмотренных ранее задач)

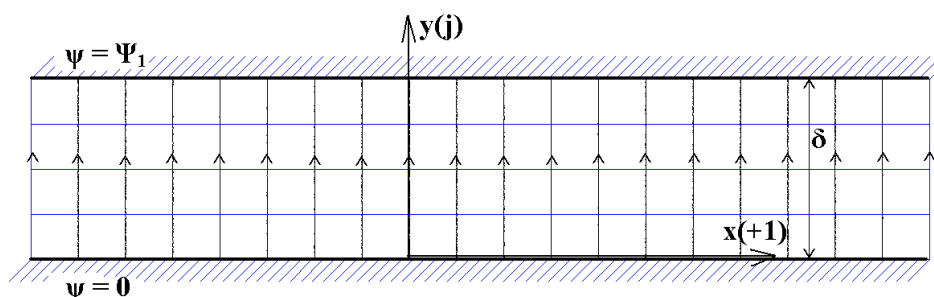


Рис. 9.3. Картина поля в равномерном зазоре. В этом случае $\Psi_1 < 0$

1) Равномерное поле (декартова система координат):

$$\varphi = kx, \quad \psi = ky, \quad k = \frac{\Psi_1}{\delta} \quad \Rightarrow \quad w = kx + jky = kz$$

2) Поле линейного тока (полярная система координат):

$$\psi = k\theta, \quad \varphi = k \cdot \ln r, \quad k = \frac{i}{2\pi}, \quad w = k \cdot \ln z + jk\theta = k \cdot \ln z,$$

где $z = r \cdot e^{j\theta}$

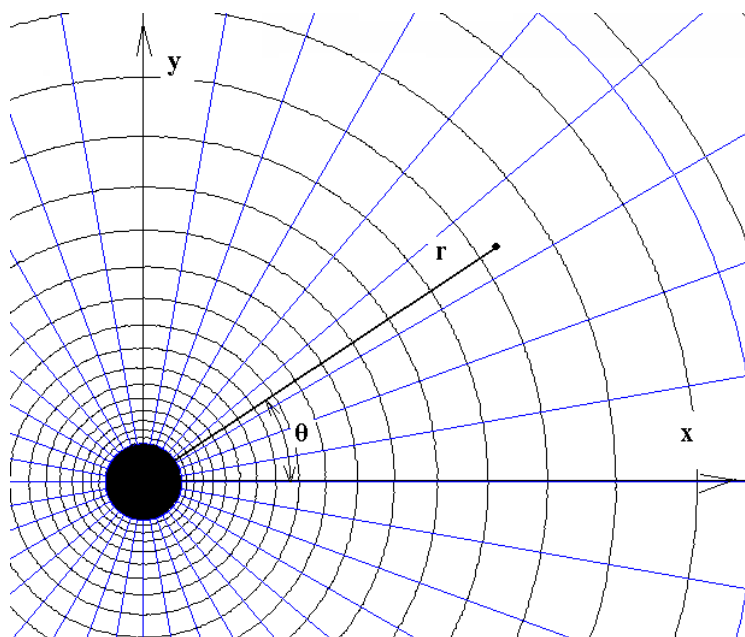


Рис. 9.4 . Картина поля линейного тока

Частный случай: поле тока, расположенного в вершине «ферромагнитного угла».

I – «полный» ток (соответствующий углу θ , равному 2π : $I = j \cdot \pi r^2$)

$$I_1 = \frac{I}{2\pi} \cdot \theta_1, \quad \Psi_1 = \frac{I}{2\pi} \cdot \theta_1 = I_1$$

$$\psi = \frac{I}{2\pi} \cdot \theta = \frac{I_1 \cdot 2\pi}{\theta_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \theta = \frac{\Psi_1}{\theta_1} \cdot \theta$$

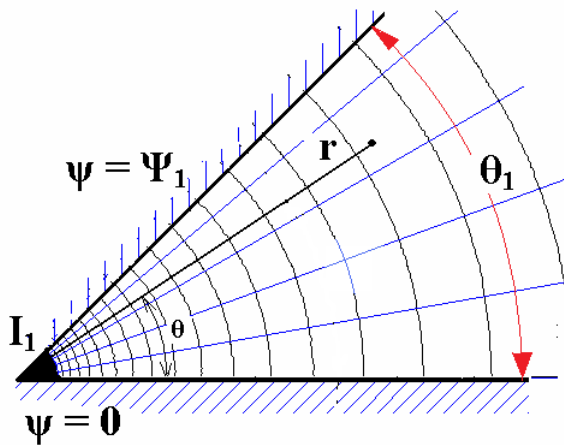


Рис. 9.5. Поле ферромагнитного угла, образованного двумя плоскими сердечниками с бесконечной магнитной проницаемостью

При токе I_1 на поверхности сердечника: $\vartheta_1 = \pi$, $\psi = \frac{I_1}{\pi} \cdot \theta$

$$w = \frac{I}{\theta_i} \ln z \quad \text{при } \theta_i = \pi \quad w = \frac{I}{2\pi} \cdot \ln z$$

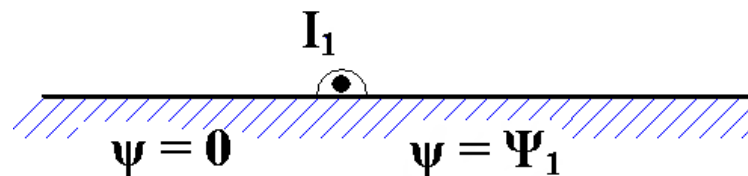


Рис. 9.6. Распределение скалярного магнитного потенциала по поверхности плоского сердечника при размещении на нем положительного линейного тока. Направление обхода области – по поверхности сердечника слева направо

Конформное преобразование

В простых случаях функцию w найти несложно (два таких примера мы только что рассмотрели). Сложность задачи определяется сложностью границ области.

Суть метода состоит в том, чтобы воспользоваться известным решением простой задачи для решения сложной. При этом надо найти такую функцию *преобразования координат*, которая преобразует область простой задачи в область решаемой сложной задачи.

Пример конформного преобразования области:

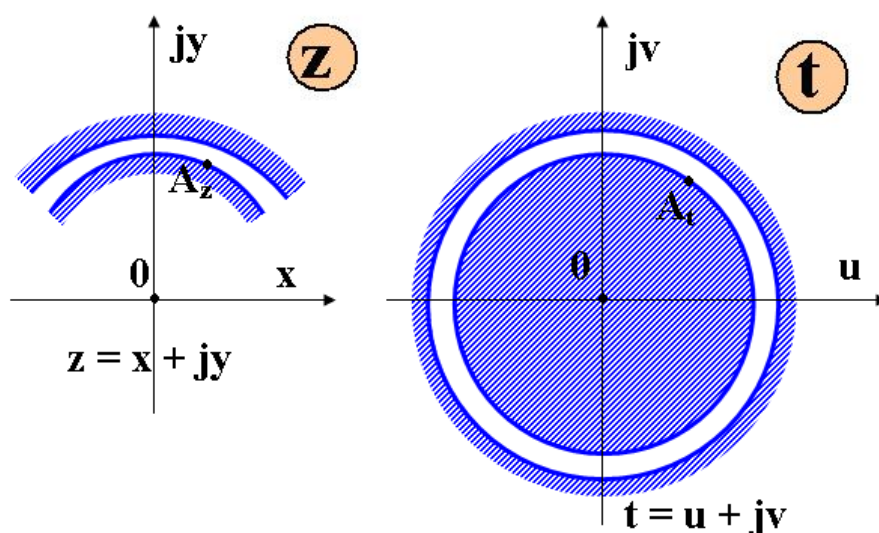


Рис. 9.7. Преобразование части зазора, образованного двумя цилиндрическими сердечниками при наличии эксцентриситета, в равномерный кольцевой зазор

Свойства конформного преобразования

Пусть нам известны функции преобразования координат: $z = f(t)$ и $t = F(z)$. Одно из этих преобразований обычно называется прямым, а другое – обратным.

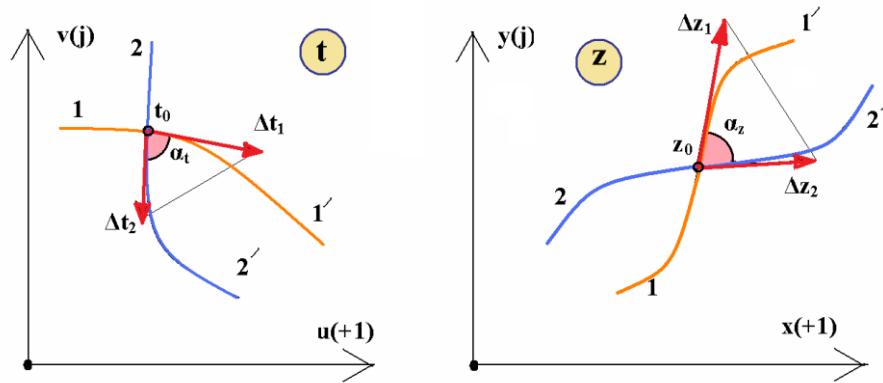


Рис. 9.8. Сохранение формы малых фигур при конформном преобразовании

Углы и формы малых фигур при конформном преобразовании сохраняются. Докажем это утверждение.

Рассмотрим производную

$$z' = f'(t) = df(t) / dt$$

$$z'_{(z=z_0)} = df(t) / dt = c_0 e^{j\beta_0}$$

(однозначность производной есть свойство *аналитической* функции, а следует заметить, что конформное преобразование осуществляется *аналитическими* функциями).

$$\Delta z_{(z=z_0)} = z' \Delta t = (c_0 e^{j\beta_0}) \Delta t$$

$$|\Delta z|_{(z=z_0)} = c_0 |\Delta t| = |z'| |\Delta t| \quad (9.6)$$

- приращение Δz в c_0 раз больше, чем приращение Δt (рассматривается приращение по любому направлению). По аргументу Δz и Δt отличаются на β_0 - аргумент производной z' в точке z_0 :

$$\arg(\Delta z) = \arg(\Delta t) + \arg(z')$$

Теперь обратимся к рисунку:

$$\alpha_t = \arg(\Delta t_1) - \arg(\Delta t_2) = \arg(e^{j\varphi_{\Delta t_1}}) - \arg(e^{j\varphi_{\Delta t_2}}) = \arg\left(\frac{e^{j\varphi_{\Delta t_1}}}{e^{j\varphi_{\Delta t_2}}}\right) = \arg\left(\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}\right)$$

Аналогично

$$\alpha_z = \arg\left(\frac{\Delta z_1}{\Delta z_2}\right) = \arg\left(\frac{z'_{(z=z_0)} \Delta t_1}{z'_{(z=z_0)} \Delta t_2}\right) = \arg\left(\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}\right) = \alpha_t \quad (9.7)$$

Итак:

$$\frac{|\Delta z_1|}{|\Delta z_2|} = \frac{c_0 |\Delta t_1|}{c_0 |\Delta t_2|}, \quad \alpha_t = \alpha_z \quad (9.8)$$

Вывод: треугольники, образованные малыми приращениями, при конформном преобразовании остаются подобными (впрочем, не только треугольники).

Формы малых фигур при конформном преобразовании сохраняются

Пример конформного преобразования.

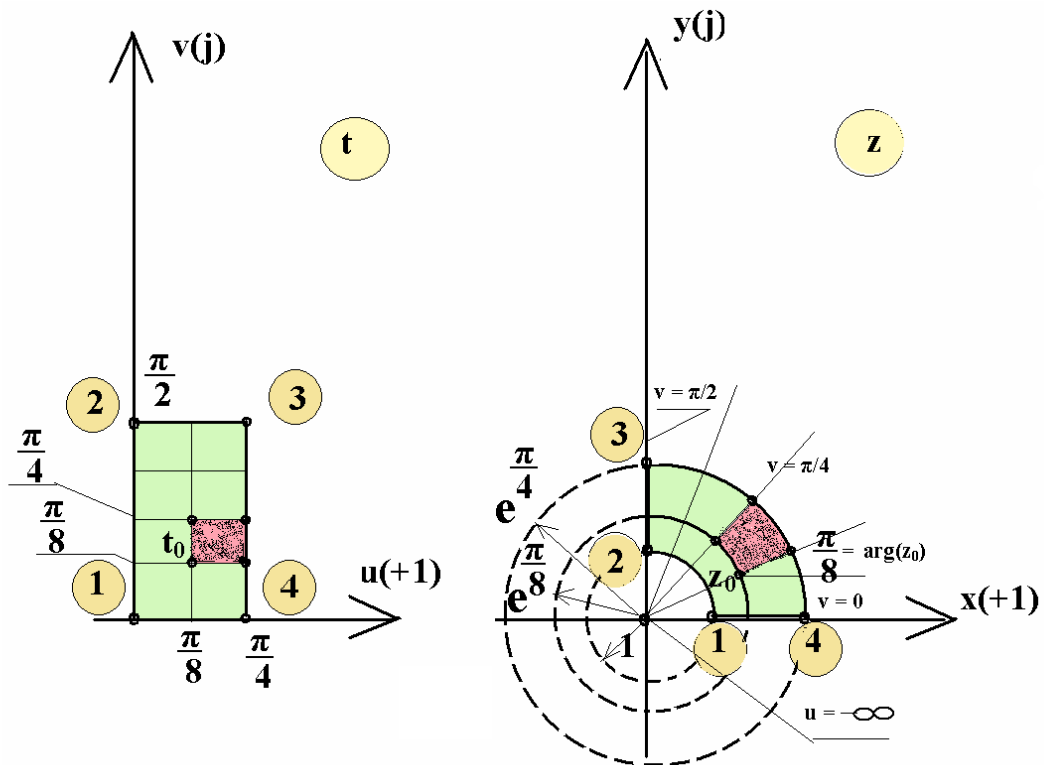


Рис. 9.9 Преобразование прямоугольной области в отрезок кольца с помощью логарифмического конформного преобразования

С помощью логарифмического преобразования

$$z = e^t = f(t)$$

$$(t = \ln z = F(z))$$

прямоугольная область, заданная в плоскости t , преобразуется в отрезок кольца в плоскости z .

Рассмотрим линии, проходящие через точку t_0 :

$$u = u_0 = \text{const}$$

$$v = v_0 = \text{const}$$

Координаты точки в плоскости z определяются функцией преобразования:

$$z = e^t = e^u e^{jv} = e^u (\cos(v) + j \sin(v)) = x + jy,$$

откуда

$$x = e^u \cos(v); \quad y = e^u \sin(v)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = e^u, \quad \frac{y}{x} = \text{tg}(v) \quad (9.9)$$

Таким образом, в плоскости z линии $u = \text{const}$ являются окружностями, а линии $v = \text{const}$ – радиальными лучами (см. рисунок).

Найдем модуль и аргумент производной функции преобразования координат.

$$z' = \frac{de^t}{dt} = e^t$$

При $z = z_0$

$$\arg(z') = \arg(e^u (\cos(v) + j \sin(v))) = v = \frac{\pi}{8} \quad (9.10)$$

Вариант примера того же конформного преобразования

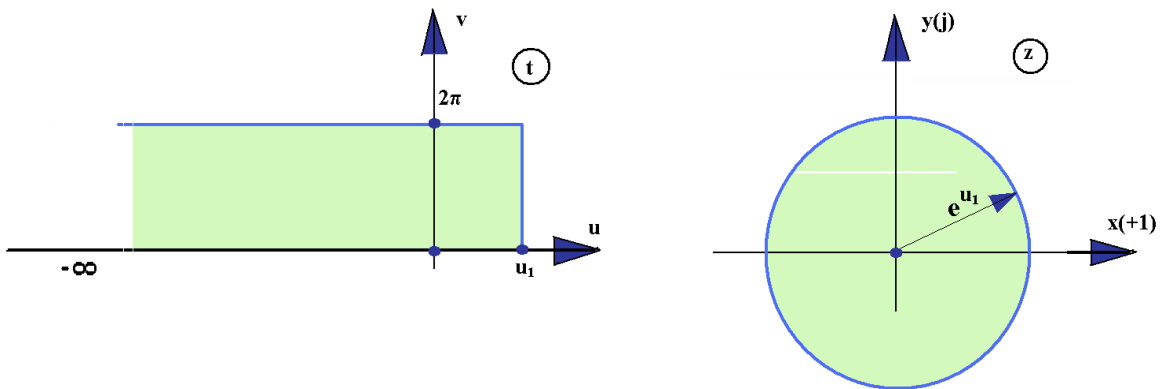


Рис. 9.10. Преобразование круга в прямоугольную полосу с помощью логарифмического конформного преобразования

Преобразуется круг с центром в начале координат плоскости z в полосу в плоскости t . Радиус круга R определяет координату u_1 , ширина полосы вдоль мнимой оси v в плоскости t равна 2π , т.к. преобразуется именно круг, а не сектор. Окружность с радиусом $r = e^0 = 1$ в плоскости z соответствует началу координат плоскости t (т.е. точке с координатами $0,0$). Внутренняя область, ограниченная окружностью с радиусом $r = e^0 = 1$, в плоскости t соответствует части полосы, расположенной слева от мнимой оси (во втором квадранте). Центр круга – начало координат плоскости z – отображается в часть полосы, расположенную в минус бесконечности.

Можно также сказать, что обратное преобразование отображает полосу описанной формы в плоскости t в круг в плоскости z .

Итак, пусть в плоскости t имеется область (желательно простая), для которой известны граничные условия и решение полевой задачи. Пусть известна также функция преобразования координат, преобразующая известную простую область в область, для которой мы хотим найти распределение поля. Задача состоит в том, чтобы отыскать комплексную потенциальную функцию во второй области.

Это не всегда возможно.

Основное условие разрешимости задачи: необходимо, чтобы границы области в обеих плоскостях являлись либо линиями равного потенциала, либо линиями уровня функции потока. Если эти условия выполнены, и, кроме того, на соответствующих участках границ сохранены граничные условия, то решением задачи во второй (преобразованной) области будет та же самая комплексная потенциальная функция, что и в первой (исходной) области.

$$w(t) = \varphi(u, v) + j\psi(u, v) \text{ - в исходной области}$$

$$w_z(z) = \varphi_z(x, y) + j\psi_z(x, y) \text{ - в преобразованной области}$$

$$z = f(t), \quad t = F(z).$$

Функции $\varphi_z(x, y)$ и $\psi_z(x, y)$ могут быть получены из функций $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ с помощью функции преобразования координат $t = F(z)$

Покажем это на конкретном, только что рассмотренном примере.

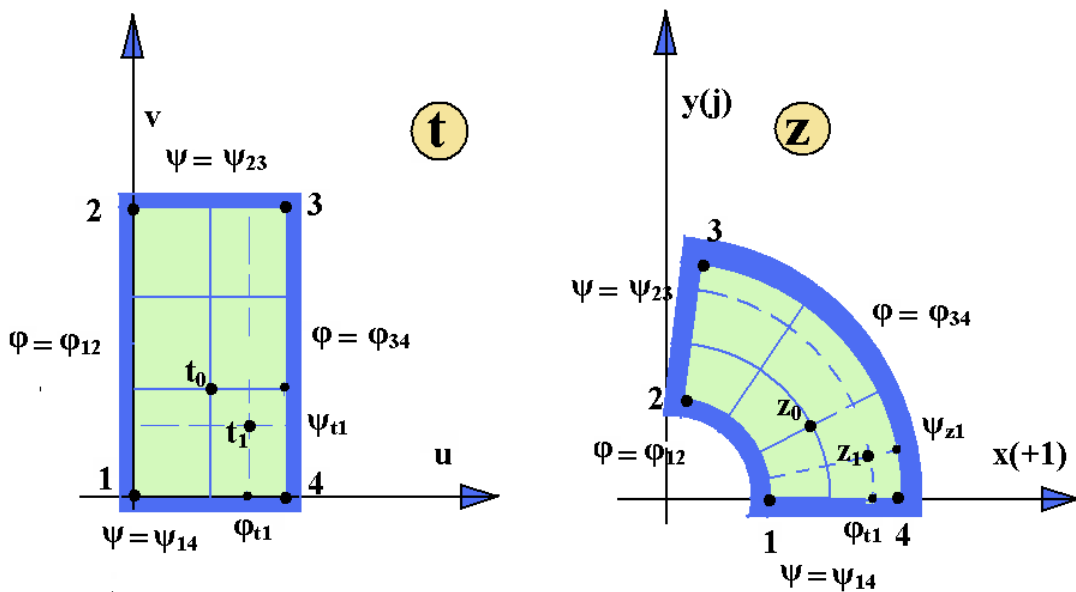


Рис. 9.11. Преобразование области задачи и соответствие граничных условий при конформном преобразовании

В данном случае исходной (простой) областью является полоса в плоскости t . На участках границы 1-2 и 3-4 заданы значения функции потока, на участках границы 2-3 и 4-1 заданы значения скалярного магнитного потенциала. Будем считать, что решение полевой задачи при этих гранич-

ных условиях нам известно, т.е. найдено выражение комплексной потенциальной функции.

Для всех сходственных точек сохраняются значения потенциала и функции потока. В этом можно убедиться, рассмотрев преобразование линий $\varphi = const$ и $\psi = const$, имеющих точку на границе.

$$\varphi(u, v) = \varphi_z(x, y)$$

$$\psi(u, v) = \psi_z(x, y)$$

Новая потенциальная функция $w_z(z)$, определенная с помощью функции преобразования координат:

$$w(t) = \varphi(u, v) + j\psi(u, v) = w[F(z)] = w_z(z) = \varphi_z(x, y) + j\psi_z(x, y) \quad (9.11)$$

является искомым решением. При этом:

$$\varphi = \varphi_0 = \varphi_{z_0} = const \quad \text{линии поля преобразуются в линии}$$

$$\psi = \psi_0 = \psi_{z_0} = const \quad \text{поля, причем с удовлетворением}$$

$$\varphi = \varphi_{34} = \varphi_{z_{34}} = const \quad \text{граничных условий.}$$

Необходимо проверить, является ли функция $w_z(z)$ аналитической. Это доказывается тем, что:

- во-первых, она получена с помощью двух аналитических функций (см. (9.11)): $w_z(z) = w[F(z)]$,

- во вторых, ее производная

$$\frac{dw_z(z)}{dz} = \frac{dw(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dz}$$

является однозначной, поскольку однозначны обе производные, входящие в качестве сомножителей в правую часть.

Из аналитичности функции $w_z(z)$ следует, что φ_z и ψ_z удовлетворяют уравнению Лапласа и условиям Коши-Римана. Кроме того, поскольку функции φ_z и ψ_z на границе удовлетворяют граничным условиям, $w_z(z)$ также удовлетворяет граничным условиям, следовательно, эта функция является решением полевой задачи.

Следствия.

- 1) Потенциалы в сходственных точках сохраняются, следовательно, сохраняются и поверхностные токи;
- 2) Потоки через сходственные участки поверхностей также сохраняются.

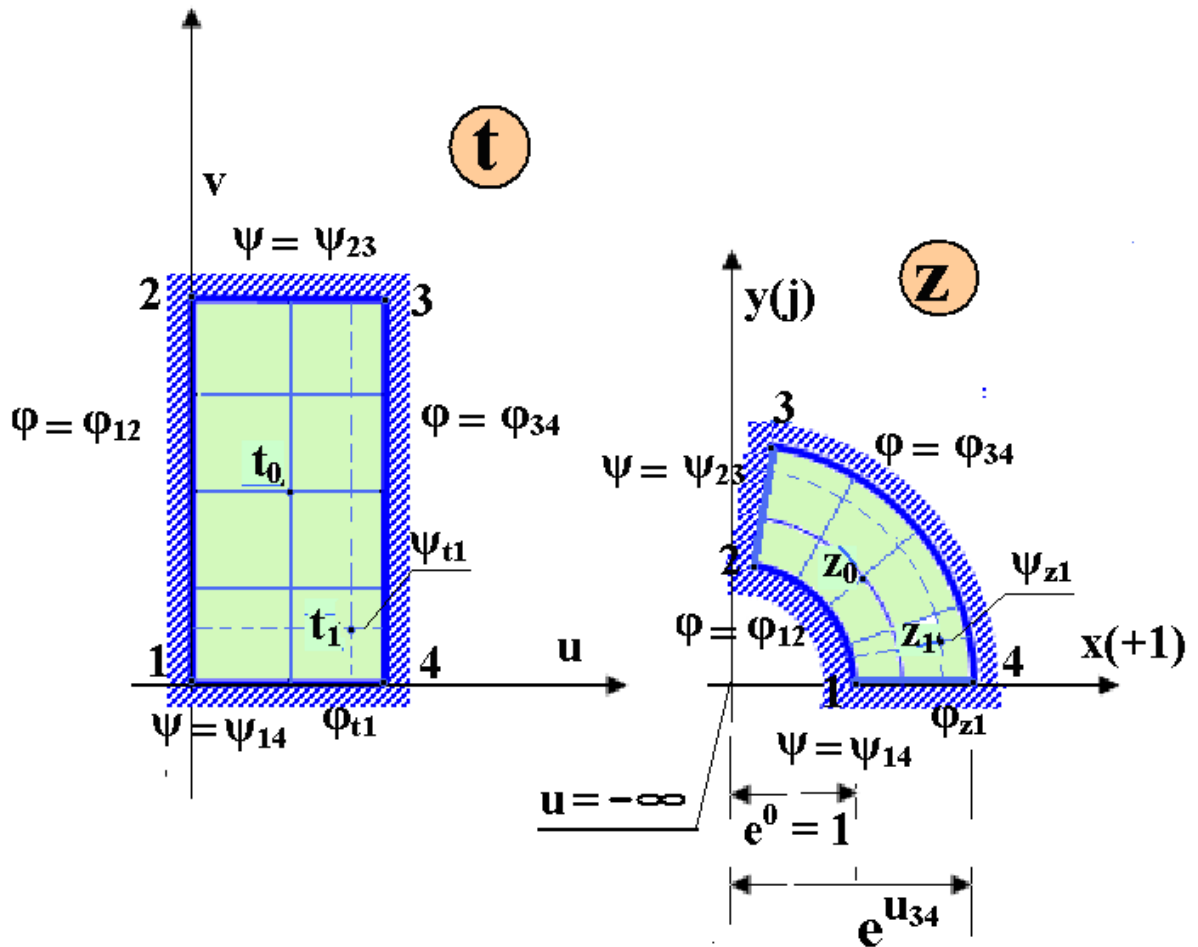


Рис. 9.12. Преобразование отрезка кольцевого зазора, образованного двумя цилиндрическими сердечниками в прямоугольную область. Радиус внутреннего сердечника равен единице

В зависимости от вида функции преобразования могут быть получены различные формы областей после преобразования одной и той же простой области (см. справочник по конформным преобразованиям).

Домашнее задание. Задавшись на исходной плоскости t (см. рисунок) значениями координат u_{34} и v_{34} , выполнить преобразование области 1-2-3-4 на плоскость z .

Пример преобразования комплексной потенциальной функции

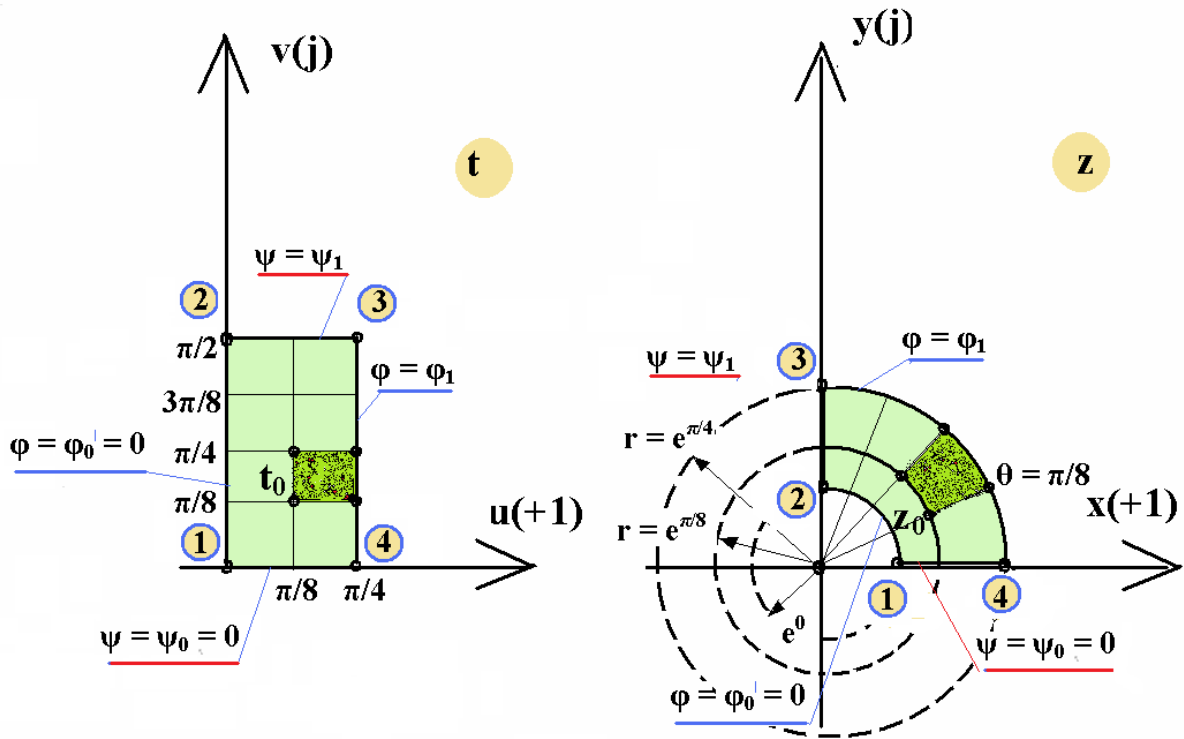


Рис. 9.13. Преобразование прямоугольной области задачи с известным решением в часть кольца с помощью логарифмической функции

В исходной плоскости область задачи представляет собой прямоугольник, стороны которого являются линиями уровня функции потока ϕ и скалярного магнитного потенциала ψ . Как уже было показано ранее, поле в этом случае является равномерным:

Осуществим конформное преобразование с помощью логарифмической функции:

$$z = e^t = f(t); \quad t = \ln(z) = F(z)$$

Комплексная потенциальная функция в исходной области:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t &= \frac{\Phi_1}{\pi/4} \cdot u = \frac{4}{\pi} \Phi_1 \cdot u \\ \psi_t &= \frac{\Psi_1}{\pi/2} \cdot v = \frac{2}{\pi} \Psi_1 \cdot v \end{aligned} \right\} w(t) = \varphi(t) + j\psi(t)$$

Воспользовавшись одним из условий Коши-Римана, найдем значение функции потока на границе:

$$\frac{\partial \psi_t}{\partial v} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial u},$$

откуда

$$\frac{2}{\pi} \Psi_1 = \frac{4}{\pi} \Phi_1 \quad \text{и} \quad \Phi_1 = \frac{\Psi_1}{2}.$$

Выражение комплексной потенциальной функции через исходные данные задачи:

$$w_t(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\Psi_1}{2} \cdot u + j \frac{2}{\pi} \cdot \Psi_1 \cdot v = \frac{2}{\pi} \cdot \Psi_1 (u + jv) = \frac{2}{\pi} \cdot \Psi_1 \cdot t.$$

Комплексную потенциальную функцию в преобразованной области $w_z(z)$ образуем с помощью функции преобразования координат как $w_t(F(z))$, после чего проверим, совпадают ли значения комплексной потенциальной функции в сходственных точках:

$$\begin{aligned} F(z) &= \ln(z) = \ln(r \cdot e^{j\theta}) = \ln(r) + j\theta \\ w_t(t) &= \frac{2}{\pi} \Psi_1 \cdot t = \frac{2}{\pi} \Psi_1 (\ln(r) + j\theta) = \\ &= \frac{2}{\pi} \Psi_1 \cdot \ln(r) + j \frac{2}{\pi} \Psi_1 \cdot \theta = \frac{2}{\pi} \Psi_1 \cdot \ln(z) = w_z(z) \end{aligned}$$

Результаты проверки совпадения значений комплексной потенциальной функции в сходственных точках сведены в таблицу:

Т.1	$w_t(0) = \frac{2}{\pi} \Psi_1(0 + j0) = 0$	$w_z(1 \cdot e^{j0}) = 0$
Т.4	$w_t\left(\frac{\pi}{4} + j0\right) = \frac{2}{\pi} \Psi_1\left(\frac{\pi}{4} + j0\right) = \frac{\Psi_1}{2} = \varphi_1$	$w_z\left(e^{\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j0}\right) = \frac{2}{\pi} \Psi_1\left(\frac{\pi}{4} + j0\right) = \frac{\Psi_1}{2} = \varphi_1$
Т.т0	$w_t\left(\frac{\pi}{8} + j\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2}{\pi} \Psi_1\left(\frac{\pi}{8} + j\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\Psi_1}{4} + j\frac{\Psi_1}{4}$	$w_z\left(e^{\frac{\pi}{8}} \cdot e^{j\frac{\pi}{8}}\right) = \frac{2}{\pi} \Psi_1\left(\frac{\pi}{8} + j\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\Psi_1}{4} + j\frac{\Psi_1}{4}$

Рассмотрим теперь еще один пример этого конформного преобразования:

Определение поля в кольцевом зазоре (с учетом его кривизны) при гармоническом возбуждении одного из сердечников

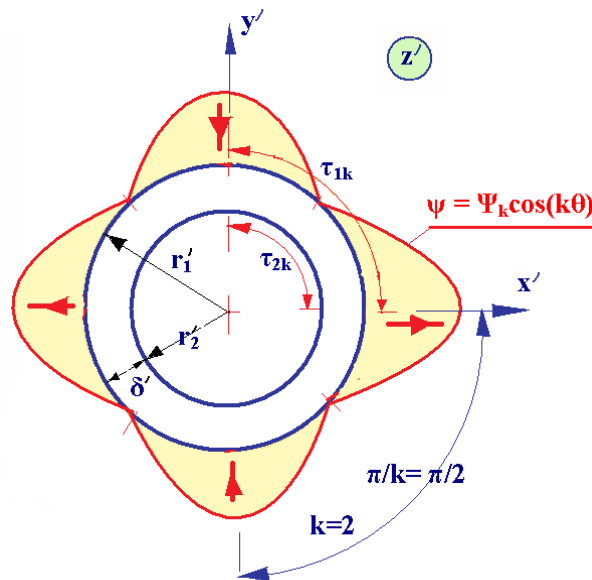


Рис. 9.14. Кольцевой зазор в исходной плоскости z'

z' – исходная область

$$z' = x' + jy' \quad (9.13)$$

Применим вначале простое линейное преобразование, сохраняющее геометрическое подобие:

$$z = \frac{z'}{r_2} = x + jy$$

В качестве базового размера здесь выбран радиус *невозбужденного* сердечника. Тогда в области z размеры оказываются выраженными в относительных единицах:

$$r_1 = \frac{r_1'}{r_2} \quad \delta = \frac{\delta'}{r_2}, \text{ причем } r_2 = \frac{r_2'}{r_2} = 1, \text{ что окажется удобным.}$$

Напомним, что r_1 – всегда радиус возбужденного сердечника, который может быть как внешним (в рассматриваемом примере), так и внутренним.

Применим теперь логарифмическое конформное преобразование и повторим рисунок.

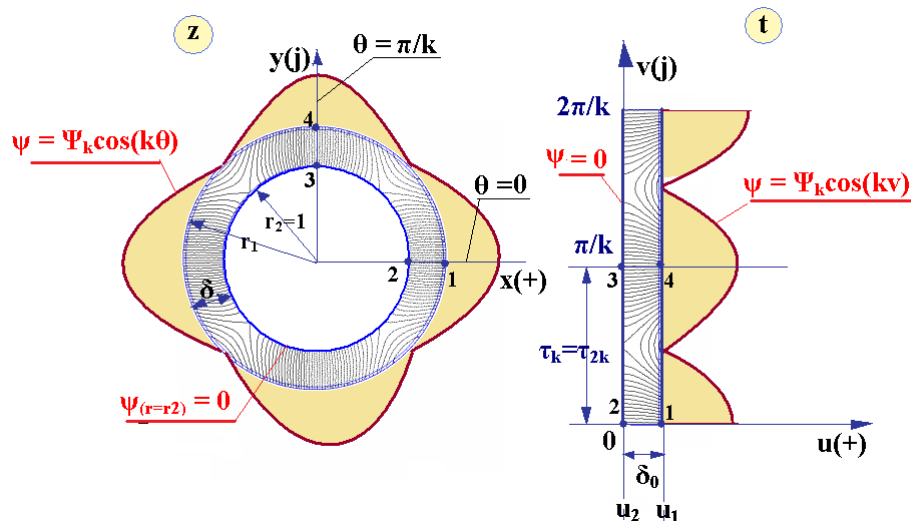


Рис. 9.15. Логарифмическое конформное преобразование

Если в исходной плоскости z мы пользуемся полярной системой координат, а в преобразованной плоскости t – декартовой, то действительные и мнимые составляющие переменных z и t связаны следующим образом:

$$t = \ln(z) = u + jv = \ln(r) + j\theta,$$

откуда

$$u = \ln(r) \text{ и } v = \theta.$$

Следовательно

$$u_1 = \ln(r_1) = \ln(1 + \delta) \text{ и } u_2 = \ln(r_2) = \ln(1) = 0.$$

Докажем, что полюсное деление в преобразованной области равно полюсному делению в исходной области: $\tau_k = \tau_{2k}$.

$$\text{В плоскости } z: \tau_{2k} = \frac{\pi r_2}{k} = \frac{\pi \cdot 1}{k} = \frac{\pi}{k}$$

$$\text{В плоскости } t: v_\tau = \theta_\tau = \frac{\pi}{k} = \theta_3 - \theta_2 = \frac{\pi}{k} - 0 = \frac{\pi}{k} = \tau_k$$

Таким образом, при этом конформном преобразовании сохраняется полюсное деление невозбужденного сердечника.

Посмотрим, как изменяется воздушный зазор.

В плоскости t :

$$\begin{aligned} \delta_0 = \ln(r_1) &= u_1 - u_2 = \ln(r_1) - \ln(1) = \ln(r_1) = \ln(r_2 + \delta) = \ln(1 + \delta) = \\ &= \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} + \dots \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\delta_0}{\delta} = 1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{3} - \frac{\delta^3}{4} + \dots \quad (9.15)$$

Соотношение между зазорами δ_0 и δ зависит от относительной величины зазора:

$\frac{\delta'}{r_2'} = \frac{\delta}{r_2} = \delta$	0,01	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0
δ_0	0,0099	0,095	0,182	0,405	0,69	1,09
$\frac{\delta_0}{\delta}$	0,995	0,95	0,91	0,81	0,69	0,55

В том случае, если возбужден внутренний сердечник, $r_2 > r_1$

При этом $\delta_0 = \ln(r_2 - \delta) = \ln(1 - \delta) < 0$ (зазор в плоскости t считаем величиной алгебраической, т.е. способной принимать отрицательные значения).

Важный частный случай: $|\delta| \ll 1$ – члены ряда, начиная со второго, можно отбросить, тогда $\delta_0 = \delta$. Таким образом, малый зазор (малый по сравнению с радиусом кривизны) при конформном преобразовании сохраняется. Заметим, что полюсное деление при конформном преобразовании сохраняется всегда.

Составим таблицу:

$\delta = \left \delta' / r_2' \right $		0	0,05	0,1	0,2	0,5	0,7	0,9
$\left \frac{\delta_0}{\delta} \right $	$r_1 > r_2$	1	0,976	0,953	0,912	0,811	0,758	0,713
	$r_1 < r_2$	1	1,026	1,054	1,116	1,390	1,720	2,590

Примеры абсолютных и относительных значений зазора между сердечниками во вращающихся электрических машинах:

– асинхронные машины: $\delta' = 1$ мм; $r_2' = 250$ мм; $\delta = 1/250 = 0,004$

– гидрогенераторы : $\delta' = 20$ мм; $r_2' = 5000$ мм; $\delta = 2/5000 = 0,004$

– турбогенераторы : $\delta' = 100$ мм; $r_2' = 600$ мм; $\delta = 100/600 = 0,167$

Можно воспользоваться этими расчетами и перейти от *кольцевого* зазора к *скорректированному в соответствии с таблицей* плоскому зазору, рассчитать для него потоки и потенциалы на интересующих нас участках и перенести результаты в исходную область.

Домашнее задание. С помощью программы *FEMM* смоделировать такую задачу. Воспользовавшись гармоническим анализом, оценить погрешность, возникающую при замене кольцевого зазора плоским, для различных гармоник.

Решение полевой задачи в преобразованной области

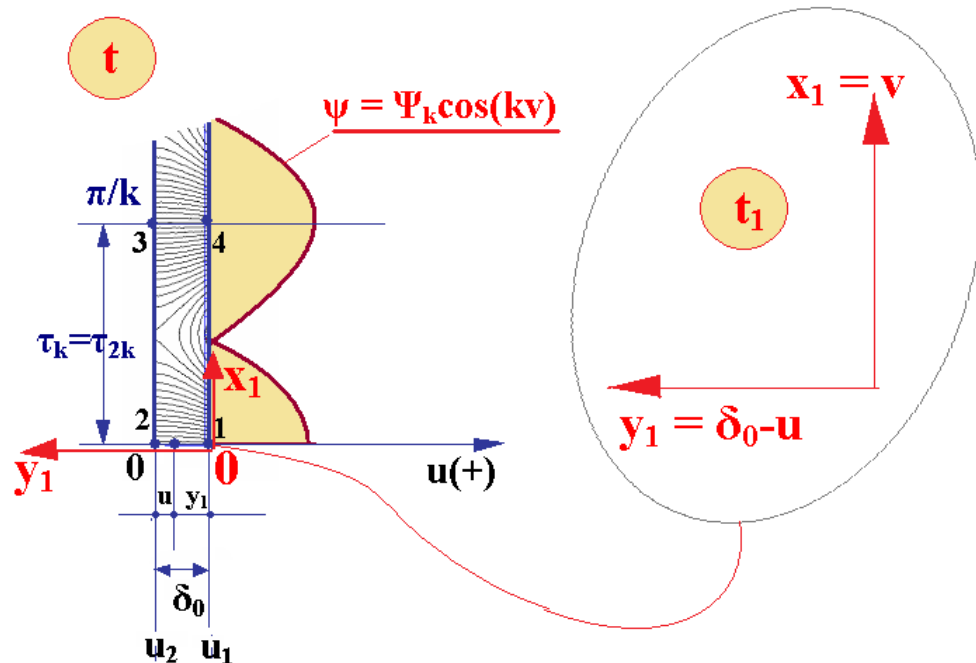


Рис. 9.16. Приведение задачи в преобразованной области к задаче, решенной ранее

В комплексной плоскости t вводим новую систему координат: $t_1 = x_1 + y_1$. Заметим, что в этой системе координат решение полевой задачи нами получено ранее методом разделения переменных (задача о поле в плоском зазоре при гармоническом возбуждении одного из сердечников).

Преобразованные координаты:

$$\begin{aligned} x_1 &= v \\ u + y_1 &= \delta_0 \rightarrow y_1 = \delta_0 - u \end{aligned}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_0 \quad (u = 0): \quad \psi = 0 \\ y_1 &= 0 \quad (u = \delta_0): \quad \psi = \Psi_k \cos(k\theta) = \Psi_k \cos(\alpha_k x_k) \end{aligned}$$

Решение для полосы в плоскости $x_1 y_1$:

для скалярного магнитного потенциала (было получено методом разделения переменных):

$$\Psi = \Psi_k \frac{sh(\alpha_k(\delta_0 - y_1))}{sh(\alpha_k \delta_0)} \mathbf{cos}(\alpha_k x_1)$$

Для функции потока (может быть получено из выражения для потенциала, по которому предварительно следует найти распределение напряженности поля (см. параграф о восстановлении функций потенциала и потока по известному распределению величин поля)):

$$\varphi = -\Psi_k \frac{ch(\alpha_k(\delta_0 - y_1))}{sh(\alpha_k \delta_0)} \mathbf{sin}(\alpha_k x_1),$$

где $\delta_0 - y_1 = u$ $y_1 = \delta_0 - u$ $x_1 = v$ $\alpha_k = \pi / \tau_k = \pi / (\pi / k) = k$.

Тогда для плоскости t это решение имеет вид:

$$\begin{aligned} \Psi_t &= \Psi_k \frac{sh(ku)}{sh(k\delta_0)} \mathbf{cos}(kv) \\ \varphi_t &= \Psi_k \frac{ch(ku)}{sh(k\delta_0)} \mathbf{sin}(kv) \end{aligned} \quad 9.16$$

Найдем комплексную потенциальную функцию в плоскости t .

$$\begin{aligned} w_t &= \varphi_t + j\Psi_t = \varphi_t = \Psi_k \frac{ch(ku)}{sh(k\delta_0)} \mathbf{sin}(kv) + j\Psi_k \frac{sh(ku)}{sh(k\delta_0)} \mathbf{cos}(kv) = \\ &= j\Psi_k \frac{1}{sh(k\delta_0)} [sh(ku) \mathbf{cos}(kv) + jch(ku) \mathbf{sin}(kv)] = j\Psi_k \frac{sh(kt)}{sh(k\delta_0)} \end{aligned} \quad (9.17)$$

(напомним, что в выражение для w_t переменные u и v не должны входить по отдельности – функция должна явно выражаться через комплексную переменную t).

Перенесение полученного решения в исходную область

В соответствии с функцией преобразования координат $t = \ln(z)$, тогда

$$w_z = w_t = j\Psi_k \frac{sh(k \cdot \ln(z))}{sh(k \ln(r_1))} = \varphi_z + j\Psi_z$$

Итак, решение в интересующей нас области получено на основе известного решения в другой области (в данном случае – более простой по форме, но, вообще говоря, область, в которой решение известно, не обязательно должна иметь более простую форму).

Домашнее задание. Убедиться в том, что это решение совпадает с полученным раньше методом разделения переменных для цилиндрической системы координат.

$$\Psi_z = \Psi_k \frac{(r')^k - (r')^{(-k)} (r_2')^{2k}}{(r_1')^k - (r_1')^{(-k)} (r_2')^{2k}} \mathbf{cos}(k\theta) \quad (9.18)$$

$$\varphi_z = -\Psi_k \frac{(r')^k + (r')^{(-k)} (r_2')^{2k}}{(r_1')^k - (r_1')^{(-k)} (r_2')^{2k}} \mathbf{sin}(k\theta) \quad (9.19)$$

Итак, решение в интересующей нас области получено на основе известного решения в другой области (в данном случае – более простой по форме, но, вообще говоря, область, в которой решение известно, не обязательно должна иметь более простую форму).

Воздушный зазор после конформного преобразования:

$$\delta_0 = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} + \dots = \mathbf{ln}(1 + \delta).$$

Это же конформное преобразование можно применить для анализа поля в зубчатом кольцевом зазоре. В приведенном примере стенки зубцов и внешнего и внутреннего сердечников в исходной плоскости z совпадают с радиальными направлениями. В преобразованной плоскости t и зубцы, и пазы сердечников имеют постоянную ширину.

В крупных электрических машинах пазы обычно выполняются прямыми – имеющими постоянную ширину. В этом случае линии стенок пазов на поперечном сечении машины направлены не по радиусам. Соответственно, в конформно преобразованной области линии стенок пазов окажутся направленными не по горизонтали (не параллельно оси абсцисс) и сами пазы примут трапецеидальную форму. Искажение формы, однако, будет незначительным, мало влияющим на распределение поля в зазоре.

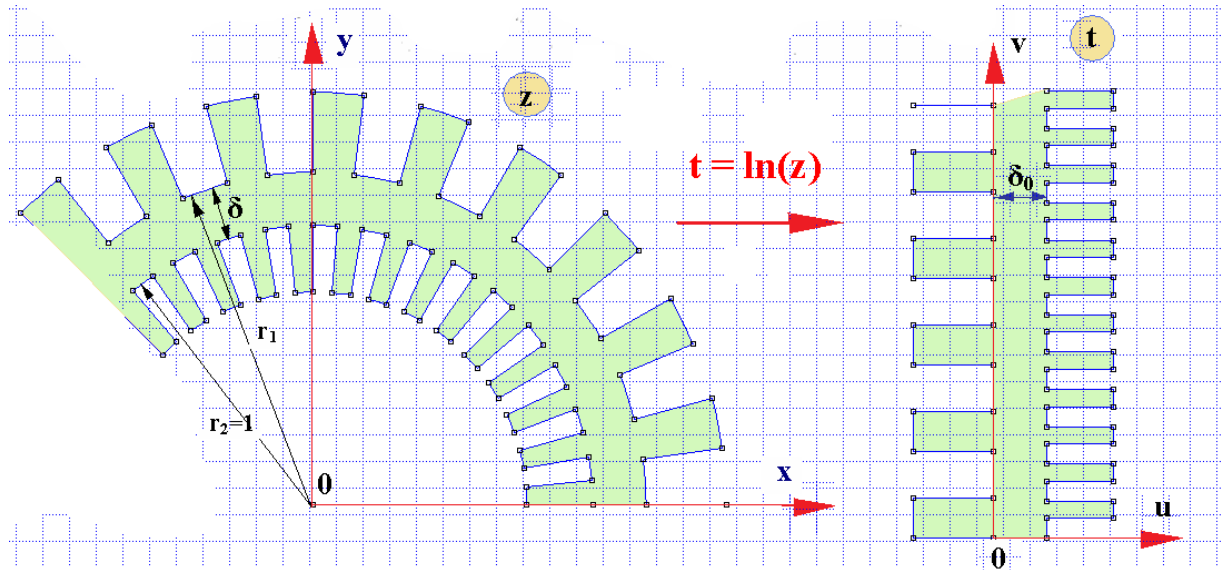


Рис. 9.17. Преобразование зубчатого кольцевого зазора в плоский

Таким образом, исследование кольцевого зубчатого зазора может быть сведено к исследованию плоского зубчатого зазора, который изучен значительно полнее.

Домашнее задание. С помощью конечно-элементной программы *FEMM* решить две полевых задачи, области которых связаны логарифмическим конформным преобразованием. Для простоты ограничиться не полным кольцевым зазором, а частью его (например, четвертью). На моделях воспроизвести униполярное поле (однородные условия Неймана на участках границы, соответствующих поверхностям сердечников, и условия Дирихле на «боковых» радиальных границах). Убедиться в том, что в сходственных точках значения величин поля совпадают.

Важные примеры логарифмического конформного преобразования

Поле линейного тока, заданного в точке с произвольной координатой z .

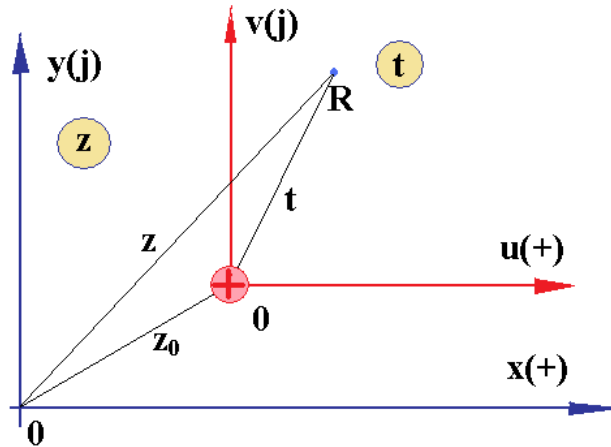


Рис. 9.18. К выводу выражения комплексной потенциальной функции поля линейного тока

Поместим начало координат плоскости t в точку приложения тока.

В плоскости t решение для комплексной потенциальной функции известно:

$$w = \frac{I}{2\pi} \ln(t); \quad t = z - z_0$$

Тогда в исходной плоскости z

$$w = \frac{I}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad (9.20)$$

Это решение можно использовать для определения *поля системы линейных токов*. Для этого следует воспользоваться суперпозицией.

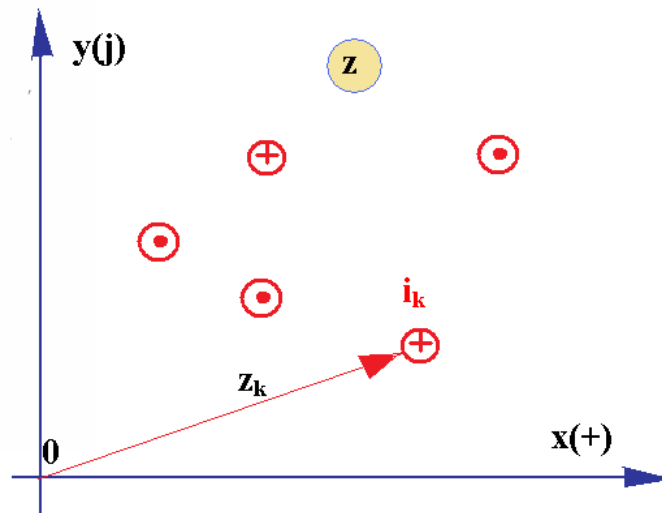


Рис. 9.19. К выводу выражения комплексной потенциальной функции поля системы линейных токов

$$w = \sum_{k=1}^N w_k$$

и поскольку

$$w_k = \ln(z - z_k)^{\frac{I_k}{2\pi}},$$

$$w = \ln \left[(z - z_1)^{\frac{I_1}{2\pi}} (z - z_2)^{\frac{I_2}{2\pi}} \cdots (z - z_k)^{\frac{I_k}{2\pi}} \right]$$

При $|I_1| = |I_2| = \cdots = |I_k| = I$, что бывает довольно часто,

$$w = \frac{I}{2\pi} \ln \left[(z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \cdots (z - z_k)^{\alpha_k} \right], \quad (9.21)$$

где $\alpha_k = \begin{matrix} +1 & \text{— для} & \text{положительных} & \text{токов} \\ -1 & \text{— для} & \text{отрицательных} & \text{токов} \end{matrix}$

Домашнее задание. С помощью конечно-элементной программы *FEMM* смоделировать поле системы токов и сравнить значения напряженности поля в произвольных точках, полученные аналитически по значениям комплексной потенциальной функции, и по результатам моделирования.

Поле двух одинаково направленных линейных токов
 - токи расположены на оси ординат:

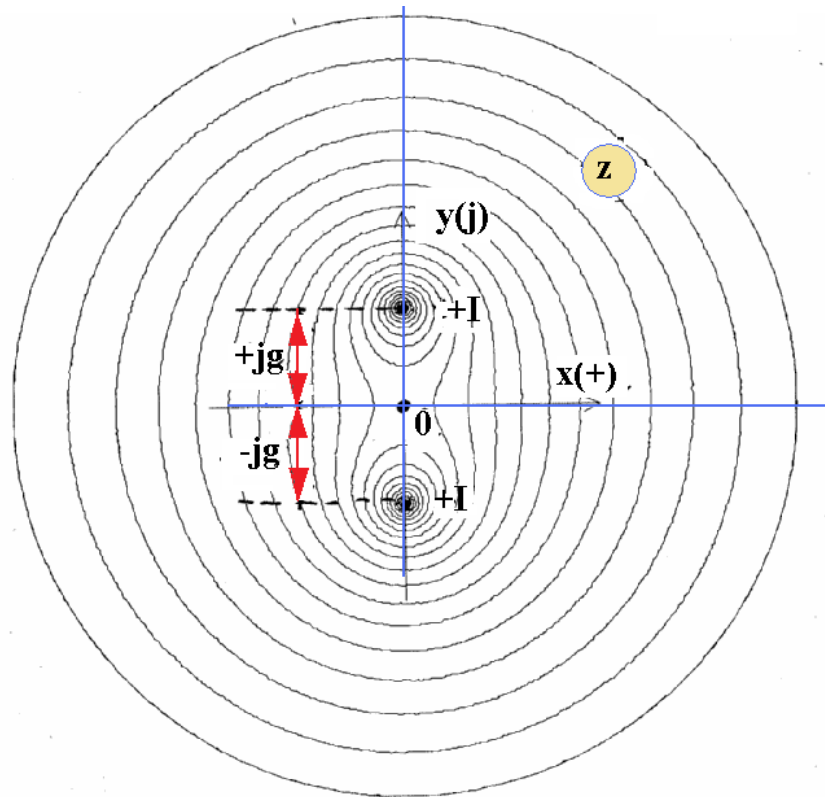


Рис. 9.20. К выводу выражения комплексной потенциальной функции поля двух одинаковых линейных токов, расположенных на одной вертикали

$$w = \frac{I}{2\pi} [\ln(z - jg) + \ln(z + jg)] = \frac{I}{2\pi} [\ln(z^2 + g^2)] \quad (9.22)$$

Решение этой задачи является по сути обоснованием метода зеркальных отражений. Если $\mu \neq \infty$, решение усложняется.

- токи расположены на действительной оси:

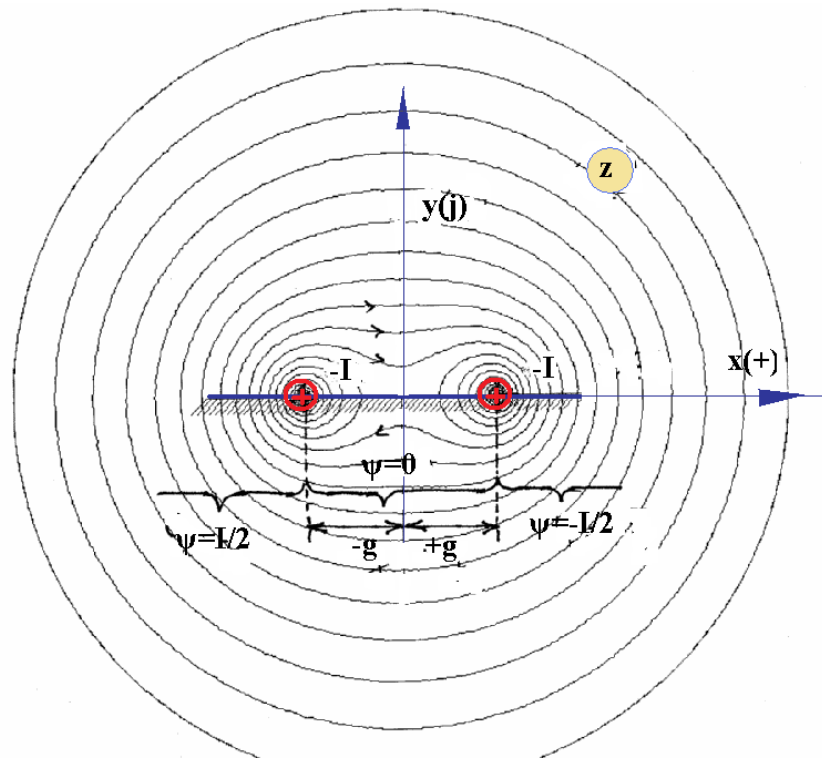


Рис. 9.21. К выводу выражения комплексной потенциальной функции поля двух одинаковых линейных токов, расположенных на одной горизонтали

$$w = \frac{I}{2\pi} \ln(z^2 - g^2) \quad (9.23)$$

Здесь заданы отрицательные токи (направленные за плоскость рисунка от наблюдателя). Распределение потенциала показано для оси x .

Можно рассматривать это поле как поле двух половин тока I , заданных на поверхности сердечника с магнитной проницаемостью, равной бесконечности.

Поле токов разного направления, расположенных на действительной оси
оси

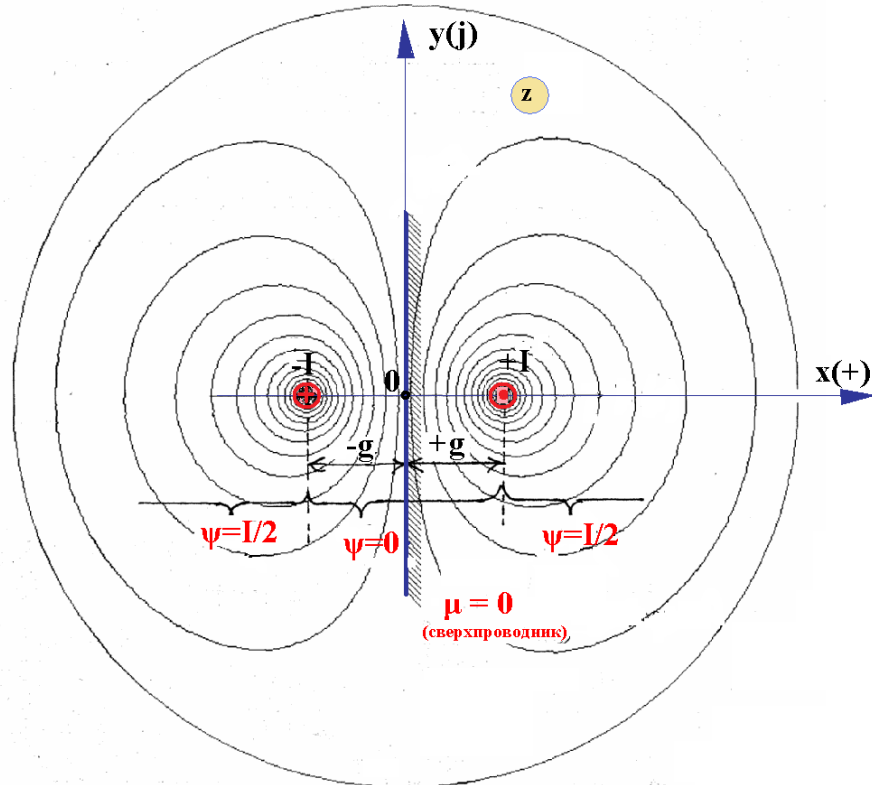


Рис. 9.22. Поле токов разного направления, расположенных на вещественной оси

Распределение потенциала здесь также дано для оси x . Поле слева (или справа) от оси y можно рассматривать как поле линейного провода с током, размещенного над сверхпроводящим телом ($\mu = 0$). Магнитное поле не проникает в сверхпроводник, при этом на провод действует сила, нормальная к поверхности сверхпроводника. Это явление используется, в частности, при создании сверхпроводниковых опор (подшипников).