

Раздел 11. Магнитное поле в зазоре электрической машины с учетом зубчатости сердечников

11.1. Форма зубчатых сердечников

Изучение магнитного поля в воздушном зазоре электрической машины имеет большое значение для правильного понимания происходящего в ней процесса преобразования энергии. Конфигурация зоны, называемой обычно воздушным (иногда – немагнитным) зазором, определяется формой раскрытий пазов сердечников. В зависимости от типа обмотки различают открытые, полуоткрытые, полужакрытые и закрытые пазы (более подробно – в руководствах и учебной литературе по проектированию электрических машин). Находят применение также т. наз. беспазовые обмотки, укладываемые непосредственно на цилиндрических (или плоских в случае линейных машин) поверхностях сердечников.

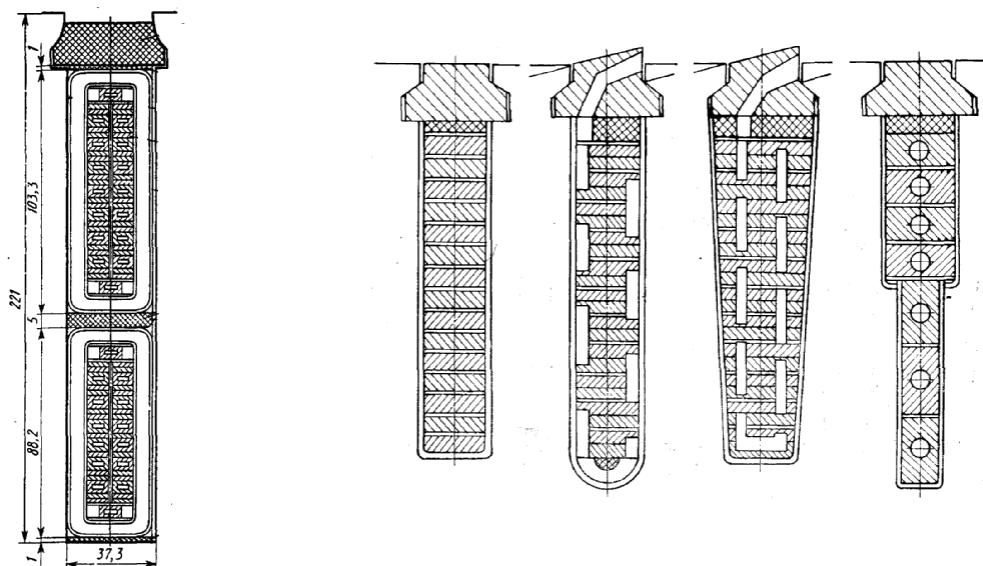


Рис. 11.1. Открытые пазы синхронной машины большой мощности. Слева показан паз статора, содержащий два стержня обмотки с непосредственным водяным охлаждением, справа – разновидности пазов ротора, в том числе с непосредственным водородным (или воздушным) охлаждением (из книги Г.М. Хуторецкого и др «Проектирование турбогенераторов», Ленинград, Энергоатомиздат, 1987).

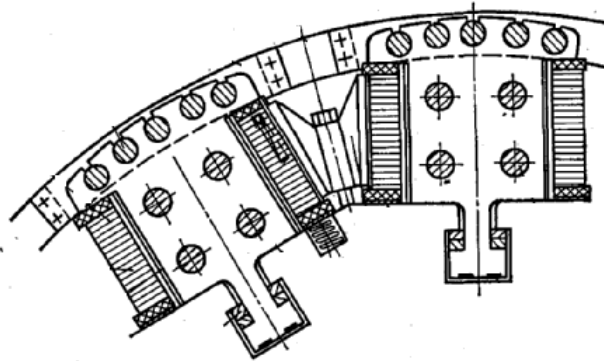


Рис. 11.2. Воздушный зазор явнополюсной синхронной машины, на полюсах которой имеется демпферная обмотка. Зазор под краями полюсов примерно в полтора раза больше, чем под их серединой. (из учебника А.В. Иванова-Смоленского «Электрические машины», Москва, Энергия, 1980).

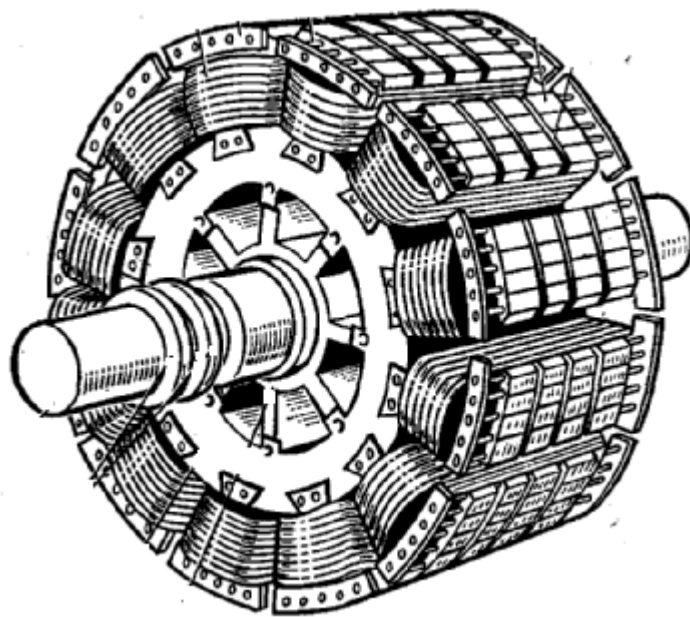


Рис. 11.3. Внешний вид явнополюсного ротора синхронной машины, имеющей демпферную обмотку (из учебника А.В. Иванова-Смоленского «Электрические машины», Москва, Энергия, 1980).

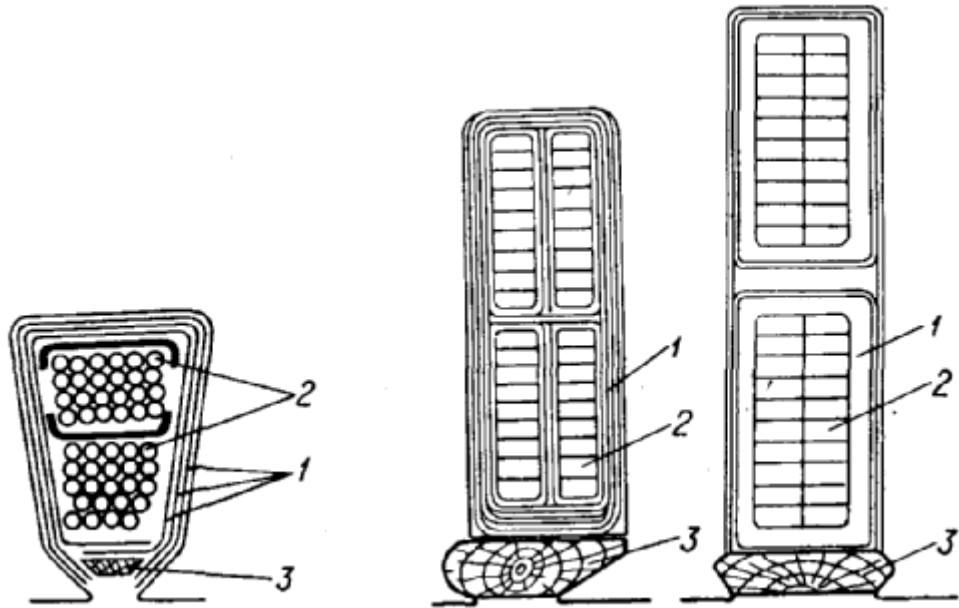


Рис. 11.4. Форма пазов статора асинхронной машины малой (слева) и большой (справа) мощности. 1- изоляция, 2- провода обмотки, 3- клинья

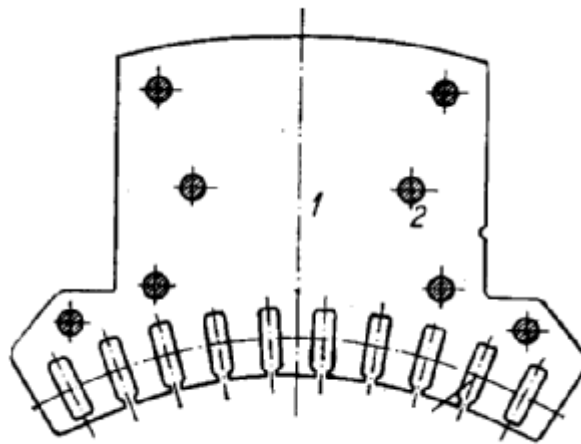


Рис. 11.5. Зубцовая зона главного полюса машины постоянного тока, имеющей компенсационную обмотку

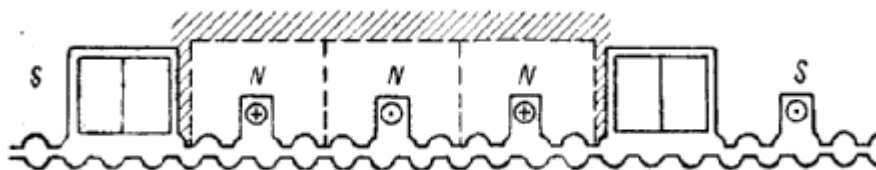


Рис. 11.6. Зубцовая зона одного из типов индукторной машины

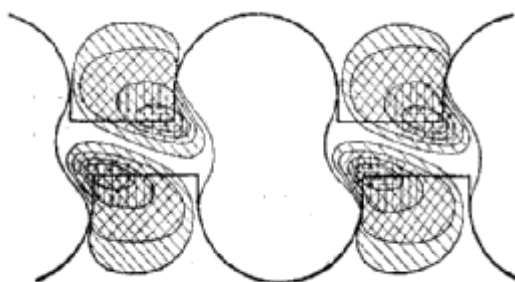


Рис. 11.7. Эквиденсы магнитного поля (линии постоянной (по абсолютному значению) индукции) в зубцовой зоне индукторной машины (из книги Р.П. Жежерина «Индукторные генераторы», М-Л, Госэнергоиздат, 1961).

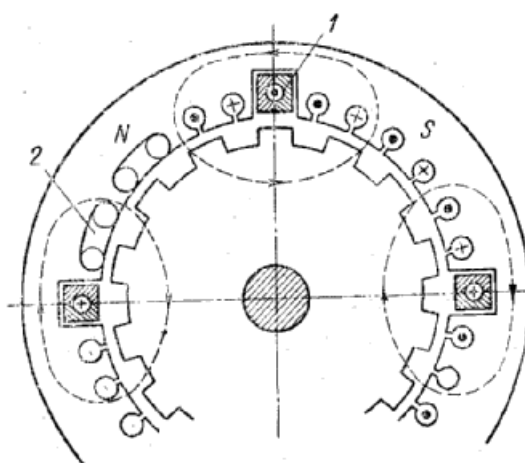


Рис. 11.8. Разноименнополюсная индукторная машина Лоренц-Шмидта. 1- обмотка возбуждения, 2 – рабочая обмотка (из книги Е. Видемана и В. Келленберге-ра «Конструкции электрических машин» (пер. с нем.) «Энергия», Л-д, 1972)

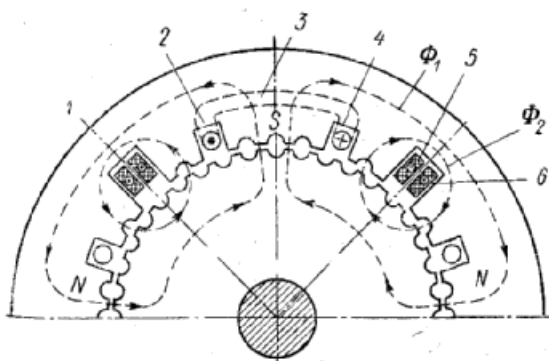


Рис. 11.9. Разноименнополюсная индукторная машина Гюй. 1, 6 – пазы с обмоткой возбуждения, 2, 4 – пазы с рабочей обмоткой, 3 – рабочая обмотка, 5 – обмотка возбуждения, Φ_1 , Φ_2 – магнитные потоки (из книги Е. Видемана и В. Келленберге-ра «Конструкции электрических машин» (пер. с нем.) «Энергия», Л-д, 1972)

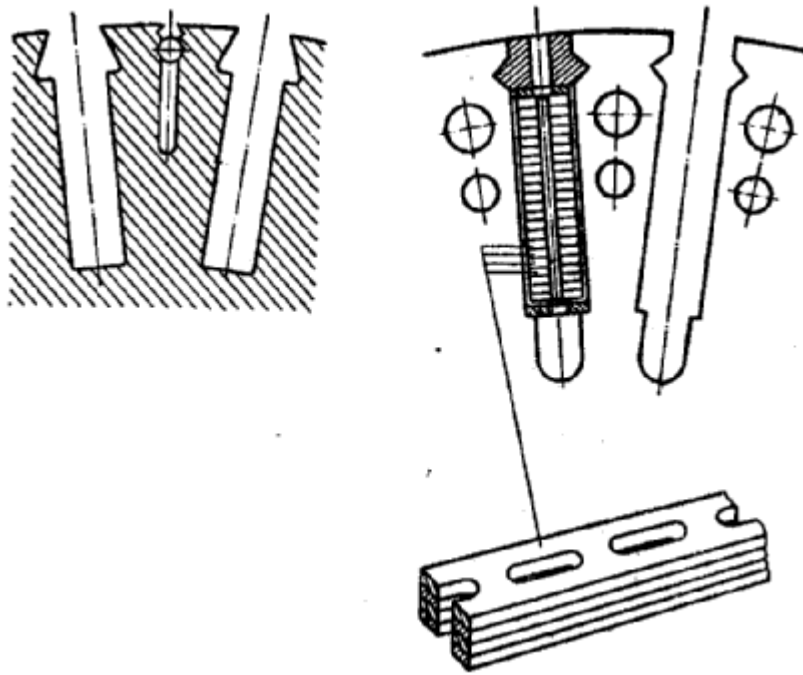


Рис. 11.10. Различные формы пазов ротора турбогенератора с газовым охлаждением. Слева показаны дополнительные пазы в зубцах, увеличивающие поверхность охлаждения (заметьте, что эти пазы выполнены в верхних частях зубцов, т.е. в той зоне, где индукция заметно меньше, чем в основаниях зубцов). Справа показан способ охлаждения меди ротора газом, проходящим в аксиальном направлении по подпазовому каналу. (из книги Е. Видемана и В. Келленбергера «Конструкции электрических машин» (пер. с нем.) «Энергия», Л-д, 1972)

11.2. Постановка задачи и допущения

Итак, поставим перед собой задачу рассчитать распределение магнитного поля в воздушном зазоре при заданных мгновенных значениях токов в обмотках машины, учитывая при этом сложную конфигурацию этой зоны, обусловленную наличием пазов на сердечниках. Аналитического решения этой задачи при одновременном рассмотрении зубчатости и статора, и ротора не получено, поэтому для того чтобы воспользоваться аналитическими методами, следует принять ряд упрощающих допущений.

1. Прежде всего, договоримся, что только один из сердечников будем рассматривать зубчатым, второй будем считать гладким (учет зубчатости второго сердечника может быть произведен с помощью т. наз. коэффициен-

та зазора (коэффициента Картера), подробнее о котором будет сказано в дальнейшем).

2. Предположим, что магнитное поле создается только той обмоткой, которая расположена в пазах зубчатого сердечника.

3. Ограничимся изучением поля только в области зазора и в зоне раскрытий (шлицев) пазов, примыкающей к зазору между сердечниками.

4. Как и раньше, будем считать, что магнитная цепь линейна ($\mu = \infty$).

5. Кривизну зазора учитывать не будем. В том случае, если зазор относительно велик, применим логарифмическое конформное преобразование $t = \ln(z)$, причем прямоугольный паз сохраним прямоугольным, а зазор и ширину паза на радиусе r_1 (радиус возбужденного сердечника) скорректируем (см. раздел о логарифмическом конформном преобразовании).

6. Примем ряд допущений, которые позволяют рассматривать поле около каждого паза изолированно от поля других пазов, а также не учитывать местоположение тока в пазу и форму паза (кроме зоны открытия паза в воздушный зазор).

11.3. Пример применения конформного преобразования зубцовой зоны

В плоскости z пазы обоих сердечников – прямоугольные (имеют постоянную ширину). В преобразованной области они становятся трапециевидными, однако обычно мало отличаются от прямоугольных. Зазор при преобразовании изменяется.

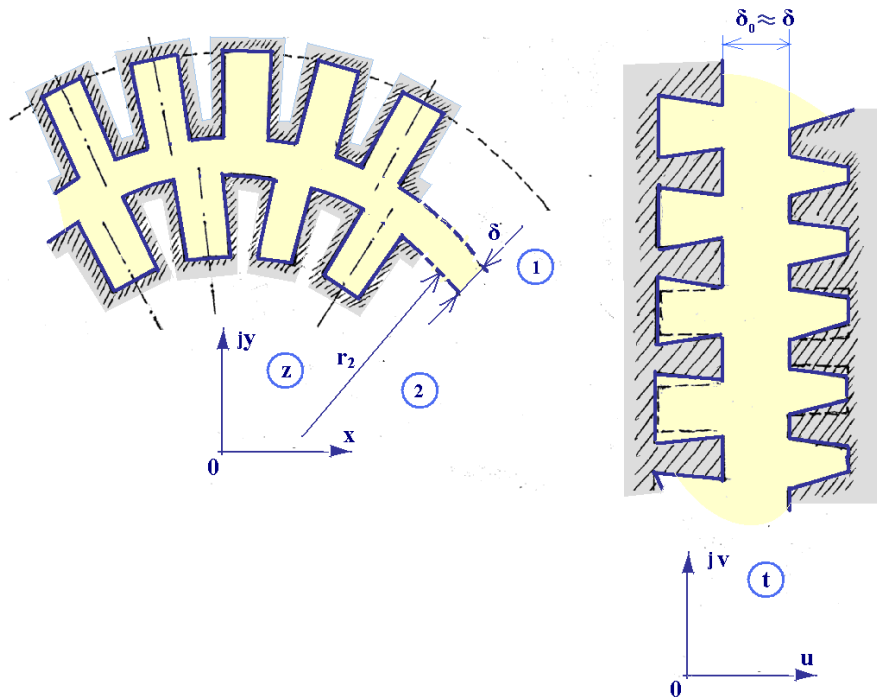


Рис. 11.11. Преобразование кольцевого зазора в плоский при двусторонней зубчатости сердечников

11.4. Две возможные модели паза

Будем рассматривать прямоугольные пазы. При рассмотрении поля в зазоре в случае полуоткрытых и полузакрытых пазов обычно без большой погрешности их можно заменить прямоугольными пазами с шириной, равной ширине раскрытия паза (модель на рисунке слева). Если же размеры таковы, что поле в клиновидной части полузакрытого паза все-таки оказывает влияние на поле в зазоре, используют модель паза, показанную на рисунке справа – коронки зубцов в этом случае считают бесконечно тонкими, что дает возможность применить конформное преобразование.

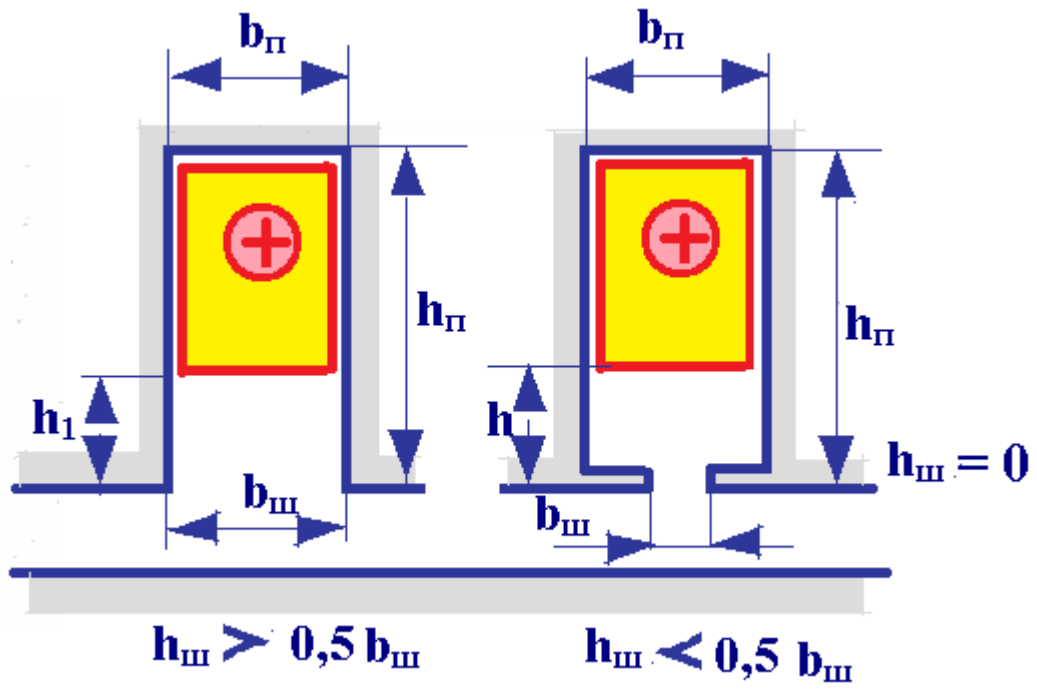


Рис. 11.12. Две модели полузакрытого паза

11.5. Возможность рассматривать паз отдельно от других

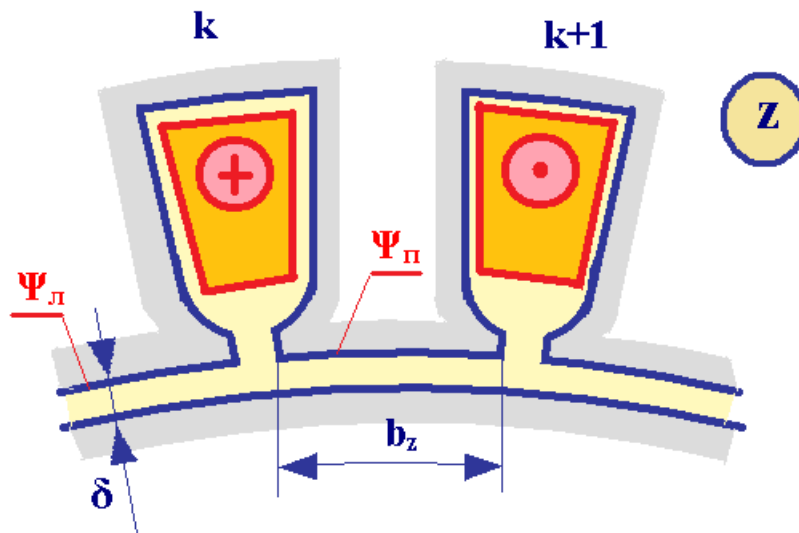
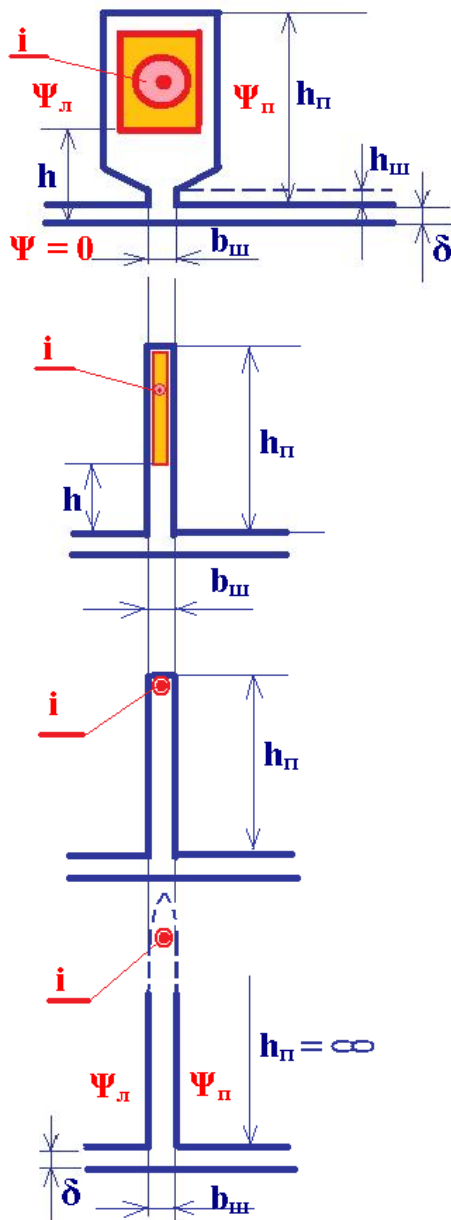


Рис. 11.13. При ширине зубца, втрое превышающей зазор, можно считать, что токи других пазов не влияют на поле в области раскрытия рассматриваемого паза

При относительно широких зубцах ($b_z \geq 3\delta$) влияние соседних пазов можно не учитывать и вместо системы пазов можно рассматривать одиночные пазы. Обычно это условие выполняется. Исключение составляют турбогенераторы, в которых зазор делается большим по соображениям большей статической перегружаемости.

Итак, один из пазов (например, k -й, (см. рисунок)) можно выделить из



общей системы, а остальные пазы убрать в бесконечность, значения скалярных магнитных потенциалов слева и справа от паза, Ψ_l и Ψ_n , и ток паза можно при этом сохранить.

Если $h_{ш} > 0,5b_{ш}$, паз можно заменить пазом прямоугольной формы с шириной паза, равной ширине раскрытия.

Если $h \geq 0,6b_{ш}$, (расстояние от зазора до провода), то провод можно считать помещенным на дно паза. Поле при этом в зоне раскрытия паза, и особенно на противоположном сердечнике, изменится мало.

Если $h_{п} \geq 1,5b_{ш}$, влияние глубины паза на поле в зоне раскрытия мало и можно перейти к бесконечно глубокому пазу, на дне которого задан ток.

Рис. 11.14. К формированию расчетной модели паза

Таким образом, если перечисленные условия выполняются, мы получаем возможность рассматривать идеализированный паз, поле в котором можно исследовать с помощью конформных преобразований. Важно заметить, что погрешность, вносимая принимаемыми допущениями, в каждом конкретном случае может быть оценена (например, с помощью численных расчетов поля).

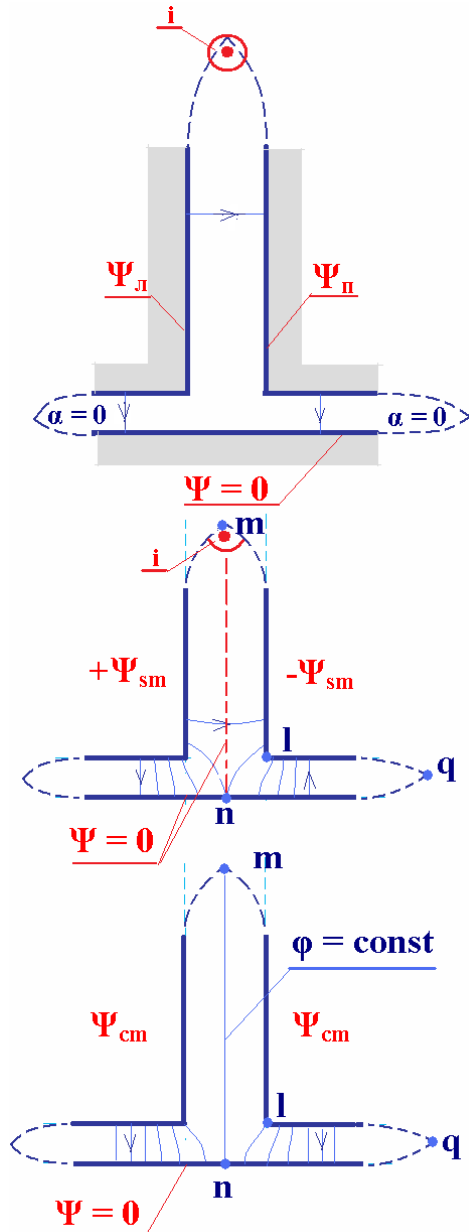


Рис. 11.15. Разложение поля в области паза на нечетное и четное поля

с четной функцией \cos .

11.6. Разложение поля одиночного паза при принятых допущениях на четное и нечетное поля

На рисунке изображен выделенный паз после применения к нему перечисленных выше допущений. Напомним, что принятое положительное направление обхода области задачи – против часовой стрелки.

Потенциалы зубцов:

$$\Psi_n = \Psi_n + i$$

Представим поле паза в виде суммы двух симметричных полей, одно из них, образованное током паза (в предположении, что токи всех остальных пазов отсутствуют), назовем нечетным (индекс s), второе, созданное токами всех пазов машины за исключением тока рассматриваемого паза, назовем четным (индекс c). Выбор индексов объясняется аналогией с нечетной функцией \sin и

$$\Psi_n = \Psi_{cm} - \Psi_{sm}$$

$$\Psi_l = \Psi_{cm} + \Psi_{sm}$$

Из выражений для скалярных магнитных потенциалов справа и слева от рассматриваемого паза следует:

$$\begin{aligned}\Psi_{cm} &= \frac{\Psi_n + \Psi_l}{2} \\ \Psi_{sm} &= \frac{\Psi_l - \Psi_n}{2} = \frac{i}{2}\end{aligned}\tag{11.1}$$

Потенциалы правого и левого зубцов выразим через потенциалы четного и нечетного полей:

$$\begin{aligned}\Psi_n &= \Psi_{cm} - \frac{i}{2} = \Psi_{cp} - \frac{i}{2} \\ \Psi_l &= \Psi_{cm} + \frac{i}{2} = \Psi_{cp} + \frac{i}{2}\end{aligned}$$

где

$$\Psi_{cp} = \Psi_{cm} = \frac{\Psi_n + \Psi_l}{2}$$

Подчеркнем важность такого способа рассмотрения поля в области паза. При произвольном сочетании потенциалов правого и левого зубцов поле в области раскрытия паза имеет сложный характер и исследовать его аналитическими методами не представляется возможным. В то же время каждое из полей, на которые раскладывается исходное поле, является симметричным и для их расчета могут быть получены аналитические выражения.

Поскольку конфигурация области каждой из задач удобна для анализа с помощью конформного преобразования Шварца-Кристоффеля, применим именно этот метод.

11.7. Поле в зазоре около паза прямоугольной формы с током

Напомним допущения:

- 1) задача линейна: $\mu_{стали} = \infty$;

- 2) противоположный сердечник – гладкий;
- 3) влияние соседних пазов может не учитываться: $b_z \geq 3\delta$;
- 4) радиусом кривизны пренебрегаем: $R \gg \delta$;
- 5) паз считаем бесконечно глубоким: $h_n > 1,5b_n$;
- 6) ток сосредоточен на дне паза: $h > 0,6b_u$.

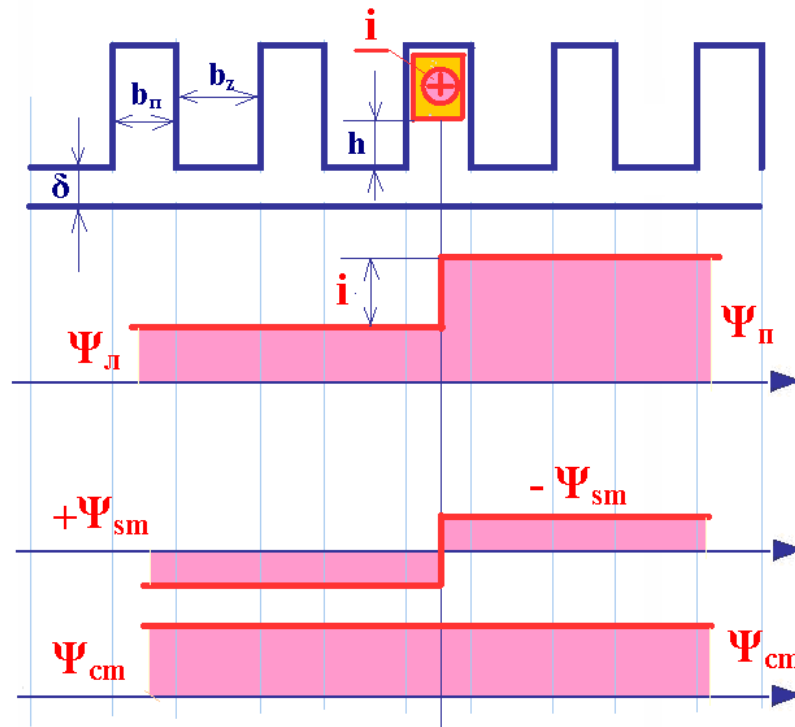


Рис. 11.16. Распределение скалярного потенциала на поверхности зубчатого сердечника для результирующего, нечетного и четного полей

Таким образом, нам предстоит решить две задачи:

- задачу о поле паза с током при равных по величине, но противоположных по знаку потенциалах соседних зубцов (нечетное поле);
- задачу о поле паза без тока при униполярной разности потенциалов между сердечниками.

Поскольку оба поля, которые мы должны рассмотреть, симметричны относительно оси паза, достаточно рассмотреть только половину области –

половину паза, а именно, вырожденный многоугольник $nqlm$, вершины q и m которого находятся в бесконечности.

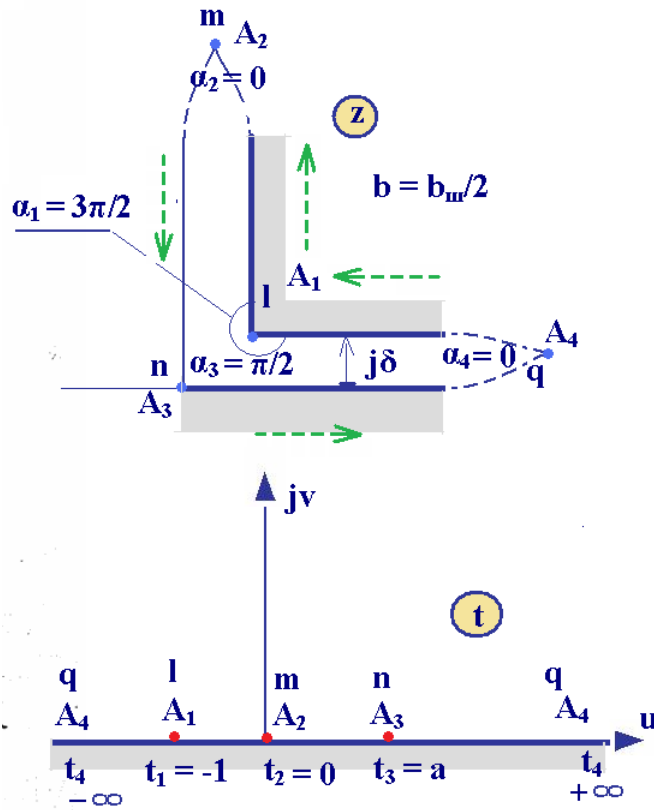


Рис. 11.17. Конформное преобразование области паза

Граничные условия

Нечетное поле:

– ось паза: mn $\psi = 0$

– поверхность гладкого сердечника: nq $\psi = 0$

– поверхность правого зубца: ql и lm $\psi = |\Psi_{sm}| = \frac{i}{2}$

Четное поле:

– ось паза: mn $\varphi = const$

– поверхность гладкого сердечника: nq $\psi = 0$

– поверхность правого зубца: ql и lm $\psi = \Psi_{cm}$

При конформном преобразовании области задачи координатами двух точек в плоскости t можно задаться: $t_1 = -1$, $t_2 = 0$, в то время как координата

третьей точки t_3 должна быть найдена при интегрировании уравнения Шварца-Кристоффеля.

Составим, как это мы уже делали раньше, таблицу соответствия.

k	Вершина	z_k	t_k	α_k	$\frac{\alpha_k}{\pi} - 1 = -\frac{\alpha'_k}{\pi}$
1	$A_1(l)$	$b + j\delta$	-1	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{1}{2}$
2	$A_2(m)$	$j\infty$	0	0	-1
3	$A_3(n)$	0	a	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Составим уравнение Шварца-Кристоффеля:

$$z' = \frac{dz}{dt} = S[t - (-1)]^{\frac{1}{2}}(t - 0)^{-1}(t - a)^{-\frac{1}{2}} = S(t + 1)^{\frac{1}{2}}t^{-1}(t - a)^{-\frac{1}{2}} = \quad (11.2)$$

$$= S \frac{1}{t} \sqrt{\frac{t+1}{t-a}} = \varphi(t)$$

Приращение в плоскости z :

$$dz = \left(\frac{dz}{dt}\right)dt = \varphi(t)dt = \frac{S}{t} \sqrt{\frac{t+1}{t-a}} dt = \frac{S}{t\eta} dt \quad (11.3)$$

$$\text{где } \eta = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}} \quad (11.4)$$

$$z = \int dz + K = \int \varphi(t)dt + K = \int \frac{S}{t} \sqrt{\frac{t+1}{t-a}} dt + K$$

Задача, таким образом, сводится к взятию последнего интеграла.

$\varphi(t)$ – иррациональная функция, содержащая иррациональное выражение $\sqrt{\frac{t+1}{t-a}}$. Интеграл от этой функции может быть приведен к интегралу

от рациональных функций с помощью подстановки (11.4) (см., например, справочник по высшей математике И.Н. Бронштейна и К.А. Семендяева).

Сделаем подстановку

$$\varphi(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{S}{t\eta},$$

получим

$$dz = \frac{Sdt}{t\eta} = \frac{S}{t\eta} \left(\frac{dt}{d\eta} \right) d\eta$$

Последнее выражение получено с учетом того, что координата t может быть выражена через η на основании (11.4): $t = \psi(\eta)$ и

$$dt = \left(\frac{dt}{d\eta} \right) d\eta \quad (11.5)$$

Таким образом, для нахождения функции преобразования координат $z = f(t)$ необходимо выразить t через η , найти производную $\left(\frac{dz}{d\eta} \right)$, подставить в (11.2) и проинтегрировать.

Из $\eta^2 = \frac{t-a}{t+1}$ получим

$$t = \frac{a + \eta^2}{1 - \eta^2} = \psi(\eta), \quad (11.6)$$

и

$$\frac{dt}{d\eta} = \frac{2\eta}{1-\eta^2} - \frac{(a+\eta^2)(-2\eta)}{(1-\eta^2)^2} = \frac{2\eta - 2\eta^3 + 2\eta a + 2\eta^3}{(1-\eta^2)^2} = \frac{2\eta(1+a)}{(1-\eta^2)^2} \quad (11.7)$$

После подстановки в уравнение Шварца-Кристоффеля

$$dz = \frac{S}{t\eta} \left(\frac{dt}{d\eta} \right) d\eta = \frac{S(1-\eta^3)2\eta(1+a)}{(a+\eta^2)\eta(1-\eta^2)^2} d\eta = 2S \frac{(1+a)}{(a+\eta^2)(1-\eta^2)} d\eta$$

Представим правильную рациональную дробь в виде суммы элементарных дробей, в которой коэффициенты A, B, C, D подлежат определению методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{(1+a)}{(a+\eta^2)(1-\eta^2)} = \frac{A+B\eta}{a+\eta^2} + \frac{C+D\eta}{1-\eta^2} = \frac{(A+aC) + \eta(B+aD) + \eta^2(C-A) + \eta^3(D-B)}{(a+\eta^2)(1-\eta^2)}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях η :

$$A + aC = 1 + a$$

$$B + aD = 0$$

$$-A + C = 0 \quad \rightarrow A = C$$

$$-B + D = 0 \quad \rightarrow B = D$$

Т.к. $a \neq -1$ (см. положение точек в плоскости t), из второго и четвертого равенств следует:

$$B(1+a) = 0 \quad \rightarrow B = 0 \text{ и } D = 0$$

Из первого и третьего равенств:

$$A(1+a) = 1+a \quad \rightarrow A = 1 \text{ и } C = 1$$

Тогда

$$\begin{aligned} z &= \int dz + K = 2S \int \left(\frac{A+B\eta}{a+\eta^2} + \frac{C+D\eta}{1-\eta^2} \right) d\eta + K = \\ &2S \int \left(\frac{1}{a+\eta^2} + \frac{1}{1-\eta^2} \right) d\eta + K = \\ &= 2S \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\eta}{\sqrt{a}} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right) \right) + K = f(t) \end{aligned} \quad (11.8)$$

(см., справочник по высшей математике И.Н. Бронштейна и К.А. Семендяева).

Требуется найти неизвестные a , S и K . Составим три уравнения типа $z_k = f(t_k)$ для вершин многоугольника:

– для вершины n (A_3):

$$\eta_3 = \sqrt{\frac{t_3 - a}{t_3 + 1}} = \sqrt{\frac{a - a}{a + 1}} = 0 \quad \text{и, т.к. } z_3 = 0,$$

$$0 = 2S(0 + 0) + K, \quad \text{откуда}$$

$$K = 0 \quad (11.9)$$

Второе уравнение составим для вершины q (A_4), расположенной в обеих плоскостях в бесконечности. Этот случай рассмотрен раньше (см. (10.10)) – для этой вершины составляется особое уравнение:

$$D_4 = j\delta = j\pi S,$$

Откуда

$$S = \frac{\delta}{\pi} \quad (11.10)$$

Третье уравнение составим для вершины m (A_2), заметив, что $z_2 = j\infty$ и $t_2 = 0$, а также то, что стороны угла, вершиной которого является точка m , параллельны (этот случай также рассмотрен ранее, координата точки в этом случае входит в уравнение преобразования):

$$\begin{aligned} D_v = D_2 = -b &= j\pi S \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq v}}^{N-1} (t_v - t_k)^{\frac{\alpha_k'}{\pi}} = \\ &= j\pi S (t_2 + 1)^{\frac{1}{2}} (t_2 - a)^{\frac{1}{2}} = j\pi S \frac{1}{\sqrt{-a}} \end{aligned}$$

Учитывая, что $t_v = t_2 = 0$, получим

$$-b = j\pi \frac{\delta}{\pi} \frac{1}{\sqrt{-a}},$$

откуда

$$a = \left(\frac{\delta}{b} \right)^2 \quad (11.11)$$

После подстановки найденных значений постоянных в уравнение Шварца-Кристоффеля получим окончательное выражение для функции преобразования координат:

$$z = \frac{2\delta}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\eta}{\sqrt{a}} \right) + \operatorname{arth}(\eta) \right] = f(t) \quad (11.12)$$

где

$$\eta = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}.$$

С учетом того, что

$$\operatorname{arth}(\eta) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta},$$

получим еще одно выражение для функции преобразования:

$$z = \frac{2\delta}{\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\eta}{\sqrt{a}} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} \right] = f(t) \quad (11.12a)$$

Выражение (11.12) позволяет перенести решение из плоскости t в плоскость z . Однако если нас интересуют значения величин поля в некоторой точке z , для того чтобы найти координаты сходственной ей точки в плоскости t , требуется знать преобразование $t \rightarrow z$. К сожалению, выразить переменную t через z из (11.12) аналитически не удастся и, таким образом, не удастся получить аналитическое выражение для требуемого преобразования. Однако для определения координаты t можно воспользоваться одним из известных методов последовательных приближений. Удобно также находить значение t , соответствующее некоторому конкретному z , прямой подстановкой (подбором) пробных значений t в (11.12), воспользовавшись, например, возможностями такой программы, как *MathCAD*.

Заметим также, что переменная $\eta = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}$ имеет физический смысл относительной магнитной проводимости зазора для нечетного поля, что будет показано в дальнейшем.

11.8. Определение нечетного поля паза с помощью преобразования Шварца-Кристоффеля

Рассмотрим случай $b > \delta$. Переменная a при этом оказывается меньшей единицы: $a = (\delta/b)^2 < 1$. Силовая линия поля, проходящая через точку n (см. рисунок), находящуюся на поверхности гладкого сердечника на оси па-

за, отделяет поле пазового рассеяния от поля взаимоиנדукции. При приближении к точкам q и m поле становится равномерным.

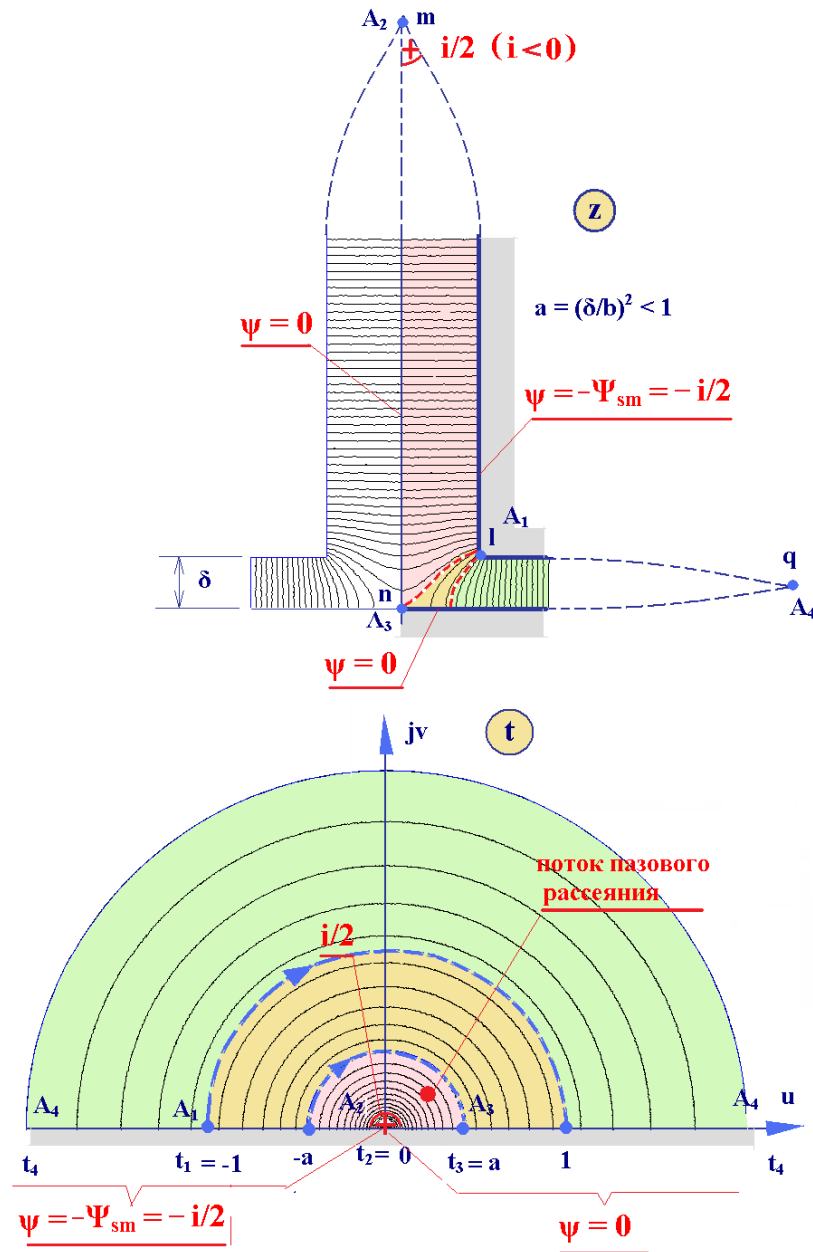


Рис. 11.18. Использование конформного преобразования для решения задачи о нечетном поле в области открытого паза

Распределение потенциала на границе области задачи переносится без изменения. Точку A_2 плоскости z , в которой задан ток $i/2$, отобразим в начало координат плоскости t .

В плоскости t задача сводится к нахождению поля, созданного током в вершине ферромагнитного угла, равного π . Выражение для комплексной потенциальной функции в этом случае известно:

$$w_t = \varphi + j\psi = \frac{(i/2)}{\pi} \ln(t) = \frac{\Psi_{sm}}{\pi} \ln(t).$$

Отсчет потоков (и потока пазового рассеяния, и потока взаимоиנדукции) ведется от точки с координатой $t_3 = a$. В плоскости t линии поля - окружности и расчет потоков не представляет труда.

Для переноса решения из плоскости t в плоскость z надо воспользоваться преобразованием

$$w_z = w_t(t) = w_t(F(z)) = w_z.$$

Функцию F можно определить, решая $z = f(t)$ относительно t .

11.9. Определение четного поля паза с помощью преобразования Шварца-Кристоффеля

11.9.1. Вспомогательная задача о поле двух намагниченных пластин

Прежде чем решить задачу о четном поле паза, решим вспомогательную задачу о поле двух намагниченных пластин. Результаты этого решения будут нами в дальнейшем использованы.

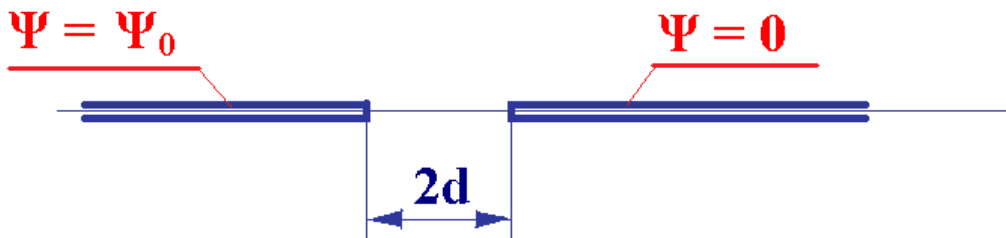


Рис. 11.19. Две намагниченные пластины

Координаты вершин:

$$A_1 \rightarrow z_1 = -d + j0$$

$$A_2 \rightarrow z_2 = -j\infty$$

$$A_3 \rightarrow z_3 = d + j0$$

$$A_4 \rightarrow z_4 = +j\infty$$

Напомним, что дополнительные углы находятся из условия, что в сумме с соответствующими им внутренними углами при вершинах они составляют π .

Из рисунка видно, что углы при вершинах A_1 и A_3 равны 2π :

$$\alpha_1 = 2\pi \text{ и } \alpha_3 = 2\pi,$$

тогда

$$\alpha_1' = \pi - 2\pi = -\pi \text{ и } \alpha_3' = \pi - 2\pi = -\pi.$$

Для вершин A_2 и A_4 дополнительные углы, т.е. углы, на которые изменяется при переходе через вершину направление обхода области задачи при движении по внешней границе, равны 2π :

$$\alpha_2' = 2\pi \text{ и } \alpha_4' = 2\pi, \text{ откуда } \alpha_2 = -\pi \text{ и } \alpha_4 = -\pi.$$

Теперь отобразим контур четырехугольника $A_1 A_2 A_3 A_4$ на вещественную ось в плоскости t .

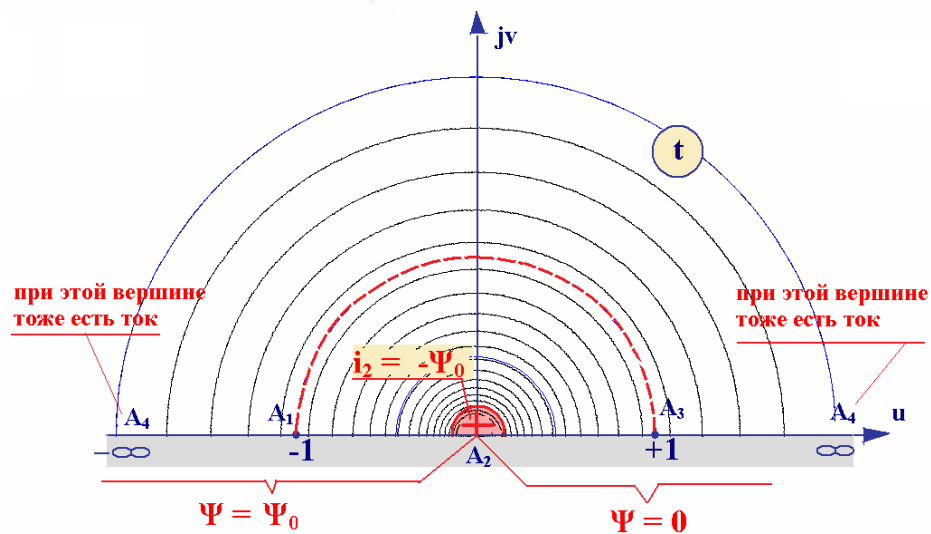


Рис. 11.21. Задача о двух намагниченных пластинах в преобразованной плоскости

Вершину A_4 отобразим в $\pm \infty$. Поскольку поле должно быть симметричным относительно оси A_2A_4 , отображение вершины A_2 расположим в начале координат плоскости t . Тогда отображения вершин A_1 и A_3 должны симметрично расположиться относительно начала координат – поместим их в точки с координатами $t_1 = -1$ и $t_3 = +1$.

Граничные условия (распределение потенциала) перенесем из плоскости z .

Составим таблицу соответствия координат.

Вершина	z_k	t_k	α_k	α'_k	$-\alpha'_k / \pi$
A_1	$-d+j0$	-1	2π	$-\pi$	1
A_2	$-j\infty$	0	$-\pi$	2π	-2
A_3	$d+j0$	$+1$	2π	$-\pi$	1

Дифференциальное уравнение Шварца-Кристоффеля:

$$z' = \frac{dz}{dt} = S \prod_{k=1}^{N-1} (t - t_k)^{-\frac{\alpha'_k}{\pi}}$$

или

$$z' = S(t+1)^1(t-1)^1 t^{-2} = S(t^2-1)t^{-2} = S\left(1 - \frac{1}{t^2}\right).$$

$A_1 \quad A_3 \quad A_2$

После интегрирования:

$$z = S \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt + K = S\left(t + \frac{1}{t}\right) + K = f(t) \quad (11.13)$$

Неизвестные постоянные определим из уравнений для вершин A_1 и A_3 :

$$z_1 = f(t_1) \quad \text{и} \quad z_3 = f(t_3) :$$

$$A_1 : \quad z_1 = -d = S(-1-1) + K = -2S + K$$

$$A_3: \quad z_3 = +d = S(1+1) + K = 2S + K,$$

откуда

$$0 = 2K \rightarrow K = 0 \quad (11.14)$$

$$2d = 4S + 0 \rightarrow S = \frac{d}{2} \quad (11.15)$$

Окончательно уравнение преобразования $z = f(t)$ принимает вид

$$z = \frac{d}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad \text{или} \quad z = \frac{d \cdot (t^2 + 1)}{2t} \quad (11.16)$$

Чтобы найти уравнение преобразования $t = F(z)$, нужно решить уравнение (11.6) относительно t .

$$2t \cdot z = d \cdot t^2 + d \quad \text{или} \quad d \cdot t^2 - 2z \cdot t + d = 0,$$

откуда

$$t = \frac{2z + \sqrt{4z^2 - 4d \cdot d}}{2d} = \frac{z}{d} + \sqrt{\left(\frac{z}{d} \right)^2 - 1} = F(z) \quad (11.17)$$

Плюс перед знаком радикала означает, что внутренняя область многоугольника отображается на **верхнюю** полуплоскость плоскости t .

Решение задачи в плоскости t нам известно – оно получено при решении задачи о поле тока, расположенного на ферромагнитной поверхности:

$$w(t) = \frac{\Psi_0}{\pi} \ln \left(\frac{t}{r_0} \right) = (\text{при } r_0 = 1) = \frac{\Psi_0}{\pi} \ln(t) .$$

Подставим в это выражение комплексной потенциальной функции найденное выражение для t :

$$w(t) = \frac{\Psi_0}{\pi} \ln \left[\frac{z}{d} + \sqrt{\left(\frac{z}{d} \right)^2 - 1} \right] = \frac{\Psi_0}{\pi} \mathbf{arch} \left(\frac{z}{d} \right) = w(z) \quad (11.18)$$

Линии поля (линии уровня функции потока: $\varphi = \mathbf{const}$) в плоскости t являются окружностями, в плоскости z они представляют собой эллипсы. Это можно показать следующим образом. Из уравнения

$$w(z) = \varphi(z) + j\psi(z) = \frac{\Psi_0}{\pi} \mathbf{arch} \left(\frac{z}{d} \right)$$

следует:

$$\operatorname{ch} \left[\frac{\varphi\pi}{\Psi_0} + j \frac{\psi\pi}{\Psi_0} \right] = \frac{z}{d} = \frac{1}{d} (x + jy).$$

Используя выражение гиперболической функции от комплексного аргумента (см. справочник по высшей математике), получим:

$$\operatorname{ch} \left(\frac{\varphi\pi}{\Psi_0} \right) \cos \left(\frac{\psi\pi}{\Psi_0} \right) + j \operatorname{sh} \left(\frac{\varphi\pi}{\Psi_0} \right) \sin \left(\frac{\psi\pi}{\Psi_0} \right) = \frac{x}{d} + j \frac{y}{d}.$$

Приравнивая коэффициенты при действительной и мнимой частях, получим для $\varphi = \varphi_0 = \mathbf{const}$ и $\psi = 0 \div \Psi_0 = \mathbf{var}$:

$$x = d \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{\varphi_0\pi}{\Psi_0} \right) \cos \left(\frac{\psi\pi}{\Psi_0} \right) = a_0 \cos(\gamma) \quad (11.19)$$

$$y = d \cdot \operatorname{sh} \left(\frac{\varphi_0\pi}{\Psi_0} \right) \sin \left(\frac{\psi\pi}{\Psi_0} \right) = b_0 \sin(\gamma) \quad , \quad (11.20)$$

где $\gamma = \frac{\psi}{\Psi_0} \pi = 0 \div \pi = \mathbf{var}$ – параметр.

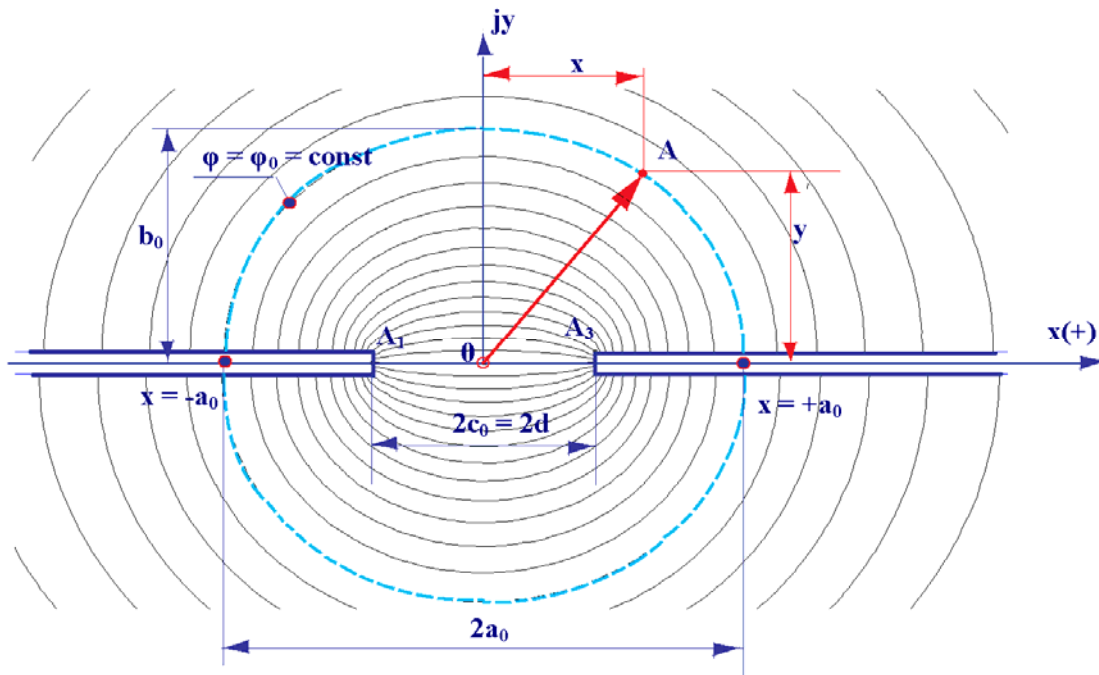


Рис. 11.22. Решение задачи о двух намагниченных пластинах

Полученные уравнения являются уравнениями эллипса в параметрической форме (γ - параметр).

$2a_0$ - большая ось эллипса, $2b_0$ - малая ось эллипса,

$$\begin{aligned} a_0 &= d \cdot \mathbf{ch} \left(\frac{\varphi_0 \pi}{\Psi_0} \right) \\ b_0 &= d \cdot \mathbf{sh} \left(\frac{\varphi_0 \pi}{\Psi_0} \right) \end{aligned} \quad (11.21)$$

При

$$\gamma = 0 \quad x = a_0 \quad y = 0$$

$$\gamma = \pi \quad x = -a_0 \quad y = 0$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} \quad x = 0 \quad y = b_0.$$

11.9.2. Определение четного поля паза

Четное поле является одной из двух составляющих полного поля паза. Это поле образовано токами всех пазов рассматриваемого зубчатого сердечника машины за исключением тока рассматриваемого паза. Иногда это поле называют полем паза без тока. Вторая составляющая полного поля – нечетное поле, может быть по аналогии названа полем паза с током (при отсутствии токов во всех остальных пазах сердечника).

Ранее было показано, что с помощью преобразования Шварца-Кристоффеля область полупаза может быть преобразована в верхнюю полуплоскость (а границы области – в вещественную ось) другой координатной плоскости t . После того, как граничные условия, заданные в плоскости z , будут перенесены на соответствующие участки границы в плоскости t и будет введена новая система координат $(u'v')$ с началом координат o' , расположенным на середине отрезка A_2A_3 , разделяющего участки границы с потенциалами $\psi = \Psi_c$ и $\psi = 0$, окажется, что эту задачу мы уже решали – это задача о поле двух намагниченных пластин с расстоянием между ними

$2d = a = (\delta/b)^2$. Таким образом, для комплексной плоскости t' решение известно (известна комплексная потенциальная функция):

$$w = \varphi + j\psi = \frac{\Psi_0}{\pi} \operatorname{arch}\left(\frac{z}{d}\right) = \frac{\Psi_c}{\pi} \operatorname{arch}\left[\frac{2t'}{a}\right] \quad (11.22)$$

В терминах задачи, сформулированной ранее для исходной плоскости z

В терминах задачи, сформулированной сейчас для плоскости t' (вторая преобразованная плоскость)

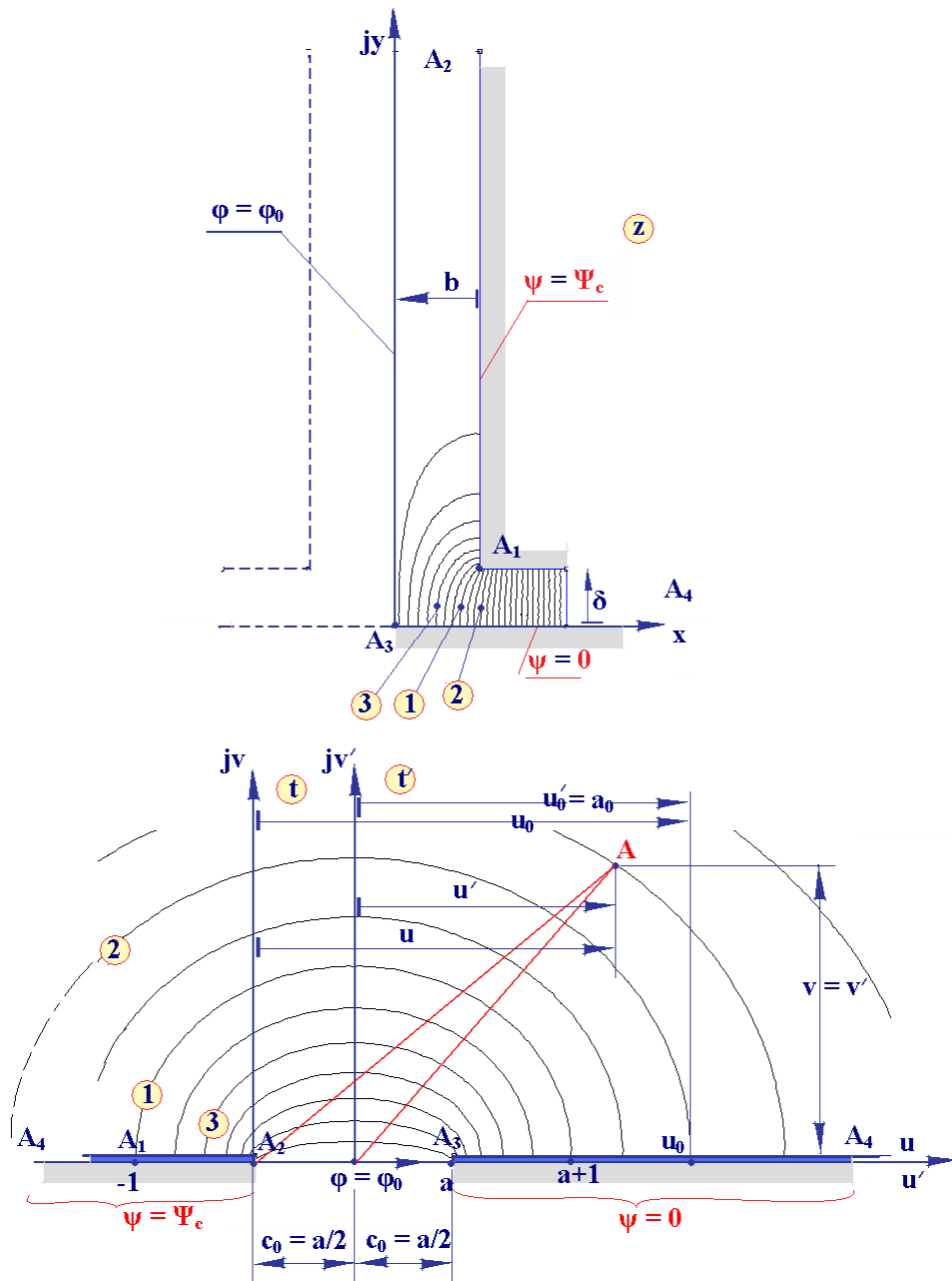


Рис. 11.23. Конформное преобразование задачи о четном поле

Теперь надо перенести решение в плоскость t , т.е. надо выразить t' через t

$$t' = u' + jv' = \left(t - \frac{a}{2} \right) = \left(u - \frac{a}{2} \right) + jv \quad (11.23)$$

$$w(t) = \varphi + j\psi = \frac{\Psi_c}{\pi} \mathbf{arch} \left[\frac{2}{a} \left(t - \frac{a}{2} \right) \right] \quad (11.24)$$

Как было показано применительно к полю двух намагниченных пластин, линии поля, описываемые такой потенциальной функцией, представляют собой эллипсы, симметричные относительно оси v' . Уравнения эллипсов в параметрической форме выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} u' &= u - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \mathbf{ch} \left(\frac{\varphi_0 \pi}{\Psi_c} \right) \mathbf{cos} \left(\frac{\varphi \pi}{\Psi_c} \right) = a_0 \mathbf{cos}(\gamma) \\ v' &= v - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \mathbf{sh} \left(\frac{\varphi_0 \pi}{\Psi_c} \right) \mathbf{sin} \left(\frac{\varphi \pi}{\Psi_c} \right) = b_0 \mathbf{sin}(\gamma) \end{aligned} \quad (11.25)$$

где $\varphi = \varphi_0 = \mathbf{const}$ - функция потока на рассматриваемой линии поля, a_0 и b_0 - большая и малая полуоси эллипса, $\gamma = \frac{\Psi \pi}{\Psi_c} = (0 \div \Psi_c) \frac{\pi}{\Psi_c} = (0 \div \pi)$ - параметр, принимающий значения в указанном диапазоне при перемещении по эллипсу.

Приведем еще формулу для вычисления расстояния от центра эллипса до его фокуса:

$$c_0 = \sqrt{a_0^2 - b_0^2} = \frac{a}{2} \sqrt{\mathbf{ch}^2 \left(\frac{\varphi_0 \pi}{\Psi_c} \right) - \mathbf{sh}^2 \left(\frac{\varphi_0 \pi}{\Psi_c} \right)} = \frac{a}{2} \quad (11.26)$$

11.9.3. Напряженность четного поля

Нас интересует напряженность поля в исходной плоскости z .

Ранее было получено выражение сопряженного комплекса напряженности поля через производную комплексной потенциальной функции:

$$H^* = j \frac{dw}{dz} \quad ,$$

откуда легко найти саму комплексную напряженность поля: $H = \left(H^* \right)^*$.

На основании известного выражения для комплексной потенциальной функции в плоскости t

$$w(t) = \varphi + j\psi = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \operatorname{arch}\left(\frac{2t'}{a}\right) = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \operatorname{arch}(t_1) = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \ln\left(t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1}\right) \quad (11.27)$$

где
$$t_1 = \frac{2t'}{a} = \frac{2}{a}\left(t - \frac{a}{2}\right) = \frac{2t}{a} - 1 \quad (11.28)$$

Как было замечено раньше, выразить t через z (т.е. найти преобразование $t = F(z)$, обратное по отношению к найденному) аналитически не удается. Это означает, что нельзя найти аналитическое выражение для функции $w_z = w(z)$. Но нам известно выражение для производной $z' = dz/dt = f(t)$ (уравнение Шварца-Кристоффеля). Тогда для определения H поступим следующим образом:

$$H^* = j \frac{dw}{dz} = j \frac{dw}{dt} \frac{dt}{dz} = j \frac{dw}{dt_1} \frac{dt_1}{dt} \frac{dt}{dz},$$

где

$$\frac{dw}{dt_1} = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t_1^2 - 1}} = \frac{\Psi_{cm}}{\pi(a/2)\sqrt{t(t-a)}} \quad (11.29)$$

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{a} - 1\right) = \frac{2}{a}$$

$$\frac{dt}{dz} = \left(\frac{dz}{dt}\right)^{-1} = \frac{t}{S} \sqrt{\frac{t-a}{t+1}},$$

где $S = \delta/\pi$ и $a = (\delta/b)^2$.

Окончательно получим:

$$H^* = j \frac{\Psi_{cm}}{\delta} \sqrt{\frac{t}{t+1}} = j \frac{\Psi_{cm} \beta_c}{\delta} \quad (11.30)$$

где
$$\beta_c = \sqrt{\frac{t}{t+1}}.$$

Получим таким же образом выражение для напряженности рассмотренного ранее нечетного поля. Задача о нечетном поле сводилась к задаче о поле тока в вершине преобразованной плоскости

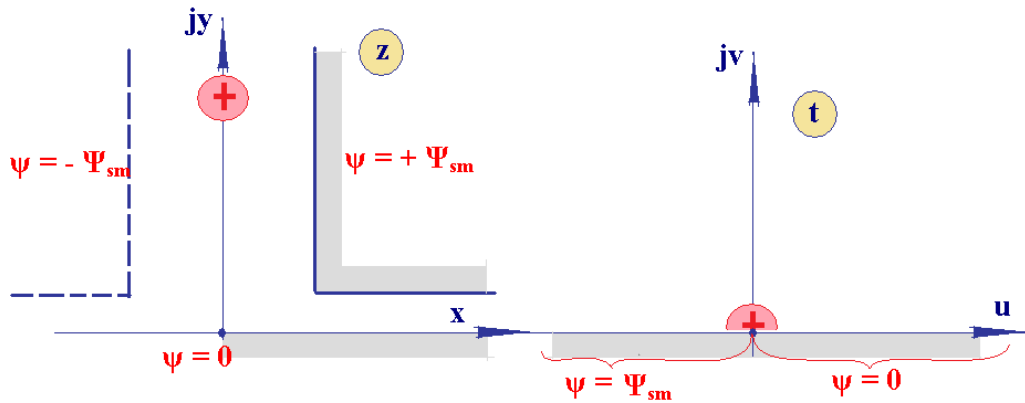


Рис. 11.24. Конформное преобразование задачи о нечетном поле

В плоскости t комплексная потенциальная функция известна:

$$w = \frac{\Psi_{sm}}{\pi} \ln(t).$$

Это значит, что можно найти напряженность поля в плоскости z следующим образом:

$$|H_s| = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{dw}{dt} \right| \left| \frac{dt}{dz} \right| = \left| \frac{\Psi_{sm}}{\delta} \frac{\sqrt{t-a}}{\sqrt{t+1}} \right| \quad (11.30a)$$

При выводе этого выражения использовано:

$$\left| \frac{dt}{dz} \right| = \frac{\pi t \sqrt{t-a}}{\delta \sqrt{t+1}} \quad \text{и} \quad \left| \frac{dw}{dt} \right| = \frac{\Psi_{sm}}{\pi} \frac{1}{t}.$$

Продолжим рассмотрение напряженности четного поля.

$$|H_c| = |H| = \left| j \frac{\Psi_{cm}}{\delta} \sqrt{\frac{t}{t+1}} \right| \quad (11.31)$$

$$\arg(H_c) = -\arg(H_c^*) = -\arg\left(\frac{j\Psi_{cm}}{\delta} \sqrt{\frac{t}{t+1}} \right) \quad (11.32)$$

$$H_c = \left(H_c^* \right)^* = -j \frac{\Psi_{cm}}{\delta} \beta_c^* \quad (11.33).$$

Посмотрим, в частности, какие значения принимает $\arg(H_c)$ на границе области – проверим, как согласуется полученная нами формула с «естественными» представлениями.

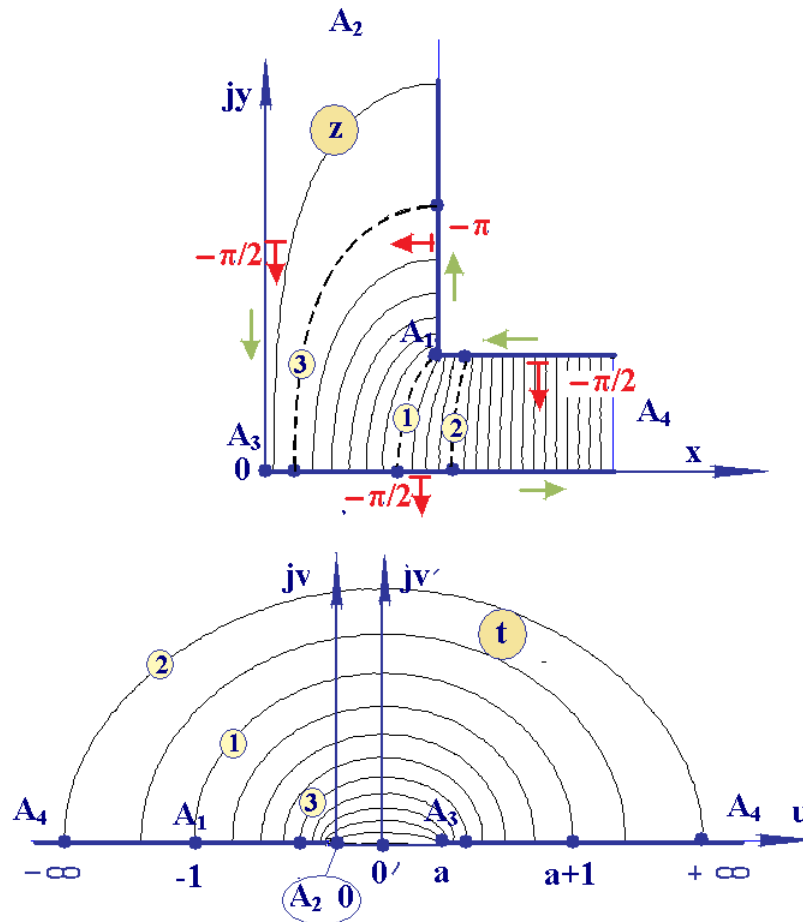


Рис. 11.25. Проверка значений аргумента комплекс напряженности четного поля на границах области задачи

- 1) на границе A_3A_4 : $(t > a) : \arg(H_c) = -\frac{\pi}{2}$
- 2) на границе A_2A_3 : $(t > 0) : \arg(H_c) = -\frac{\pi}{2}$
- 3) на границе A_1A_2 : $(-1 < t < 0) : \arg(H_c) = -\pi$
- 4) на границе A_4A_1 : $(-\infty < t < -1) : \arg(H_c) = -\frac{\pi}{2}$

Итак, для того чтобы перенести решение из плоскости t в плоскость z , надо задаться координатой t , затем с помощью преобразования $z = f(t)$ вычислить координаты точки (оригинала) в плоскости z , а значения модуля и аргумента комплекса напряженности поля в этой точке вычислить по формулам (11.30) – (11.33).

Теперь найдем распределение напряженности поля (а значит, и индукции) на поверхности гладкого сердечника. Забегая вперед, скажем, что результаты будут использованы для определения одного из важнейших коэффициентов в теории электрических машин – коэффициента воздушного зазора k_δ (или коэффициента Картера K_c). Участку A_3A_4 на оси x соответствуют значения $t > a$ на оси u . Аргумент напряженности на этом интервале постоянен и равен $(-\pi/2)$ и нормальная составляющая напряженности равна ее модулю: $|H_{n(A_3A_4)}| = |H_c|$.

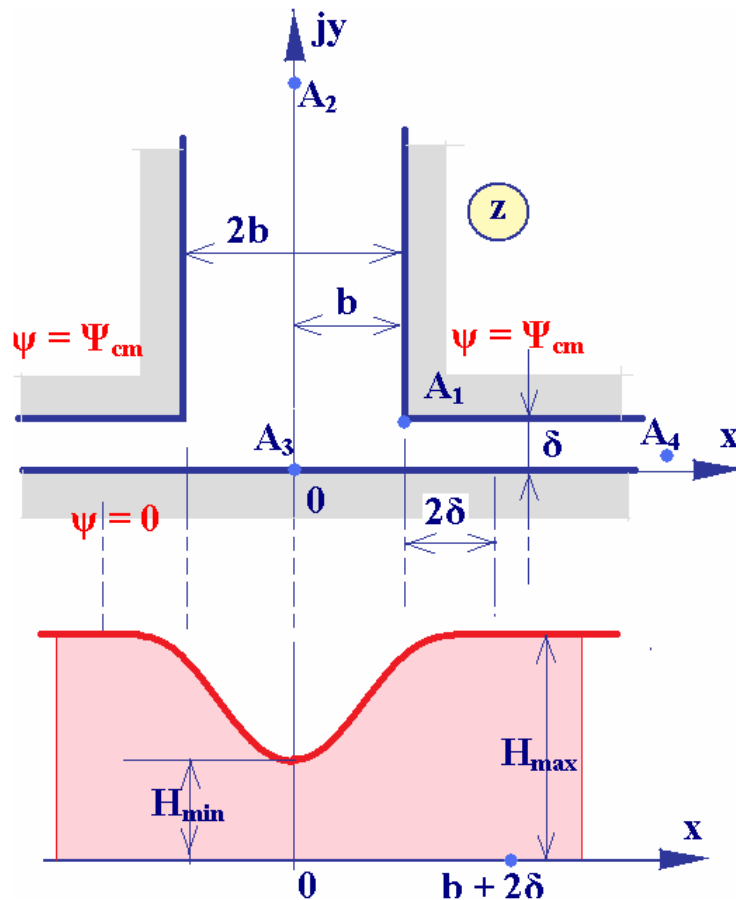


Рис. 11.26. К определению коэффициента Картера

Построить распределение напряженности на поверхности гладкого сердечника можно следующим образом.

1. зададимся β_c в диапазоне от $\sqrt{\frac{a}{a+1}}$ до 1;

2. находим t :

$$\beta_c = \sqrt{\frac{t}{t+1}} \rightarrow \beta_c^2 = \frac{t}{t+1} \rightarrow \beta_c^2 t + \beta_c - t = 0 \rightarrow t = \frac{\beta_c^2}{1 - \beta_c^2};$$

3. вычисляем

$$\eta = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}$$

4. находим координату x , решая уравнение преобразования:

$$x = z = \frac{2}{\delta} \left[\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\eta}{\sqrt{a}} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right) \right]$$

5. находим для точки с координатой x значение напряженности поля:

$$|H_c| = |H_n| = \left| \frac{\Psi_{cm}}{\delta} \sqrt{\frac{t}{t+1}} \right| = f(x).$$

Распределение $H_c(x)$ симметрично относительно оси координат.

Характерные точки зависимости $H_c(x)$:

$$\text{т. } A_3: x = 0; \quad t = a \quad |H_c| = |H_{\min}| = \left| \frac{\Psi_{cm}}{\delta} \sqrt{\frac{a}{a+1}} \right|, \quad \text{где } a = (\delta/b)^2$$

$$\text{т. } A_4: x = \infty; \quad t = \infty \quad |H_c| = |H_{\max}| = \left| \frac{\Psi_{cm}}{\delta} \right|,$$

$$\text{т. } x = b + 2\delta; \quad |H_c|_{(b+2\delta)} = 0.9995 |H_{\max}|,$$

Из последнего выражения следует, что влияние паза на поле в зазоре быстро уменьшается под зубцом.

Следующий важный шаг – определение магнитных проводимостей.

Здесь важно заметить, что магнитная проводимость некоторого участка магнитной цепи зависит не только от его формы и свойств среды, но и от

граничных условий, заданных (или возникающих) на его границах. Это же, впрочем, относится и к электрической проводимости (электрическому сопротивлению). Приведенный ниже рисунок поясняет это утверждение: в зависимости от формы электродов (отрезки полос слева и точечные справа) сопротивления одного и того же участка среды различны (справа – больше).

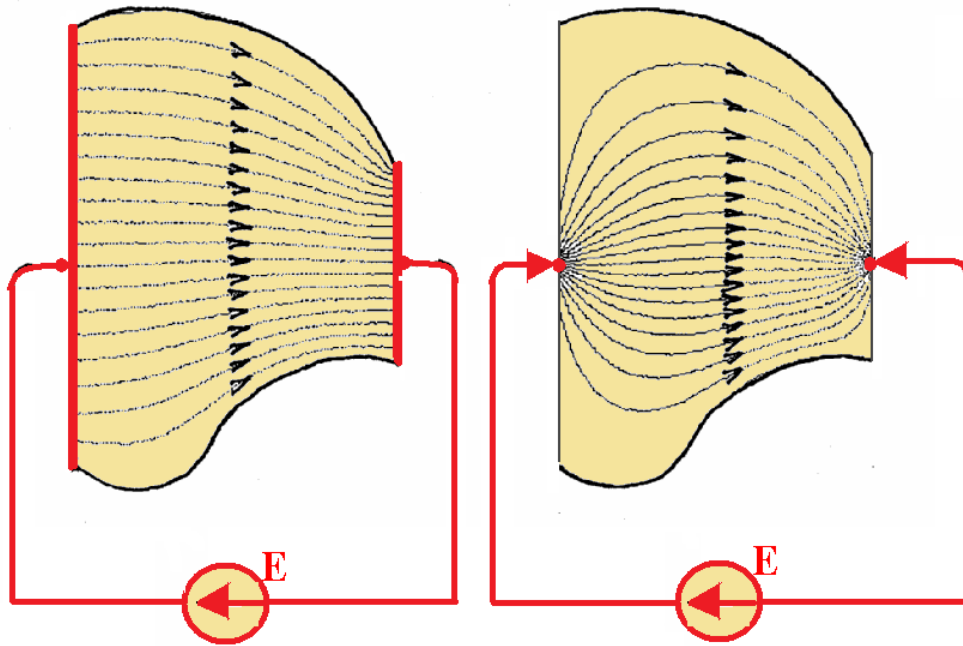


Рис. 11.27. Зависимость электрического сопротивления тела от граничных условий

Домашнее задание. Подтвердить утверждение о том, что проводимость участка среды зависит от граничных условий с помощью программы *FEMM*.

11.10. Удельная магнитная проводимость зазора для четного и нечетного полей и ее определение в относительной форме

Определение (для точки). Удельная магнитная проводимость численно совпадает с напряженностью магнитного поля на поверхности гладкого сердечника, созданного *единичной* разностью скалярных магнитных потенциалов:

$$\text{— для четного поля : } \lambda_c = \frac{H_{c(y=0)}}{\Psi_{cm}} = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{t}{t+1}}, \quad \text{М}^{-1} \quad (11.36)$$

для нечетного поля:
$$\lambda_s = \frac{H_{s(y=0)}}{\Psi_{sm}} = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}, \quad \text{м}^{-1} \quad (11.37)$$

где $a < t = u < \infty$; $0 < x < \infty$, $y = 0$.

Введем еще понятие **относительной** удельной магнитной проводимости, приняв за базовое значение максимальную удельную магнитная про- ницаемость:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{\delta} \quad (11.38)$$

Заметим, что

$$\lambda_{c.\max} = \lambda_{s.\max} = \lambda_{c,t \rightarrow \infty} = \lambda_{s,t \rightarrow \infty} = \lambda_{\max} = \frac{1}{\delta}$$

и

$$\begin{aligned} \beta_c &= \frac{\lambda_c}{\lambda_{\max}} = \sqrt{\frac{t}{t+1}} \\ \beta_s &= \frac{\lambda_s}{\lambda_{\max}} = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}} = \eta \end{aligned} \quad (11.39)$$

Характерные значения функций β_c и β_s , представляющих собой от- носительные удельные магнитные проводимости четного и нечетного по- лей:

$$\beta_{c.\max} = \beta_{s.\max} = 1, \quad \beta_{c.\min} = \sqrt{\frac{a}{a+1}} \quad (11.40)$$

где $a = (\delta/b)^2$.

Таким образом, относительная удельная магнитная проводимость для нечетного поля оказалась равной той вспомогательной переменной, которую мы ввели при интегрировании уравнения преобразования.

Само уравнение преобразования мы можем теперь записать для $y = 0$ относительно функции β_s :

$$z = x + jy = x = \frac{2\delta}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta_s}{\sqrt{a}} \right) + \operatorname{arth}(\beta_s) \right) \quad (11.41)$$

или

$$z = \frac{2\delta}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta_s}{\sqrt{a}} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta_s}{1 - \beta_s} \right) \right) \quad (11.41a)$$

где $\eta = \beta_s = 0 \div 1$.

Графики функций β_c и β_s :

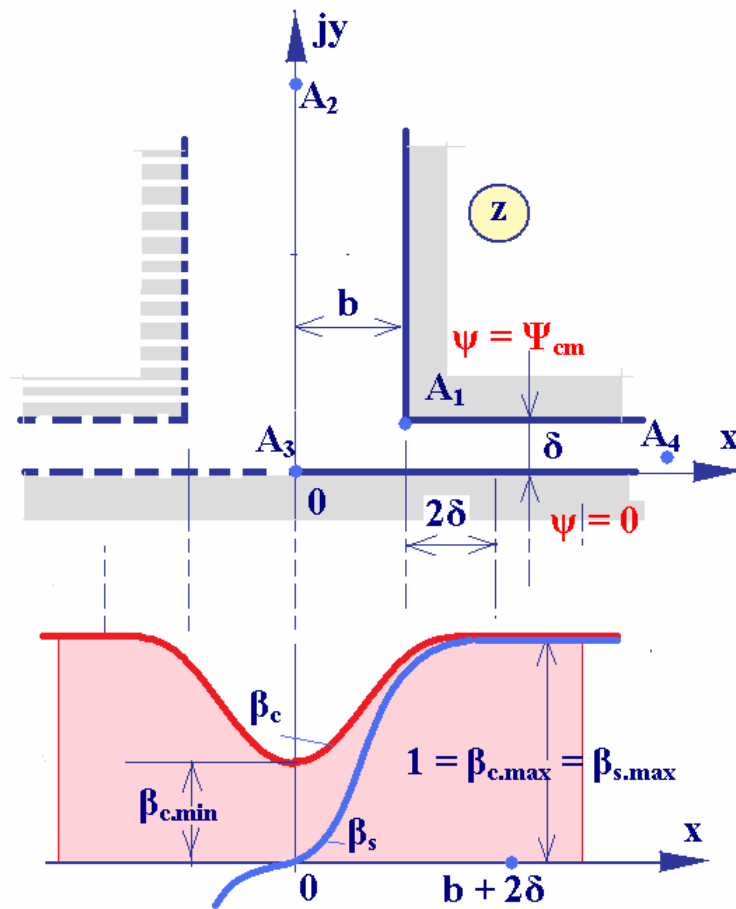


Рис. 11-28. Относительные удельные проводимости для четного и нечетного полей

С помощью этих графиков можно определить напряженность (и индукцию) поля на поверхности гладкого сердечника:

$$\begin{aligned} H_c &= \beta_c \lambda_{\max} \Psi_{cm} = \lambda_c \Psi_{cm}; & B_c &= \mu_0 H_c \\ H_s &= \beta_s \lambda_{\max} \Psi_{sm} = \lambda_s \Psi_{sm}; & B_s &= \mu_0 H_s \end{aligned} \quad (11.42)$$

Итак, значение функции β_s для точки с координатой t вычисляется непосредственно:

$$\beta_s = \eta = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}};$$

а значение β_c можно найти, выразив эту функцию через β_s :

$$\beta_c = \sqrt{\frac{t}{t+1}} \rightarrow \beta_c^2(t+1) = t \rightarrow \beta_c^2 t - t = -\beta_c^2 \rightarrow t = \frac{\beta_c^2}{1-\beta_c^2},$$

откуда

$$\beta_c = \sqrt{\frac{\beta_s^2 + a}{1+a}} \quad (11.43)$$

и

$$\beta_s = \sqrt{\beta_c^2(1+a) - a} \quad (11.44)$$

11.11. Как просто построить графики функций β_c и β_s

Поскольку на поверхности гладкого сердечника $z = x + jy = x$,

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\delta}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\beta_s}{\sqrt{a}} \right) + \operatorname{arth}(\beta_s) \right) = \\ &= \frac{2\delta}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\beta_c^2(1+a) - a}{a}} \right) + \operatorname{arth} \left(\sqrt{\beta_c^2(1+a) - a} \right) \right) \end{aligned} \quad (11.45)$$

Порядок построения:

1. задаемся β_s (в диапазоне $0 \div 1$);
2. находим β_c ;
3. находим x .

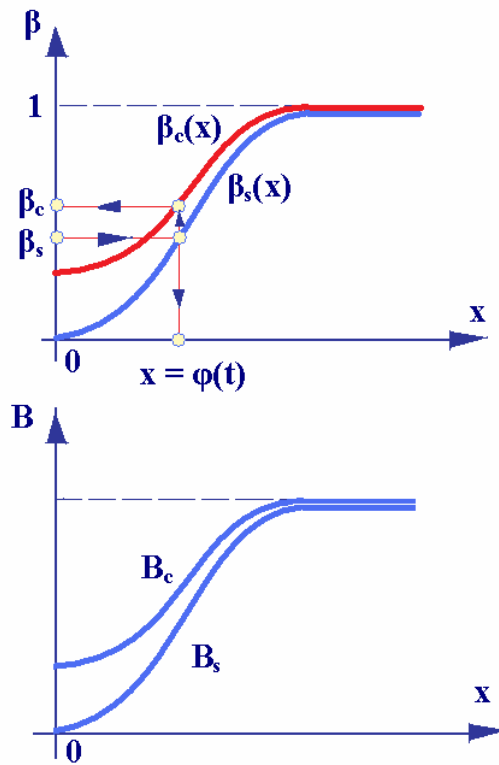
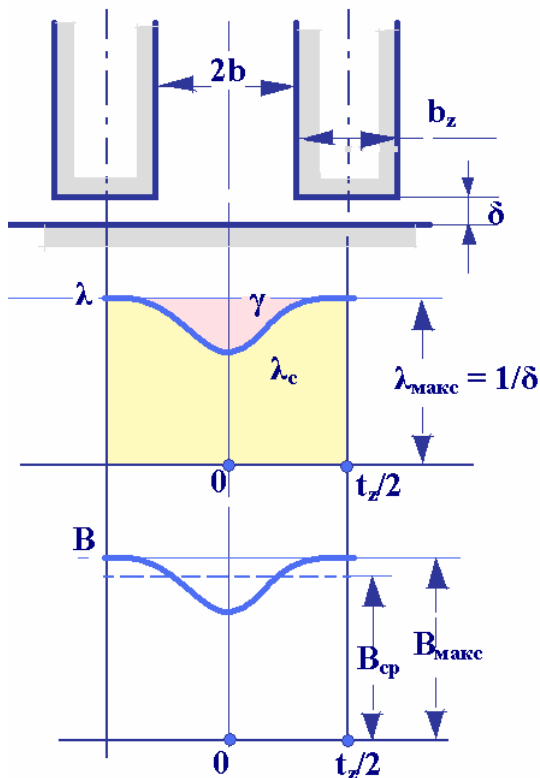


Рис. 11-29. Построение графиков $\beta_c(x)$ и $\beta_s(x)$

Заметим, что если $\Psi_{cm} = \Psi_{sm}$, то ин-

дукции B_c и B_s под зубцом одинаковы.



11.12. Магнитные проводимости зубцового деления для четного и нечетного полей

Рис. 11-30. К определению магнитной проводимости для четного поля паза

Рассмотрим четное поле.

Поле рассматривается в пределах зубцового деления. При $b_z \geq 3\delta$

влиянием соседних пазов можно пренебречь. Если бы паза не было, график

удельной проводимости λ_c представлял бы собой горизонтальную прямую $\lambda_c(x) = \lambda_{\max} = (1/\delta)$. Влияние паза сказывается в уменьшении λ_c на участке напротив паза.

Определим магнитную проводимость пазового деления для четного поля следующим образом:

$$\Lambda_c = 2 \int_0^{t_z/2} \lambda_c dx \quad (11.46)$$

$$\Lambda_{c,\max} = 2 \int_0^{t_z/2} \lambda_{\max} dx = t_z \lambda_{\max} = t_z \frac{1}{\delta} \quad (11.47)$$

Заметим, что при таком определении магнитная проводимость является *безразмерной* величиной. Нетрудно показать, что при таком определении Λ_c поток четного (униполярного) поля на зубцовом делении $\Phi_{z.c}$ равен:

$$\Phi_{z.c} = F \cdot \mu_0 l_\delta \cdot \Lambda_c,$$

где $F = \Psi_{cm} - \text{МДС зазора}$, равная разности скалярных магнитных потенциалов между сердечниками, l_δ – размер по «глубине» поля (размер по оси z , перпендикулярной плоскости рисунка). Это выражение для потока не соответствует привычной формуле $\Phi = F \cdot \Lambda$, в которой магнитная проводимость предполагается размерной величиной.

Уменьшение проводимости, обусловленное влиянием паза при $b_z \geq 3\delta$:

$$\gamma = \Lambda_{c,\max} - \Lambda_c = 2 \int_0^{t_z/2} (\lambda_{\max} - \lambda_c) dx = 2 \int_0^{\infty} (\lambda_{\max} - \lambda_c) dx \quad .$$

Здесь удобно заменить предел интегрирования, взяв вместо $t_z/2$ бесконечность, поскольку при $x = \infty$ $\lambda_c = \lambda_{\max}$. Для интегрирования произведем замену переменных:

Учитывая, что при движении по вещественной оси $dx = dz$, получим из уравнения Шварца-Кристоффеля

$$dx = dz = \frac{\delta}{\pi t} \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t-a}} dt = z' dt \quad (11.48)$$

Поскольку $\lambda_{\max} = \frac{1}{\delta}$ и $\lambda_c = \frac{\sqrt{t}}{\delta\sqrt{t+1}}$,

$$\begin{aligned} \gamma &= 2 \int_{x=0}^{x=\infty} (\lambda_{\max} - \lambda_c) dx = 2 \int_{t=a}^{t=\infty} (\lambda_{\max} - \lambda_c) z' dt = \\ &= 2 \int_{t=a}^{t=\infty} \frac{1}{\delta} \left(1 - \sqrt{\frac{t}{t+1}} \right) \frac{\delta}{\pi t} \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t-a}} dt = \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right) - \ln \left(\sqrt{1 + \frac{1}{a}} \right) \right) \end{aligned} \quad (11.49)$$

Найдя уменьшение проводимости зубцового деления, обусловленное наличием паза, определим проводимость для четного поля:

$$\Lambda_c = \Lambda_{\max} - \gamma = \frac{t_z}{\delta} - \gamma \quad (11.50)$$

Таким образом, мы можем определить коэффициент воздушного зазора, учитывающий влияние пазов на магнитную проводимость зазора. Впервые эта задача была решена Картером (*Carter, 1902*). Коэффициент Картера (так часто называют этот важный коэффициент) показывает, во сколько раз при униполярном намагничивании проводимость на участке зубцового деления при отсутствии паза больше, чем проводимость при наличии паза.

$$k_\delta = \frac{\Lambda_{c,\max}}{\Lambda_c} \quad (11.51)$$

Из определения магнитной проводимости для четного поля (как интеграла от удельной проводимости) следует также, что

$$k_\delta = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{cp}} = \frac{B_{\max}}{B_{cp}} \quad (11.52)$$

Обычно коэффициент зазора вычисляют по заданным размерам зубцовой зоны:

$$k_\delta = \frac{t_z}{t_z - \gamma} \quad (11.53)$$

и

$$\Lambda_c = \frac{\Lambda_{c.\max}}{k_\delta} = \frac{t_z}{\delta \cdot k_\delta} = \frac{t_z}{\delta'}$$

где δ' - расчетный (*равномерный !*) зазор. Если реальный зубчатый зазор заменить расчетным $\delta' = k_\delta \delta$, *убрав при этом паз*, то магнитный поток на зубцовом делении при той же МДС *не изменится*.

Таким образом, сделан очень важный шаг на пути построения общей теории электрических машин – получена возможность *обоснованной* замены зубчатого зазора сложной формы простым гладким (равномерным) зазором.

При достаточно широких раскрытиях пазов: $(b_u / \delta) = (2b / \delta) \geq 1$, уменьшение магнитной проводимости можно вычислять по приближенной формуле

$$\gamma \approx \frac{\left(\frac{b_u}{\delta}\right)^2}{5 + \left(\frac{b_u}{\delta}\right)} \quad (11.54)$$

При проектировании эту формулу часто используют и при $(b_u / \delta) < 1$, несмотря на то, что γ может рассчитываться с погрешностью до 200%. Если при этом $\gamma \delta \ll t_z$, ошибка в самом коэффициенте зазора оказывается не большой.

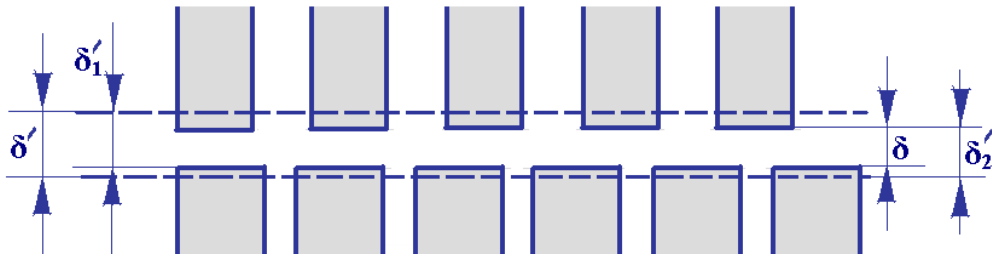


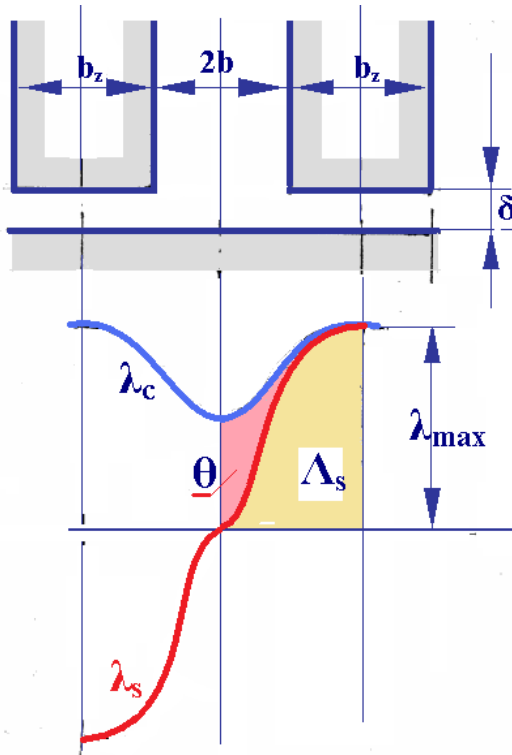
Рис. 11-31. Приведение воздушного зазора при двусторонней зубчатости к гладкому с помощью частичных коэффициентов Картера

При двусторонней зубчатости коэффициент зазора, как было показано А.И. Вольдеком, может быть рассчитан как произведение коэффициентов зазора каждого из сердечников, найденных при односторонней зубчатости (т.е. в предположении, что противоположный сердечник – гладкий):

$$k_{\delta} = k_{\delta 1} \cdot k_{\delta 2} \quad (11.55)$$

11.13. Магнитная проводимость на зубцовом делении при нечетном поле и разностная проводимость Θ

Магнитная проводимость для нечетного поля определяется для половины зубцового деления:



$$\Lambda_s = \int_0^{t_z/2} \lambda_s dx \quad (11.56)$$

Найдем аналитическое выражение для разности магнитной проводимости для четного поля (также вычисленной на половине зубцового деления) и магнитной проводимости для нечетного поля:

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{\Lambda_c}{2} - \Lambda_s = \\ &= \int_0^{t_z/2} (\lambda_c - \lambda_s) dx \end{aligned} \quad (11.57)$$

Рис. 11-31. Приведение воздушного зазора при двусторонней зубчатости к гладкому с помощью частичных коэффициентов Картера

Проводимость для нечетного поля выразим через проводимость для четного поля и разностную проводимость:

$$\Lambda_s = \int_0^{t_z/2} (\lambda_c) dx - \int_0^{t_z/2} (\lambda_c - \lambda_s) dx = \frac{\Lambda_c}{2} - \Theta \quad (11.58)$$

Найдем Θ .

$$\Theta = \frac{\Lambda_c}{2} - \Lambda_s = \int_0^{t_z/2} (\lambda_c - \lambda_s) dx = \frac{1}{\Psi_1} \int_{x=0}^{x=t_z/2 \text{ или } \infty} (H_c - H_s) dx = \frac{\Phi_c - \Phi_s}{\Psi_1} \quad (11.59)$$

Здесь использовано:

$$\lambda_c = \frac{H_c}{\Psi_{cm}}, \quad \lambda_s = \frac{H_s}{\Psi_{sm}}$$

и

$$\Phi_c = \int_0^{\infty} H_c dx \quad (11.60)$$

$$\Phi_s = \int_0^{\infty} H_s dx \quad (11.61)$$

Введенные таким образом функции φ_c и φ_s можно назвать потоками (вектора) напряженности по аналогии с потоками (вектора) индукции, т.е. с магнитными потоками в обычном понимании.

Магнитный поток на единицу длины по оси z :

$$\Phi_s = \int_0^{t_z/2} B_s dx = \mu_0 \int_0^{t_z/2} H_s dx = \mu_0 \Psi_{sm} \int_0^{t_z/2} \lambda_s dx = \mu_0 \Psi_{sm} \Lambda_s \quad (11.62)$$

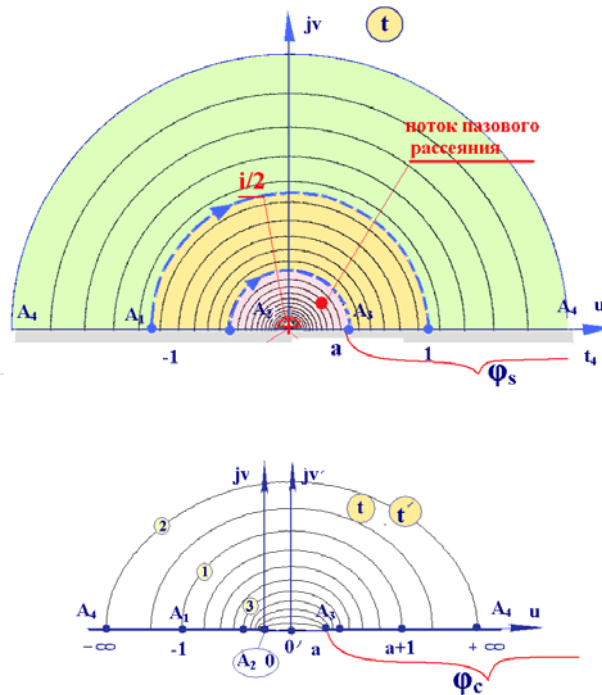


Рис. 11-32. Отсчет функции потока в преобразованной плоскости для нечетного (вверху) и четного (внизу) полей

Будем вести отсчет потоков φ_c и φ_s от оси паза, т.е. от точки с координатой $x = 0$: $\varphi_{c(x=0)} = \varphi_{s(x=0)} = 0$. В плоскости t эта точка отображается точкой с координатой a .

11.14. Комплексная потенциальная функция в плоскости t

Для точек, расположенных на вещественной оси в плоскости z , комплексная потенциальная функция содержит только вещественную часть, т.к. на поверхности гладкого сердечника скалярный магнитный потенциал равен нулю:

$$w_s = \frac{\Psi_{sm}}{\pi} \ln\left(\frac{t}{a}\right) = \varphi_s + j\psi_s = \varphi_s \quad (11.63)$$

$$w_c = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \operatorname{arch}(t_1) = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \ln\left(t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1}\right) = \varphi_c + j\psi_c = \varphi_c,$$

где $t_1 = \frac{2t}{a} - 1$.

Заметим, что в начале отсчета потока, т.е. при $t = a$, $t_1 = 1$ и, т.к. $\operatorname{arch}(1) = 0$, $w_{c(t=a)} = \varphi_{c(t=a)} = 0$.

Итак, поскольку $\varphi_c = w_c$ и $\varphi_s = w_s$,

$$\Theta = \frac{\varphi_c - \varphi_s}{\Psi_1} \Bigg|_{(x=t_z/2)} = \frac{\varphi_c - \varphi_s}{\Psi_1} \Bigg|_{\substack{x \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} = \frac{w_c - w_s}{\Psi_1} \Bigg|_{(t \rightarrow \infty)}$$

и после подстановки найденных ранее выражений для w_c и w_s :

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{\pi} \ln\left(t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1}\right) - \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{t}{a}\right) \Bigg|_{t \rightarrow \infty} = \\ &= \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{\left(\frac{2t}{a} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{2t}{a} - 1\right)^2 - 1}}{\frac{t}{a}}\right) \Bigg|_{t \rightarrow \infty} = \\ &= \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{2+2}{1}\right) = \frac{\ln(4)}{\pi} = 0,44127 \end{aligned}$$

Выражение для разностной проводимости Θ , *не зависящей от характерных размеров зубцовой зоны* (зазора и раскрытия паза), было получено Т.Г. Сорокером. Эта величина играет важную роль в построении теории метода зубцовых контуров.

$$\Theta = \frac{\ln 4}{\pi} = 0,44127 \quad (11.64)$$

и

$$\Lambda_s = \frac{\Lambda_c}{2} - \Theta = \frac{t_z}{2\delta \cdot k_\delta} - \frac{\ln 4}{\pi} \quad (11.65)$$

Ранее мы показали, что введя понятия четного и нечетного полей, мы можем свести решение задачи расчета несимметричного (относительно оси паза) поля к расчету двух простых симметричных полей, аналитические формулы для расчета которых нами найдены. Теперь мы получили формулы для *интегральных* величин – магнитных проводимостей. Оказалось, во-первых, что эти формулы просты, и, во-вторых, что проводимости Λ_c и Λ_s при любом отношении (δ/b) (но при $b_z \geq 3\delta$) отличаются на постоянную $\Theta = \frac{\ln 4}{\pi} = 0,44127$.

Итак, в сущности, *аналитически* решена (при допущении $\mu_{стали} = \infty$) задача о распределении поля в воздушном зазоре. Показано, кроме того, что для расчета этого поля достаточно знать распределение индукции в зазоре при униполярном намагничивании.

Полученное решение дает возможность провести гармонический анализ поля в зазоре, найти магнитные потоки и потокосцепления обмоток.

Приведенный ниже рисунок показывает, что разностные проводимости не зависят от отношения размеров зубцовой зоны.

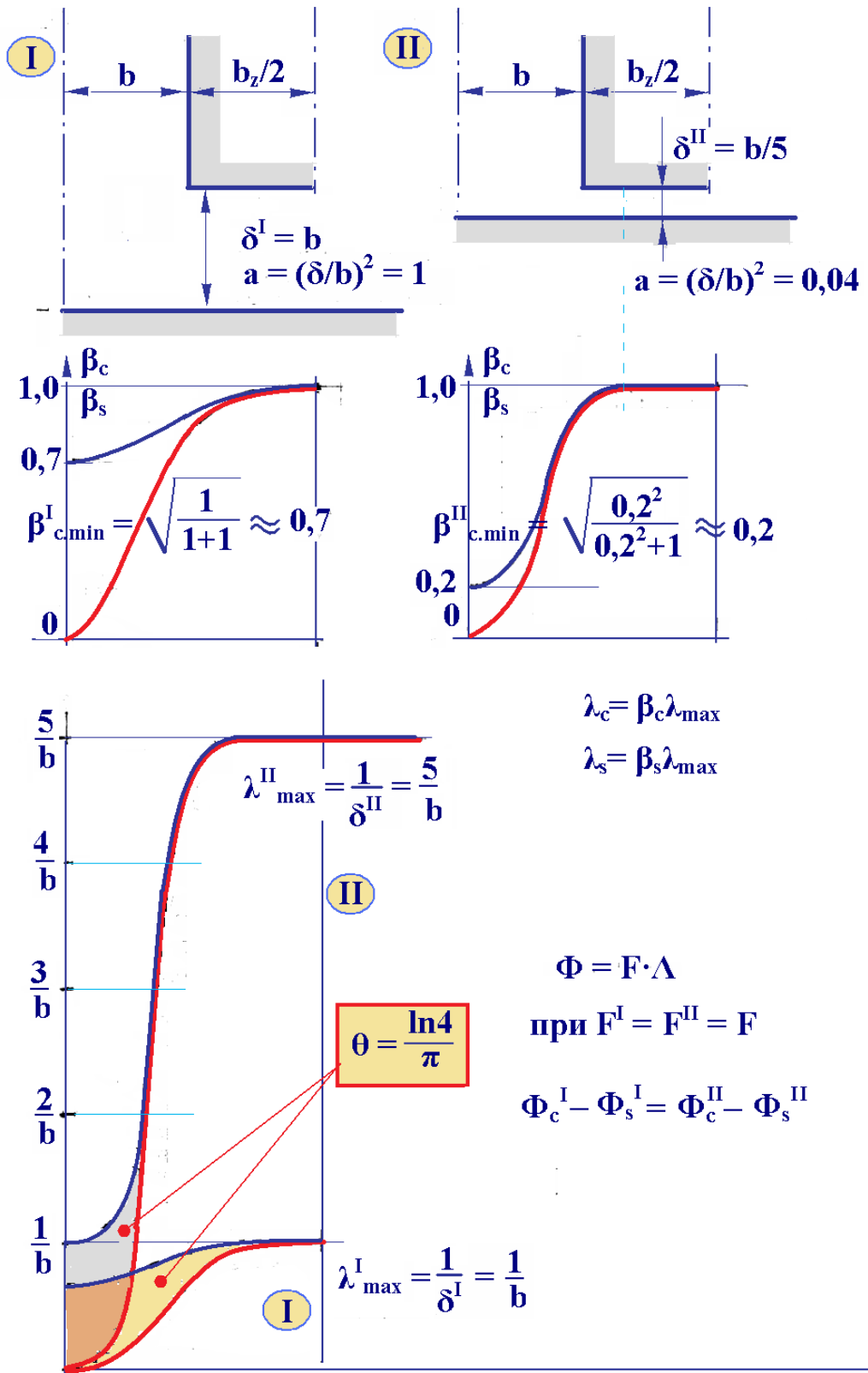


Рис. 11-33. Графическое изображение разностной магнитной проводимости θ при различных соотношениях зазора и раскрытия паза

11.15. Магнитное поле зубцового контура

Зубцовый контур – базовое понятие метода расчета электрических машин, разработанного на кафедре электромеханики МЭИ под руководством профессора А.В. Иванова-Смоленского. Этот метод, получивший вначале название метода проводимостей зубцовых контуров, а в дальнейшем универсального метода, подробно описан в книге «Универсальный метод расчета электромагнитных процессов в электрических машинах», Москва, Энергоатомиздат, 1986.

Основные положения метода зубцовых контуров, определяющие его эффективность и универсальность, состоят в следующем: 1) электрическая машина может быть представлена в виде совокупности относительно простых элементов, свойства каждого из которых находятся в результате решения простых полевых задач; 2) использование так называемых особых граничных условий при определении свойств зубцовых контуров позволяет сформировать схему замещения магнитной цепи, содержащую относительно мало узлов; матрица коэффициентов системы уравнений, описывающей эту схему замещения, содержит много нулевых элементов, что позволяет существенно сократить время, необходимое для расчета схемы замещения; 3) по токам и потокосцеплениям, найденным при расчете схемы замещения, содержащей элементы (проводимости), определенные при особых (т.е. *не естественных*) граничных условиях, могут быть найдены *реальные* (т.е. «естественные») величины. На приведенном ниже рисунке показана часть графа схемы замещения магнитной цепи электрической машины с двусторонней зубчатостью воздушного зазора и соответствующий фрагмент самой схемы замещения (рисунок приведен в упомянутой книге, на стр. 98). Обратите внимание на то, что в представленной схеме замещения каждый зубец имеет индуктивную связь не с каждым из остальных зубцов, как это имеет место в действительности, а только с ближайшими к нему зубцами.

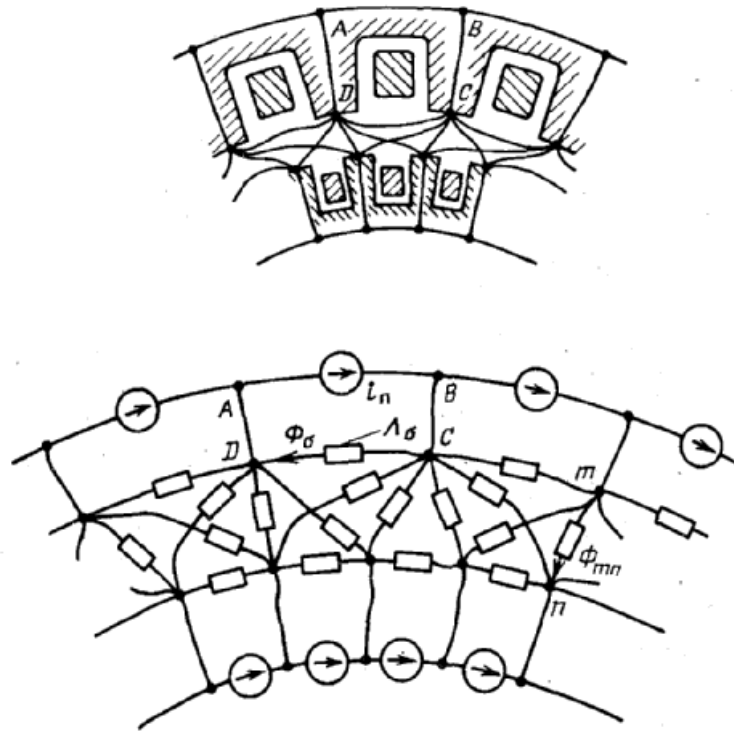


Рис. 11-34. Схема замещения магнитной цепи по методу зубцовых контуров без учета насыщения зубцов и ярем сердечников

Под зубцовым контуром мы будем понимать элемент электрической машины, представляющий собой совокупность зубца одного из сердечников и некоторой фиктивной обмотки, охватывающей этот зубец. Ток, протекающий по этой обмотке, назовем током зубцового контура. Заметим, что данное определение является упрощенным, т.к. метод применим и к машинам с беспазовыми (т.е. гладкими) сердечниками, и к машинам с нерегулярной структурой.

Обычно, однако, конструкция электрической машины регулярна в том смысле, что она содержит симметрично расположенные элементы: зубцы статора и ротора, полюсы в явнополюсных машинах, катушечные стороны обмоток. В этом случае применение метода зубцовых контуров наиболее эффективно.

Рассмотрим поле зубцового контура.

Границей зубцового контура на поверхности зубчатого сердечника являются линии, перпендикулярные плоскости рисунка, проходящие по серединам дна пазов, расположенных справа и слева от зуба. Скалярный магнитный потенциал этого участка поверхности будем считать равным току зубцового контура. Тогда потенциалы всех других участков поверхностей сердечников в отсутствие других токов равны нулю. Определенные таким образом граничные условия называются *особыми*.

При анализе поля зубцового контура удобно воспользоваться введенными понятиями четного и нечетного полей.

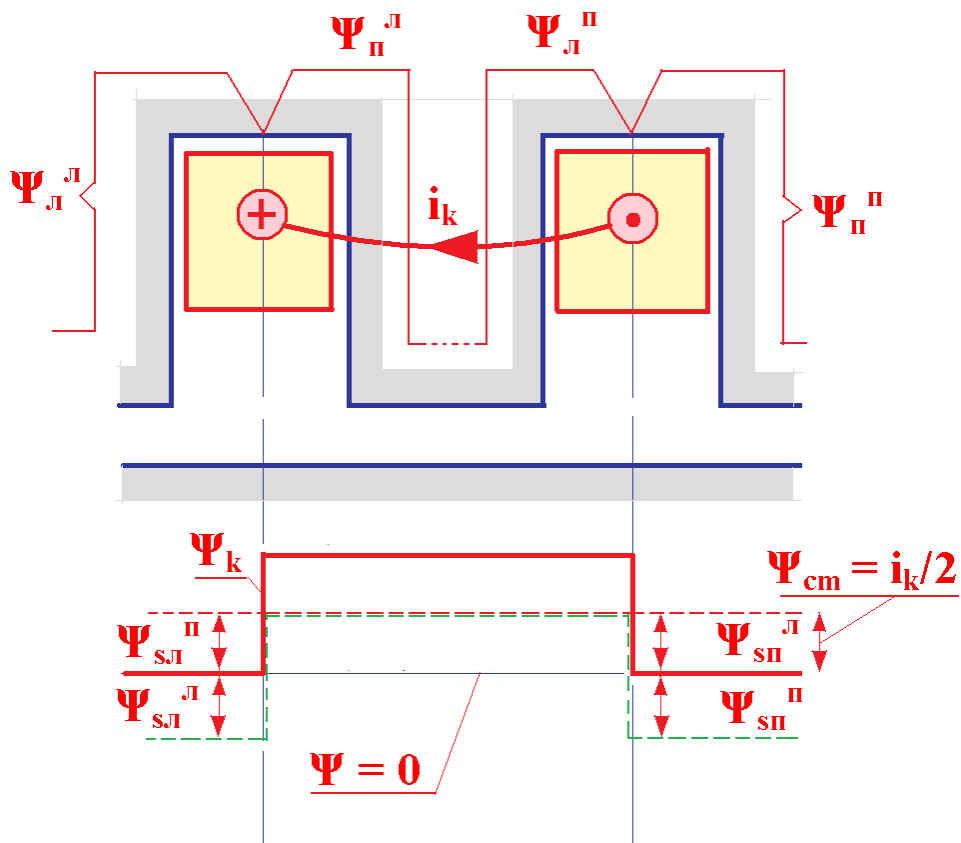


Рис. 11-35. Распределение скалярного магнитного потенциала зубцового контура при особых граничных условиях

В обозначениях потенциалов на рисунке принято, что верхний индекс соответствует пазу (правому или левому), а нижний индекс – зубцу, расположенному, справа или слева от рассматриваемого паза. Очевидно, что

$$\Psi_k = \Psi_n^l = \Psi_l^n = 2 \cdot \Psi_{cm} = 2 \cdot \frac{i_k}{2} = i_k.$$

В силу симметрии ограничимся рассмотрением поля на интервале изменения координаты x от минус бесконечности до оси зубца.

Для левого паза $\Psi_l^n = 0$ и $\Psi_n^l = i_k$

$$\Psi_c = \Psi_{cm} = \frac{\Psi_n^l + \Psi_l^n}{2} = \frac{\Psi_k}{2} = \frac{i_k}{2} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\Psi_s = \begin{cases} \Psi_{sm} = \frac{(\Psi_n^l - \Psi_l^n)}{2} = \frac{\Psi_k}{2} = \frac{i_k}{2} & \text{при } x > 0 \\ -\Psi_{sm} = -\frac{i_k}{2} & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

Расширим несколько понятия четного и нечетного полей, распространив их на всю область поля зубцового контура:

$$\left. \begin{aligned} \Psi_c = \Psi_{cm} = \mathbf{const} = \frac{i_k}{2} \\ \Psi_s = \begin{cases} -\Psi_{sm} & \text{при } x < 0 \quad \text{и} \quad x > t_{z1} \\ \Psi_{sm} & \text{при } 0 \leq x \leq t_{z1} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (11.66)$$

Легко видеть, что в этом случае $\Psi_k = \Psi_c + \Psi_s$ во всей области зубцового контура. Индукция на поверхности гладкого сердечника, естественно, может быть представлена в виде аналогичной суммы:

$$\left. \begin{aligned} B_c &= \mu_0 \lambda_c \Psi_{cm} = \mu_0 \lambda_c (i_k / 2) \\ B_s &= \mu_0 \lambda_s \Psi_{sm} = \mu_0 \lambda_s (i_k / 2) \\ B_k &= B_c + B_s = \mu_0 (\lambda_c + \lambda_s) \cdot (i_k / 2) \end{aligned} \right\} \quad (11.67)$$

где

$$\lambda_c = \beta_c \lambda_{\max} = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{t}{t+1}} \quad \text{— удельная проводимость для четного поля } \mathbf{паза}$$

$$\lambda_s = \beta_s \lambda_{\max} = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{t-a}{t+1}} \quad \text{— то же для нечетного поля } \mathbf{наза}.$$

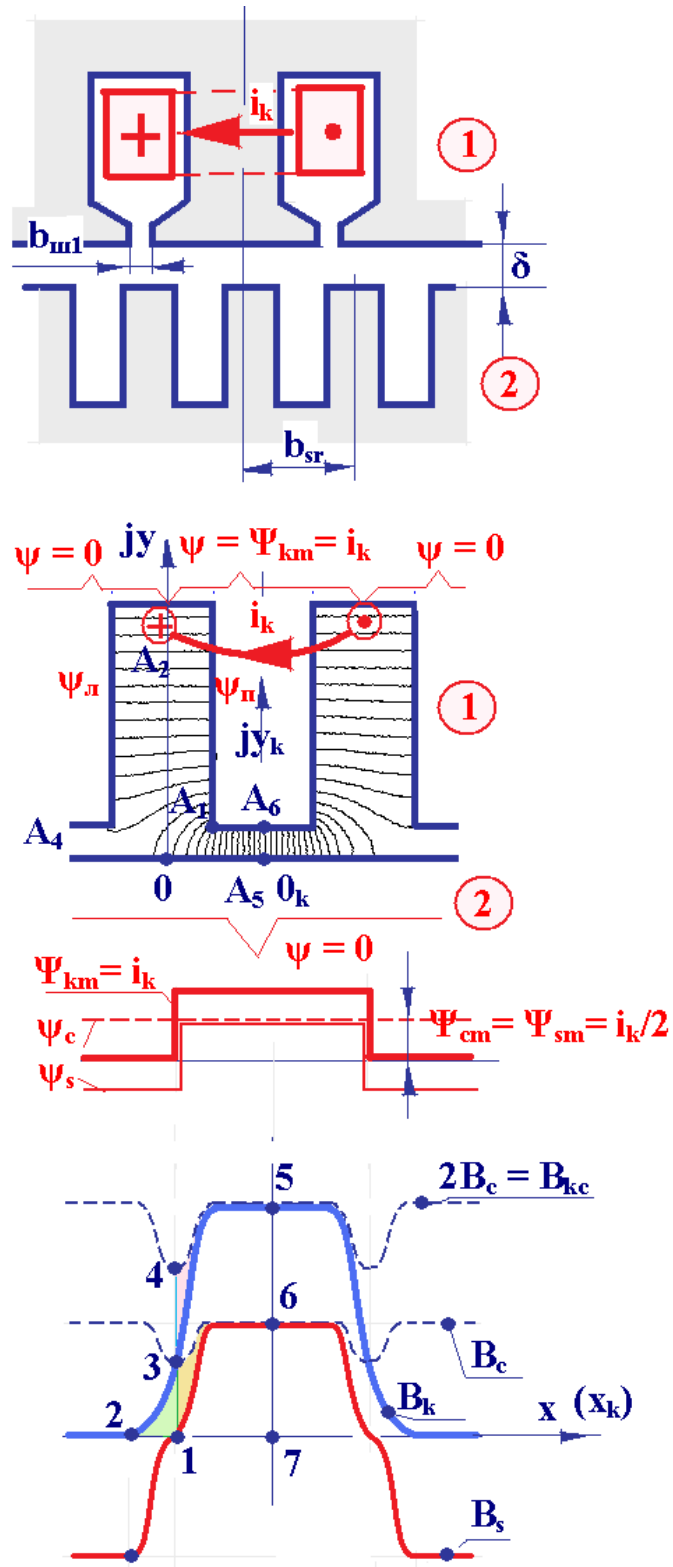


Рис. 11-36. Доказательство А.В. Иванова-Смоленского о равенстве магнитной проводимости зубцового контура при особых граничных условиях его магнитной проводимости для униполярного поля

Найдем поток зубцового контура в зазоре при заданном распределении скалярного магнитного потенциала:

$$\Phi_k = \int_{x_k=-\infty}^{\infty} B_k dx = \frac{\mu_0 i_k}{2} \int_{x_k=-\infty}^{\infty} (\lambda_c + \lambda_s) dx \quad (11.68)$$

Здесь мы перешли к другой системе координат, хотя это и необязательно в данном случае – просто, вычисляя поле контура, логично расположить начало координат на оси симметрии поля контура.

Зная поток контура, можно найти его важную интегральную характеристику – магнитную проводимость зубцового контура:

$$\Lambda_k = \frac{\Phi_k}{\mu_0 i_k} = \frac{1}{2} \int_{x_k=-\infty}^{\infty} (\lambda_c + \lambda_s) dx \quad (11.69)$$

Если бы интегралы в выражениях для Φ_k и Λ_k можно было взять аналитически, задачу определения этих величин для поля зубцового контура можно было бы считать решенной. Однако, к сожалению, это невозможно и для определения потока Φ_k найден другой путь (А.В. Иванов-Смоленский, Метод проводимостей зубцовых контуров и его применение к электромагнитному расчету ненасыщенной электрической машины с двухсторонней зубчатостью сердечников, - Электричество, 1976, №9, с. 18-28).

Для дальнейших выкладок используются распределения индукции на поверхности гладкого сердечника, показанные на приведенном выше рисунке.

Сначала определяется поток четного поля через рассматриваемое зубцовое деление при разности скалярных магнитных потенциалов

$$\Psi_{kc} = 2\Psi_{cm} = 2\left(\frac{i_k}{2}\right) = i_k \quad (11.70)$$

и, соответственно, при индукции $2B_c$:

$$\Phi_{kc} = 2 \int_0^{t_z/2} (2B_c) dx = \mu_0 i_k \left(2 \int \lambda_c dx \right) = \mu_0 i_k \Lambda_c \quad (11.71)$$

где

$$\Lambda_c = 2 \int \lambda_c dx = \frac{t_z}{\delta \cdot k_\delta} \text{ проводимость зубцового деления для четного по-}$$

ля, выражение для расчета которой было получено ранее.

Напомним выражения для расчета коэффициента зазора.

$$k_\delta = \frac{t_z}{t_z - \gamma \delta}$$

$$\gamma = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \right) - \ln \left(\sqrt{1 + \frac{1}{a}} \right) \right)$$

$$a = \left(\frac{\delta}{b} \right)^2$$

Далее доказывается, что поток зубцового контура Φ_k равен Φ_{kc} .

Сравним площади криволинейных треугольников 136, 123 и 345.

Площадь треугольника 136 в системе координат (Bx) представляет собой разность потоков четного и нечетного полей на половине зубцового деления:

$$\Phi_{136} = \int_0^{t_z/2} [B_c(x) - B_s(x)] dx = \mu_0 \frac{i_k}{2} \int_0^{t_z/2} (\lambda_c - \lambda_s) dx = \mu_0 \Theta \frac{i_k}{2} = \Phi_\Theta \quad (11.72)$$

где

$$\Theta = \frac{\ln 4}{\pi}$$

Далее рассмотрим треугольник 123, площадь которого в системе координат левого паза представляет собой поток зубцового контура (с индукцией B_k) на интервале $-\infty < x < 0$:

$$\Phi_{123} = \int_{x=-\infty}^0 B_k dx = \int_{x=-t_z/2}^0 [B_c(x) + B_s(x)] dx = \int_0^{t_z/2} [B_c(x) - B_s(x)] dx = \Phi_\Theta$$

(11.73)

При выводе (11.73) использовано (см. рисунок):

$$\int_{x=-t_z/2}^0 B_c(x) dx = \int_0^{t_z/2} B_c(x) dx$$

и

$$\int_{x=-t_z/2}^0 B_s(x) dx = - \int_0^{t_z/2} B_s(x) dx.$$

Наконец, рассмотрим треугольник 345, площадь которого представляет собой разность потоков четного поля с индукцией $2B_c$ и поля зубцового контура с индукцией B_k на интервале $0 < x < (t_z/2)$:

$$\begin{aligned} \Phi_{345} &= \int_0^{t_z/2} (B_{kc} - B_k) dx = \int_0^{t_z/2} [2B_c(x) - B_c(x) + B_s(x)] dx = \\ &= \int_0^{t_z/2} [B_c(x) - B_s(x)] dx = \Phi_{\ominus} \end{aligned} \quad (11.74)$$

Теперь равенство потоков Φ_{kc} и Φ_k легко доказывается, поскольку

$$\Phi_k = 2\Phi_{7235}, \quad \text{а} \quad \Phi_{kc} = 2\Phi_{1457} :$$

$$\Phi_k = \Phi_{kc} - 2\Phi_{345} + 2\Phi_{123} = \Phi_{kc} - 2\Phi_{\ominus} + 2\Phi_{\ominus} = \Phi_{kc}.$$

Из доказанного равенства потоков следует, что проводимость зазора для потока зубцового контура **при заданных граничных условиях** (т.е. при **особых** граничных условиях) равна магнитной проводимости для **четного** поля на зубцовом делении, охваченным контуром:

$$\Lambda_k = \frac{\Phi_k}{\mu_0 i_k} = \frac{\Phi_{kc}}{\mu_0 i_k} = \Lambda_c \quad (11.75)$$

где

$$\Lambda_c = \frac{\Lambda_{c,\max}}{k_{\delta}} = \frac{t_z}{\delta \cdot k_{\delta}}.$$

Итак, сделан очень важный (и очень красивый!) вывод, позволяющий в дальнейшем сформировать модель полного поля электрической машины на основании решения полевой задачи в локальной, сравнительно небольшой, области зубцового контура. Подробно метод зубцовых контуров будет изучаться в следующем семестре.