

Раздел 10. Конформные преобразования (продолжение). Преобразование Шварца-Кристоффеля

10.1. Дифференциальное уравнение Шварца-Кристоффеля

С помощью этого преобразования верхняя полуплоскость исходной комплексной плоскости отображается на действительную ось другой комплексной плоскости (будем называть ее плоскостью преобразования).

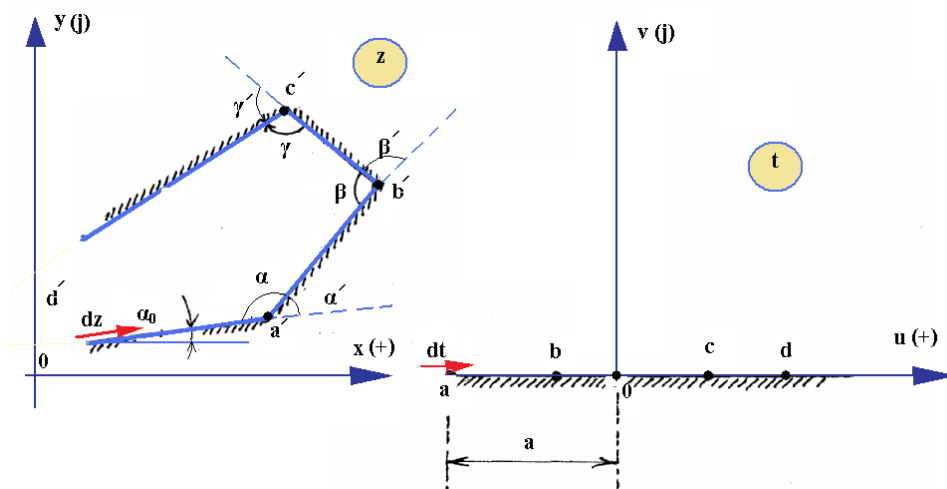


Рис. 10.1. Конформное преобразование Шварца-Кристоффеля

На рисунке слева изображена исходная многоугольная область задачи. Греческими буквами со штрихом обозначены углы, дополнительные к внутренним углам многоугольника, на эти углы «поворачиваются» стороны многоугольника при обходе области задачи по внешней границе (напомним, что положительным направлением обхода области является то, при котором область остается слева).

На рисунке справа показана область преобразования. Преобразование Шварца-Кристоффеля отображает вершины исходного многоугольника в точки на действительной оси этой плоскости.

Аналитическим выражением, представляющим преобразование координат является решение дифференциального уравнения Шварца-Кристоффеля:

$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)^{\frac{(\alpha-1)}{\pi}} (t-b)^{\frac{(\beta-1)}{\pi}} \dots \quad (10.1)$$

В (10.1) S некоторая постоянная, подлежащая определению, a, b, \dots - координаты точек, в которые отображаются вершины исходного многоугольника, часть из них можно задать произвольно, а часть также необходимо найти. При определении постоянных в уравнении Шварца-Кристоффеля необходимо исходить из заданных граничных условий.

Удобно записать уравнение Шварца-Кристоффеля в ином виде, используя дополнительные углы α', β', \dots :

$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)^{\frac{-\alpha'}{\pi}} (t-b)^{\frac{-\beta'}{\pi}} \dots \quad (10.2)$$

Обозначим правую часть (10.2) через $f(t)$, тогда

$$dz = f(t)dt$$

$$\mathbf{arg}(dz) = \mathbf{arg}(f(t)) + \mathbf{arg}(dt) = \mathbf{arg}(f(t)) \quad (10.3)$$

$$\mathbf{arg}(dz) = \mathbf{arg}(f(t)) = \mathbf{arg}(S) - \frac{\alpha'}{\pi} \mathbf{arg}(t-a) - \frac{\beta'}{\pi} \mathbf{arg}(t-b) - \dots$$

Предположим, что координаты a, b и c известны.

Рассмотрим вначале наименьшие значения комплексной координаты t :

$$t < a < b < c:$$

$$\mathbf{arg}(t-a) = \pi$$

$$\mathbf{arg}(t-b) = \pi \quad \text{аргументы отрицательных чисел,}$$

.....

следовательно,

$$\mathbf{arg}(dz) = \alpha_0 = \mathbf{arg}(S) - \alpha' - \beta' - \gamma' - \dots$$

Всегда есть возможность подобрать $\mathbf{arg}(S)$ так, чтобы это равенство выполнялось.

Далее: $t > a$ и $t < b < c$:

$$\arg(t - a) = 0$$

$$\arg(t - b) = \pi$$

.....

Тогда

$$\arg(dz) = \arg(S) - \beta' - \gamma' - \dots = \alpha_0 + \alpha'.$$

Итак, для определения функции преобразования координат надо интегрировать уравнение Шварца-Кристоффеля. В результате получим:

$$z = \int f(t)dt + K \quad (10.4)$$

Подлежат определению: S, K, a, b, c, \dots - постоянные в уравнении Шварца-Кристоффеля. Интегрирование тем сложнее, чем больше сомножителей в (10.4) и чем сложнее степень, в которую надо возводить двучлены (лучше всего, если дополнительные углы равны $\pi/2, \pi$ и т.д.).

Замечание. Свойства конформного преобразования сохраняются для всех точек, кроме особых – вершин многоугольника.

10.2. Простейший пример конформного преобразования Шварца-Кристоффеля

Рассмотрим задачу о токе, расположенном на стороне ферромагнитного угла, равного $\pi/2$. Областью задачи в этом случае является двуугольник.

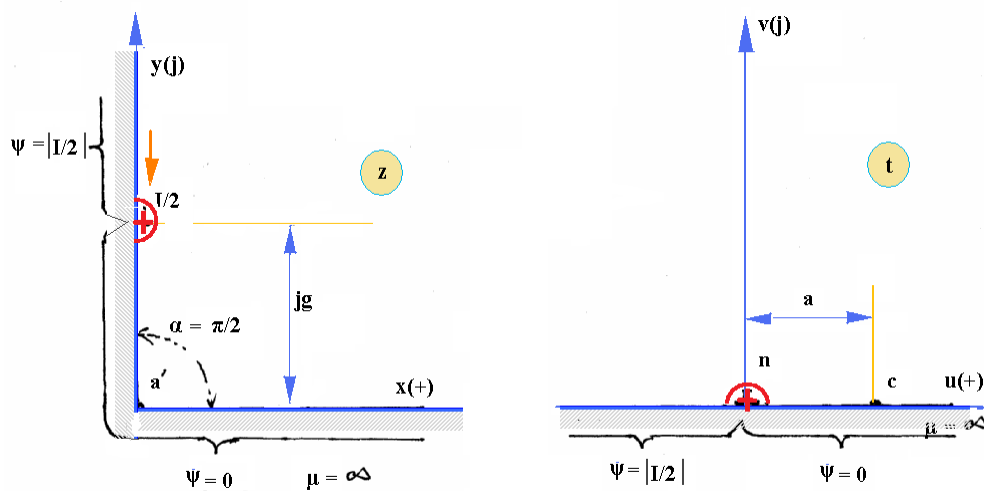


Рис. 10.2. Пример конформного преобразования Шварца-Кристоффеля

Предположим, что точка c плоскости t с координатой a соответствует точке a' исходной плоскости z .

Уравнение Шварца-Кристоффеля:

$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1} = S(t-a)^{-\frac{1}{2}}$$

$$z = S \int (t-a)^{-\frac{1}{2}} dt + K$$

$$z = S_1(t-a)^{\frac{1}{2}} + K$$

Составим таблицу соответствия координат, которая поможет нам найти постоянные.

z	$+j\infty$	$+jg$	0
t	$-\infty$	0	a
		n', n	c, a'

Здесь подразумевается, что постоянные подобраны так, что точка n' с координатой jg в плоскости z отображается в начало координат плоскости t (см. рисунок).

Сделаем подстановки:

$$t = a, \quad z = 0 : 0 = S_1 \cdot 0 + K, \text{ откуда } K = 0$$

$$z = jg, \quad t = 0, \text{ откуда } jg = S_1 \sqrt{-a}.$$

Поскольку в плоскости t выбрано a – вещественное число, S_1 также должно быть вещественным. В частности, можно положить $S_1 = 1$. Тогда

$$a = g^2$$

и уравнение преобразования приобретает вид:

$$z = (t - g^2)^{\frac{1}{2}} \tag{10.5}$$

Теперь можно рассчитать поле в заданной области (в первом квадранте). Для этого зададим граничные условия (см. предыдущий рисунок).

Для плоскости t решение известно:

$$w = \frac{I}{2\pi} \ln(t) = \frac{\left(\frac{I}{2}\right)}{\pi} \ln(t).$$

Распространим его на плоскость z , используя $t = z^2 + g^2$ (см. (10.5)):

$$w = \frac{I}{2\pi} \ln(z^2 + g^2) = \varphi + j\psi \quad (10.6)$$

По найденным решениям в плоскостях z и t могут быть построены картины поля. На приведенных ниже рисунках картины поля представлены линиями уровня функции потока.

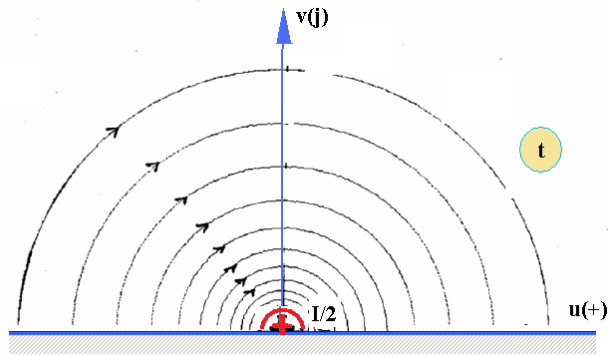


Рис. 10.3. Картина поля в преобразованной плоскости (известное решение)

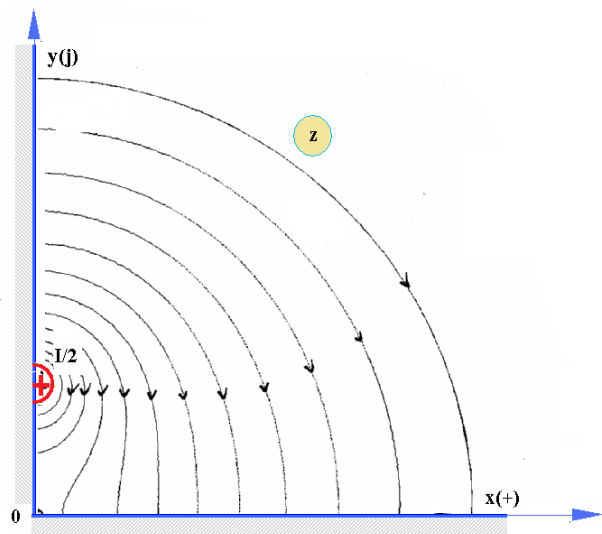


Рис. 10.4. Картина поля в исходной области (найденное решение)

Найдем напряженность поля в плоскости z .

$$|H| = \left| \frac{dw}{dz} \right|$$

и после подстановки

$$|H| = \frac{I}{2\pi} \left| \frac{2z}{g^2 + z^2} \right| = \frac{I}{2\pi} \left| \frac{2(x + jy)}{g^2 + x^2 - y^2 + 2jxy} \right|$$

$$\arg(H) = -\arg \left| j \frac{dw}{dz} \right| = -\arg \left| \frac{2(-y + jx)}{g^2 + x^2 - y^2 + 2jxy} \right|$$

Линии поля можно построить, непосредственно вычисляя функции φ и ψ .

Иногда для вычислений картины поля бывает удобно (но не всегда возможно) выразить z через φ , ψ и w .

В рассматриваемом случае из (10.6):

$$g^2 + z^2 = e^{\frac{2\pi}{I}(\varphi + jy\psi)} \quad \text{и} \quad z = \sqrt{e^{\frac{2\pi}{I}(\varphi + jy\psi)} - g^2} = x + jy \quad (10.7)$$

Замечание. Одновременно мы решили задачу о токе $I = 2 \cdot (I/2)$, расположенном над плоским сердечником на высоте g (см. рисунок).

Домашнее задание. С помощью конечно-элементной программы *FEMM* смоделировать поле линейного тока, заданного: а) на стороне ферромагнитного прямого угла и б) на поверхности плоского сердечника. Проницаемость сердечников считать равной бесконечности. Убедиться в том, что величины поля в сходственных точках совпадают. Оценить влияние близости внешней границы на точность решения задачи.

10.3. Способы определения постоянных в уравнении Шварца-Кристоффеля

Многоугольник не имеет вершин, образованных пересечением параллельных сторон (все вершины – не в бесконечности).

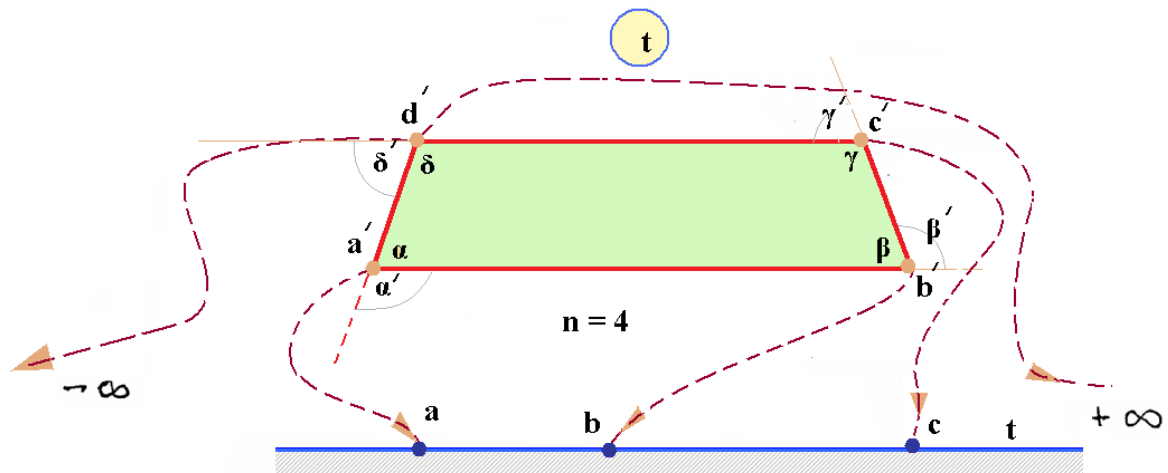


Рис. 10.5. Конформное преобразование многоугольника, не имеющего вершин в бесконечности

Точка d' на оси t отображается в $+\infty$ и в $-\infty$. В этом случае число двучленов в уравнении Шварца-Кристоффеля оказывается на единицу меньше числа вершин:

$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)^{\frac{-\alpha'}{\pi}} (t-b)^{\frac{-\beta'}{\pi}} (t-c)^{\frac{-\gamma'}{\pi}}$$

$$z = S \cdot f(t, a, b, c) + K$$

Число неизвестных постоянных: $(n-1) + 2 = n + 1$. Т.к. положение трех точек (a , b и c) (т.е. $(n-1)$ точек) на оси t мы определили, можно составить $(n-1)$ уравнений типа

$$z_0 = S, f(t_0, a, b, c) + K \quad (10.8)$$

Две оставшиеся постоянные нужно задать произвольно.

Эта техника в дальнейшем будет пояснена примерами, что сделает ее более понятной.

10.4. Способы определения постоянных в уравнении Шварца-Кристоффеля для вырожденных многоугольников

«Открытые» многоугольники имеют одну вершину, расположенную в бесконечности (угол при этой вершине – отрицательный).

Рассмотрим открытый треугольник. Сумма его внутренних углов по определению равна π .

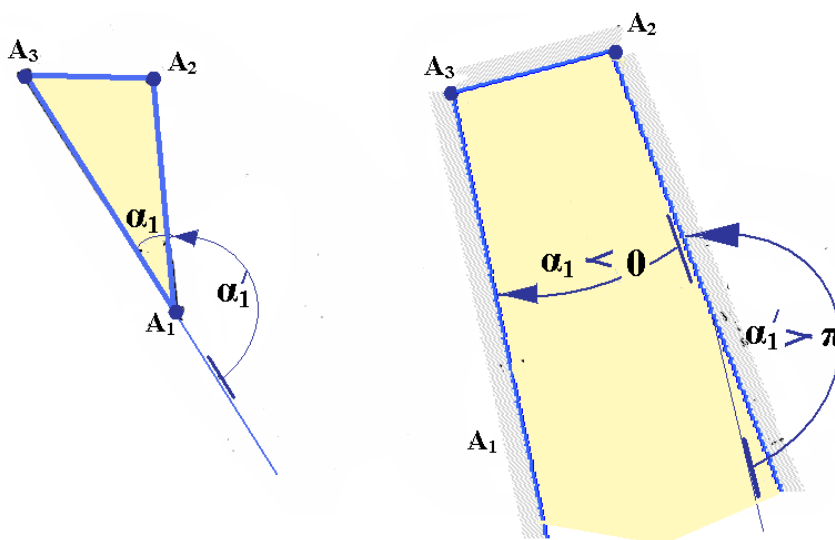


Рис. 10.6. Вырожденный треугольник

Дополнительный угол α'_1 можно рассматривать как угол между продолжением стороны A_3A_1 и следующей (при обходе треугольника в положительном направлении) стороны A_1A_2 . Угол при вершине многоугольника, удаленной в бесконечность, отрицателен. При преобразовании на плоскость t эту вершину целесообразно поместить в бесконечность, тогда остальные постоянные определяются обычно по уравнениям типа $z_k = f(t_k)$

То, что угол α_1 отрицателен, следует из самого определения понятия дополнительного угла: **при любой конфигурации многоугольника сумма внутреннего угла при вершине и дополнительного к нему угла равна π** .

$$\alpha_1 = \pi - \alpha'_1 \quad \text{и при} \quad \alpha'_1 > \pi \quad \alpha_1 < 0.$$

Это обстоятельство можно объяснить и таким образом. Рассмотрим «обычный» треугольник $A_1 A_2 A_3$, показанный на рисунке слева. Будем «раздвигать» стороны $A_3 A_1$ и $A_1 A_2$. Угол α_1 при этом будет постепенно уменьшаться до нуля (нулю он станет равен, когда стороны $A_3 A_1$ и $A_1 A_2$ станут параллельны друг другу), а затем станет отрицательным. Образовавшуюся при этом фигуру будем называть открытым треугольником.

10.5. Частный случай: открытый двуугольник

Вначале заметим, что сумма внутренних углов при вершинах всякого многоугольника равна

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{\text{int}.k} = m \cdot \pi - 2\pi = \pi(m - 2) \quad (10.9)$$

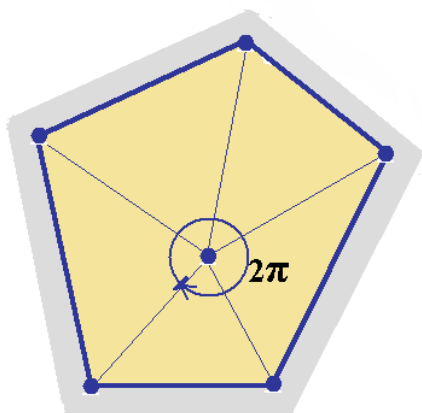


Рис. 10.7. Пояснение к формуле (10.9)

При числе сторон многоугольника, равном двум: $m = 2$

$$\sum_{k=1}^m \alpha_{\text{int}.k} = \pi(m - 2) = 0, \text{ из чего следует, что } \alpha_1 = -\alpha_2 \text{ и } \alpha_1 < 0$$

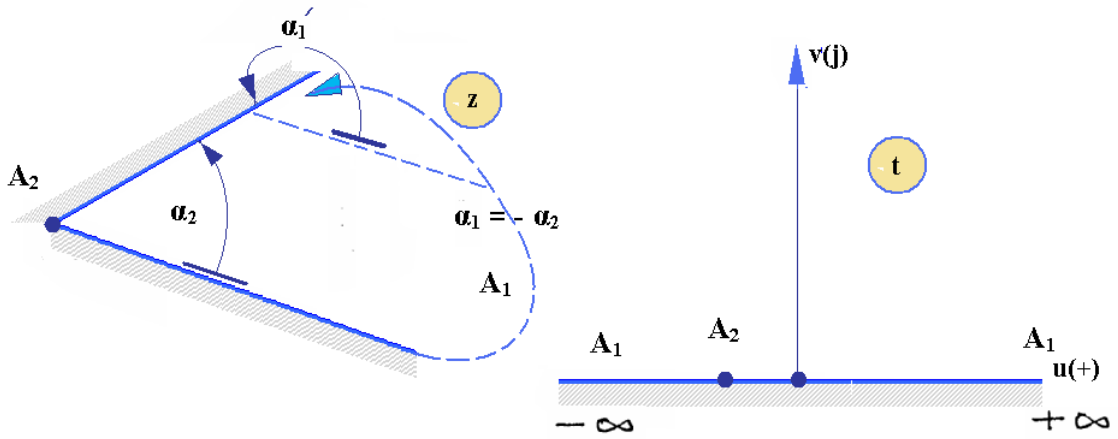


Рис. 10.8. Преобразование открытого двуугольника

На рис. 10-8 показано преобразование открытого двуугольника на плоскость t . В плоскости z вершина A_1 находится в бесконечности. В плоскости t она также помещена в бесконечность.

10.6. Многоугольники с параллельными сторонами

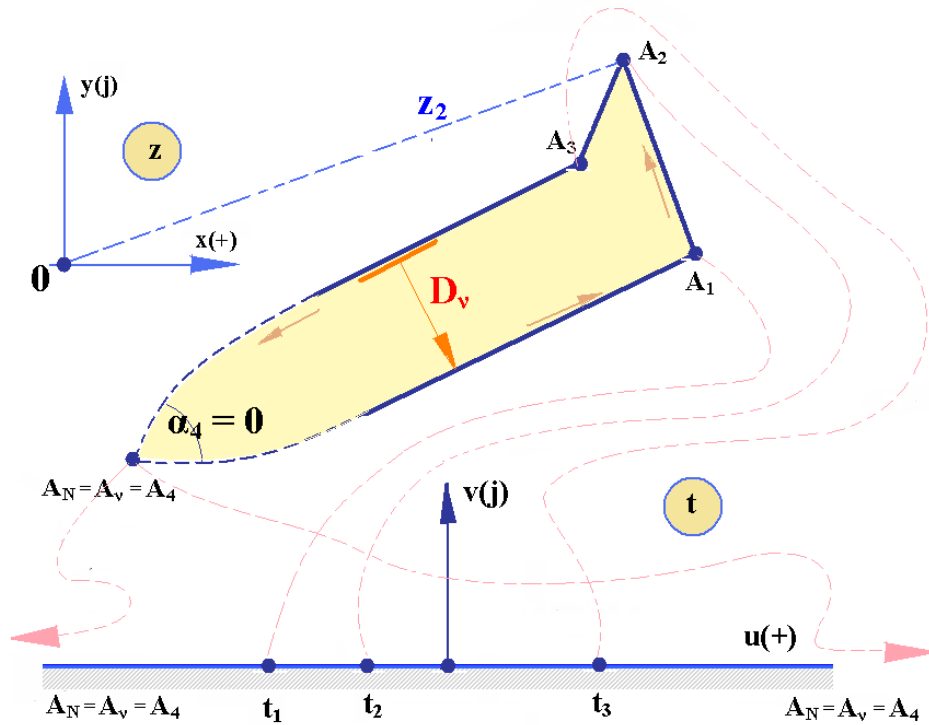


Рис. 10.9. Преобразование многоугольника с параллельными сторонами

Обозначим индексом ν (греческая буква «ню», не путать с латинской ν («вэ»)) символы, относящиеся к вершине, расположенной в бесконечности. В рассматриваемом примере $\nu = 4$. Вершина A_4 , расположенная в плоскости z в бесконечности, отражается на действительную ось плоскости t также в $\pm \infty$.

$$\alpha'_\nu = \alpha'_4 = \pi - \alpha_4 = \pi$$

$$t_\nu = t_4 = \pm \infty$$

$$|z_\nu| = |z_4| = \infty$$

Вместо обычных $N-1 = 4 - 1 = 3$ уравнений для вершин A_1 , A_2 и A_3 :

$z_1 = f(t_1)$, $z_2 = f(t_2)$, $z_3 = f(t_3)$ обычным образом записывают только $(N-2)$ уравнений, например, $z_1 = f(t_1)$ и $z_2 = f(t_2)$, а еще одно уравнение, несмотря на то, что $t_\nu = \pm \infty$, записывают *особым образом для вершины A_ν* . В теории функций комплексного переменного доказывается, что это уравнение имеет вид

$$D_\nu = j\pi S \quad , \quad (10.10)$$

где D_ν - комплексное число, определяющее расстояние между параллельными сторонами в плоскости z .

Рассмотрим еще один случай, когда *вершина, расположенная в плоскости z в бесконечности, на плоскости t не отображается в $\pm \infty$* .

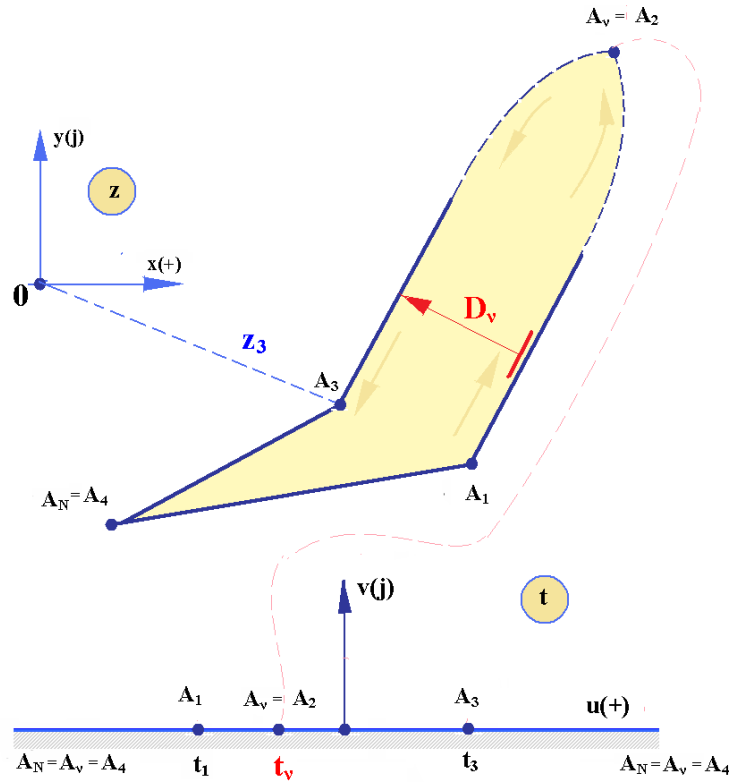


Рис. 10.10. Преобразование открытого четырехугольника

Здесь $N = 4$, $\alpha_2 = 0$, откуда $\alpha_2' = \pi$, $t_2 \neq \infty$, $|z_2| = \infty$.

В этом случае записывают следующие три $(N - 1)$ уравнения:
для $(N - 2) = 2$ вершин – обычным образом:

$$z_1 = f(t_1)$$

$$z_3 = f(t_3),$$

а для v -й вершины ($v = 2$) вместо $z_v = f(t_v)$ записывают следующее:

$$D_v = j\pi S \prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq v)}}^{k=N-1} (t_v - t_k)^{-\frac{\alpha_k'}{\pi}} \quad (10.11)$$

И, наконец, рассмотрим случай, *когда параллельные стороны многоугольника пересекаются под углом $-\pi$, причем этой вершине соответствует в плоскости t точка с конечными координатами.*

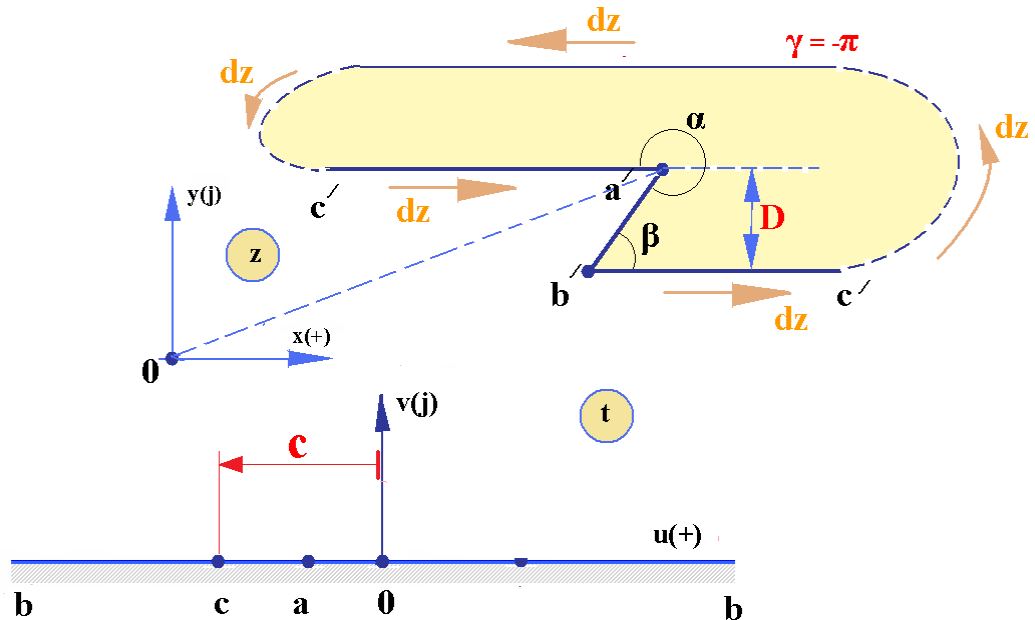


Рис. 10.11. Еще один пример преобразования многоугольника с параллельными сторонами

В точке c' вектор перемещения dz поворачивает на угол 2π (а не на π , как в предыдущем случае), следовательно, $\gamma' = 2\pi$ и т.к. $\gamma = \pi - \gamma'$,

$$\gamma = \pi - 2\pi = -\pi$$

В этом случае дополнительное уравнение записывается следующим образом:

$$D = j\pi \cdot (\text{вычет в } t. c) \cdot (\text{вычет в } t. c) = \lim_{t \rightarrow c} \frac{d}{dt} \left[(t-c)^2 \cdot S \cdot f(a, b, c, t) \right] \quad (10.12)$$

где $f(a, b, c, t) = (t-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1} (t-b)^{\frac{\beta}{\pi}-1} (t-c)^{-2}$ (здесь учтено, что $\frac{\gamma}{\pi} - 1 = -2$)