
Раздел 13. Электродинамические поля в электрических машинах

13.1. О переменных электромагнитных полях в электрических машинах

Многие явления в электрических машинах, оказывающие существенное влияние на их работу, не могут быть описаны с позиций магнитостатики и должны рассматриваться как явления переменного поля. На языке формул это означает, что рассматриваемая система уравнений должна включать в себя второе уравнение Максвелла, выражающее открытое Майклом Фарадеем явление электромагнитной индукции. Назовем эти явления.

По якорным обмоткам крупных электрических машин переменного тока, например, гидро- и турбогенераторов, протекают большие токи. Допустим, ток параллельной ветви равен 10 кА. При плотности тока 5 А/мм^2 площадь поперечного сечения провода должна быть равной 2000 мм^2 . Такую площадь имеет медная шина с размерами сечения $20 \times 100 \text{ мм}$. Легко подсчитать сопротивление этой шины постоянному току. Однако на переменном токе ее сопротивление вследствие поверхностного эффекта будет значительно больше, а следовательно, и потери в ней при переменном токе будут значительно больше, чем при постоянном (имеется в виду, что действующее значение переменного тока равно значению постоянного тока). Подход к этому явлению с позиций теории переменного электромагнитного поля позволяет не только правильно рассчитать параметры обмотки на переменном токе, но и предложить рациональное ее устройство, обеспечивающее и минимум потерь, и эффективное использование меди – разбиение одного эффективного провода на множество элементарных с поперечным сечением $10 - 20 \text{ мм}^2$ и транспозицию элементарных проводов.

Учитывать поверхностный эффект необходимо и при расчете потерь в стали, в частности, в массивных роторах и элементах конструкции.

Следует подчеркнуть, что задачи, в которых рассчитываются переменные поля, весьма сложны. Для того чтобы построить рациональную модель, в достаточной мере упрощающую распределение величин поля в пространстве и во времени и одновременно с этим достаточно точно воспроизводящую рассматриваемое явление, необходимо принять ряд допущений. Одним из важнейших является допущение о *квазистационарности* электромагнитного поля.

13.2. Математическое описание переменного (квазистационарного) электромагнитного поля в проводящей магнитной среде

Рассматривается проводящая магнитная среда с магнитной проницаемостью $\mu = \mu_0 \mu_r$ и электропроводностью γ . Емкостными токами (токами смещения) пренебрегаем:

$$\bar{J}_{cm} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0.$$

В такой среде существуют одновременно и магнитное поле с напряженностью \bar{H} и электрическое поле с напряженностью \bar{E} . Эти поля взаимосвязаны в том смысле, что изменение одного из них порождает другое. Выражается эта зависимость и уравнениями Максвелла: изменение во времени напряженности магнитного поля порождает переменное электрическое поле (второе уравнение), характеризующееся в проводящей среде вектором плотности тока проводимости \bar{J} (пятое уравнение), которая в свою очередь является источником магнитного поля (первое уравнение).

Итак, для описания переменного электромагнитного поля будем пользоваться системой уравнений Максвелла в виде:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{rot} \bar{H} = \bar{J} & \mathbf{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \bar{J} = \gamma \bar{E} & \bar{B} = \mu \bar{H} \\ \mathbf{div} \bar{J} = 0 & \mathbf{div} \bar{B} = 0 \end{array}$$

Ограничимся рассмотрением изотропных сред: $\mu = \mathbf{const}$ и $\gamma = \mathbf{const}$. На это допущение следует обратить особое внимание. Как уже упоминалось, вследствие эффекта вытеснения тока распределение плотности тока по объему проводника в переменном поле оказывается неравномерным. Следовательно, неравномерным будет и распределение джоулевых потерь, и распределение температуры. Удельная электропроводность материала, как известно, зависит от температуры, и поэтому, вообще говоря, допущение об изотропности среды $\gamma = \mathbf{const}$ в задачах с резко выраженным поверхностным эффектом следует оценивать. То же самое относится и к допущению о постоянстве магнитной проницаемости: при проникновении поля, изменяющегося с высокой частотой, в массивный ферромагнетик распределение индукции, а следовательно, и магнитной проницаемости по глубине проникновения в массив могут быть существенно неравномерными. В тех случаях, когда допущение об изотропности всего объема среды приводит к значительной погрешности, обычно несколько усложняют модель и рассматривают многослойную структуру, состоящую из нескольких изотропных слоев. Правильное решение в этом случае достигается, если оказываются выполненными внутренние граничные условия на границах раздела сред (слоев).

13.3. Уравнения для напряженностей магнитного и электрического полей

Для вывода удобных для расчета уравнений применим оператор \mathbf{rot} к обеим частям первого уравнения Максвелла:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \bar{H}) = \mathbf{rot} \bar{J} = [\nabla \times [\nabla \times \bar{H}]] = \nabla(\nabla \bar{H}) - (\nabla \nabla) \bar{H} = \mathbf{grad}(\mathbf{div} \bar{H}) - \nabla^2 \bar{H}$$

Но при $\mu = \mathbf{const}$

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu} \text{ и } \mathbf{div} \bar{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{div} \bar{B} = 0, \text{ следовательно, } \mathbf{grad}(\mathbf{div} \bar{H}) = 0, \text{ откуда}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \bar{H}) = -\nabla^2 \bar{H}.$$

Правую часть первого уравнения преобразуем с помощью второго и седьмого уравнений Максвелла ($\mathbf{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ и $\bar{B} = \mu \bar{H}$):

$$\mathbf{rot} \bar{J} = \gamma \mathbf{rot} \bar{E} = -\gamma \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}.$$

Таким образом:

$$\nabla^2 \bar{H} = \gamma \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (13.1)$$

Итак, мы получили дифференциальное уравнение в частных производных относительно вектора напряженности магнитного поля. Это уравнение может быть представлено в виде трех уравнений в частных производных относительно скалярных величин – компонент вектора \bar{H} : H_x , H_y и H_z .

Аналогично для вектора напряженности электрического поля

$$\nabla^2 \bar{E} = \gamma \mu \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \quad (13.2)$$

Если в результате решения одного из этих двух уравнений определена напряженность поля \bar{H} или \bar{E} , напряженность другого поля может быть определена по одному из первых двух уравнений Максвелла.

Для решения полевых задач удобно воспользоваться введенной ранее вспомогательной функцией – векторным магнитным потенциалом ($\bar{B} = \mathbf{rot} \bar{A}$).

13.4. Описание переменного электромагнитного поля через векторный магнитный потенциал

Учитывая, что $\bar{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \bar{A}$, получим:

$$\mathbf{rot} \bar{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \bar{A}) = -\frac{1}{\mu} \nabla^2 \bar{A}.$$

В последнем выражении использована калибровка Кулона $\mathbf{div} \bar{A} = 0$, о которой говорилось при выводе уравнения Пуассона при рассмотрении магнитостатического поля.

Подставив полученное выражение ротора напряженности магнитного поля через векторный магнитный потенциал в первое уравнение Максвелла, получим:

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu \bar{J}. \quad (13.3)$$

Теперь надо выразить вектор плотности тока \bar{J} через напряженность электрического поля \bar{E} , которую в свою очередь можно выразить через векторный магнитный потенциал \bar{A} :

$$\mathbf{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rot} \bar{A}) = -\mathbf{rot} \left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right),$$

откуда

$$\bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \mathbf{grad} \varphi_{эл}, \quad (13.4)$$

где $\varphi_{эл}$ - потенциал стороннего электрического поля, стационарного, созданного неким распределением электрических зарядов. Это поле существует при *не* *меняющемся* во времени магнитном поле (при $\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = 0$ $\bar{E} = -\mathbf{grad} \varphi_{эл}$). При выводе (13.4) использовано доказанное ранее свойство ротора, а именно то, что ротор градиента некоторой функции равен нулю:

$$\mathbf{rot} \left(-\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \mathbf{grad} \varphi_{эл} \right) = \mathbf{rot} \left(-\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) - \mathbf{rot} (\mathbf{grad} \varphi_{эл}) = \mathbf{rot} \left(-\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right)$$

В частном случае при отсутствии стороннего электрического поля ($\varphi = \mathbf{const}$) или при перемещении по эквипотенциальной поверхности электростатического поля $\mathbf{grad} \varphi_{эл} = 0$ и

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu \bar{J} = -\gamma \mu \bar{E} = \gamma \mu \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}. \quad (13.5)$$

Уравнение (13.5) представляет собой описание переменного электромагнитного поля в проводящей магнитной среде в терминах векторного магнитного потенциала. После решения этого уравнения относительно \bar{A} можно найти напряженности магнитного и электрического полей:

$$\left. \begin{aligned} \bar{H} &= \frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \bar{A} \\ \bar{E} &= -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

13.5. Поток электромагнитной энергии в переменном электромагнитном поле

В переменном электромагнитном поле напряженности магнитного и электрического полей все время изменяются. Ранее плотность энергии поля была выражена через напряженности \bar{E} и \bar{H} и поэтому логично предположить, что в переменном электромагнитном поле плотность энергии, понимаемая как сумма плотностей энергии магнитного и электрического полей, также изменяется. Однако не очевидно, что при одновременном изменении составляющих плотности энергии изменяется их сумма.

Сумма энергий магнитного и электрического полей в объеме V равна:

$$W_e + W_m = \int_V \left(\frac{\bar{E}\bar{D}}{2} + \frac{\bar{H}\bar{B}}{2} \right) dV. \quad (13.7)$$

Рассмотрим скорость уменьшения энергии в объеме V :

$$-\frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) = -\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{E}\bar{D}}{2} + \frac{\bar{H}\bar{B}}{2} \right) dV. \quad (13.8)$$

В изотропной среде $\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$ и $\bar{B} = \mu \bar{H}$, где ε и μ - скалярные величины.

Сделаем соответствующие подстановки:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{E}\bar{D}}{2} + \frac{\bar{H}\bar{B}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon \bar{E}^2}{2} + \frac{\mu \bar{H}^2}{2} \right) = \bar{E} \frac{\partial(\varepsilon \bar{E})}{\partial t} + \bar{H} \frac{\partial(\mu \bar{H})}{\partial t} = \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

Производную $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ можно выразить через напряженности \bar{E} и \bar{H} , по-

скольку она представляет собой плотность тока смещения ($\bar{J} = \gamma \bar{E} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$):

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{J} - \gamma \bar{E} = \mathbf{rot} \bar{H} - \gamma \bar{E}.$$

Кроме того, из второго уравнения Максвелла имеем:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\mathbf{rot} \bar{E}.$$

После подстановок:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = \int_V ((-\bar{E} \mathbf{rot}(\bar{H}) + \gamma E^2 + \bar{H} \mathbf{rot} \bar{E})) dV.$$

Перепишем последнее выражение несколько иначе:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = \int_V \gamma E^2 dV + \int_V (\bar{H} \mathbf{rot} \bar{E} - \bar{E} \mathbf{rot} \bar{H}) dV$$

и применим известное выражение векторной алгебры:

$$\mathbf{div}[\bar{E} \times \bar{H}] = (\bar{H} \mathbf{rot} \bar{E}) - (\bar{E} \mathbf{rot} \bar{H}). \quad (13.9)$$

В результате получим:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = \int_V \gamma E^2 dV + \int_V \mathbf{div}[\bar{E} \times \bar{H}] dV. \quad (13.10)$$

Теперь применим теорему Остроградского-Гаусса:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = \int_V \gamma E^2 dV + \int_S [\bar{E} \times \bar{H}] d\bar{S}. \quad (13.11)$$

Рассмотрим слагаемые в правой части. Первое из них,

$$\int_V \gamma E^2 dV = \int_V \frac{J^2}{\gamma} dV,$$

представляет собой энергию, превращающуюся в тепло в объеме V в единицу времени (мощность джоулевых потерь). Второе слагаемое,

$$\int_S [\bar{E} \times \bar{H}] d\bar{S} = \int_S \bar{P} d\bar{S}, \quad (13.12)$$

представляет энергию, выходящую из объема V через поверхность S в направлении нормали \bar{n} в единицу времени.

В последнем выражении обозначено:

$$\bar{P} = [\bar{E} \times \bar{H}] \quad (13.13)$$

Вектор \bar{P} называют вектором Пойнтинга, модуль его равен потоку электромагнитной энергии через единицу поверхности в единицу времени.

Формула (13.11) отражает закон сохранения энергии в переменном электромагнитном поле. Заметим, что понятие потока энергии при формулировке закона сохранения энергии (применительно к механической энергии) использовал в 1874 г. профессор Московского университета Николай Алексеевич Умов (1846-1915).

13.6. Плоское переменное квазистационарное электромагнитное поле

Мы рассматриваем общий случай трехмерного поля, все векторы которого в декартовой системе координат имеют три составляющие по координатам, например, вектор напряженности электрического поля может быть записан так:

$$\vec{E} = \bar{q}_x E_x + \bar{q}_y E_y + \bar{q}_z E_z.$$

В общем случае компоненты всех векторов поля являются функциями всех трех координат и времени:

$$\left. \begin{array}{l} E_x = E_x(x, y, z, t) \\ E_y = E_y(x, y, z, t) \\ \dots\dots\dots \\ H_x = H_x(x, y, z, t) \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \quad (13.13)$$

Областью этого поля является произвольный объем V , на границе которого S заданы внешние граничные условия в виде зависимостей

$$\left. \begin{array}{l} \bar{H}_e = \bar{H}_e(x, y, z, t) \\ \bar{E}_e = \bar{E}_e(x, y, z, t) \end{array} \right\} \quad (13.15)$$

(индекс “e” – от слова “edge” – край, граница, ребро (геометрической фигуры))

Важным для практического применения частным случаем является т.наз. ***плоское переменное квазистационарное электромагнитное поле.***

Определим плоское поле относительно координатной оси z следующим образом.

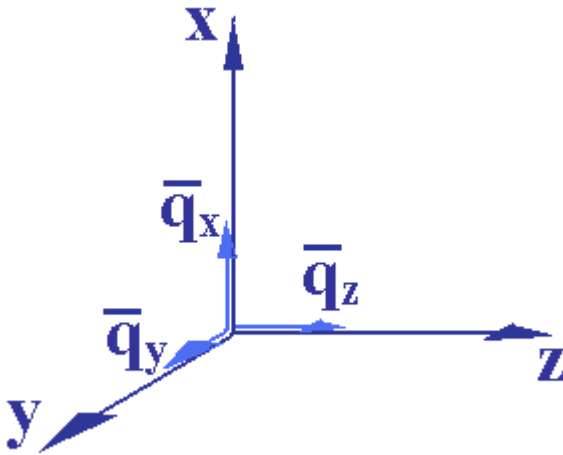


Рис.13.1. Используемая система координат

1) Векторы поля $\bar{E}, \bar{H}, \bar{D}, \bar{B}$ (к векторному магнитному потенциалу \bar{A} это не относится) имеют составляющие только по осям x и y , т.е. располагаются в параллельных плоскостях $z = \text{const}$.

Замечание. При этом направление осей всегда можно выбрать так, чтобы

$$E_y = 0, \quad (13.16)$$

что, естественно, упростит запись уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \bar{E} &= \bar{q}_x E_x \\ \bar{H} &= \bar{q}_x H_x + \bar{q}_y H_y \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\}$$

причем $E_z = 0, H_z = 0$.

2) Компоненты векторов поля по осям x и y во всех точках плоскости $z = \text{const}$ имеют одно и то же значение, т.е. не зависят ни от x , ни от y :

$$\left. \begin{aligned} E_x &\neq f(x, y) & \text{при } z = \text{const} \\ H_x &\neq f(x, y) & \text{при } z = \text{const} \\ H_y &\neq f(x, y) & \text{при } z = \text{const} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (13.17)$$

Таким образом, компоненты векторов поля по осям x и y зависят только от координаты z рассматриваемой точки и от времени:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= f(z, t) \\ H_x &= f(z, t) \\ H_y &= f(z, t) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (13.17 a)$$

Областью такого поля является объем V , ограниченный (если ограничен) параллельными плоскостями S_1 ($z = z_1 = \text{const}$) и S_2 ($z = z_2 = \text{const}$).

На границах S_1 и S_2 задаются значения векторов напряженности электрического и магнитного полей, которые определяют электромагнитное поле в рассматриваемой области. Эти значения (граничные условия) являются функциями только времени:

$S_1 \quad (z = z_1):$

$$\bar{H}_{e1} = \bar{H}_{e1}(t) = \bar{q}_x H_{xe1} + \bar{q}_y H_{ye1} \qquad \bar{E}_{e1} = \bar{E}_{e1}(t)$$

$$H_{xe1} = H_{xe1}(t) \qquad E_{xe1} = E_{xe1}(t)$$

$$H_{ye1} = H_{ye1}(t)$$

$S_2 \quad (z = z_2):$

$$\bar{H}_{e2} = \bar{H}_{e2}(t) = \bar{q}_x H_{xe2} + \bar{q}_y H_{ye2} \qquad \bar{E}_{e2} = \bar{E}_{e2}(t)$$

$$H_{xe2} = H_{xe2}(t) \qquad E_{xe2} = E_{xe2}(t)$$

$$H_{ye2} = H_{ye2}(t)$$

13.7. Математическое описание плоского электромагнитного поля

Рассмотрим составляющие вектора ротора напряженности магнитного поля.

Основываясь на данном выше определении плоского поля, рассмотрим x -ую компоненту напряженности магнитного поля H_x .

Запишем для x -ой компоненты ротора напряженности первое уравнение Максвелла:

$$\mathbf{rot}_x \bar{H} = J_x = \gamma E_x.$$

Выразим составляющие ротора напряженности через производные по направлениям координатных осей и учтем, что z -ая составляющая напряженности отсутствует:

$$\underbrace{\frac{\partial H_z}{\partial y}}_0 - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x \quad . \qquad (13.18)$$

Теперь рассмотрим y -ую компоненту ротора напряженности, учтя, что вектор напряженности электрического поля направлен по оси x :

$$\mathbf{rot}_y \bar{H} = \underbrace{\gamma E_y}_0$$

и из

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial H_z}{\partial x}}_0 = 0$$

следует, что H_x не зависит от z .

Записав второе уравнение Максвелла для x -ой составляющей ротора напряженности электрического поля, получим:

$$\mathbf{rot}_x \bar{E} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial y}}_0 - \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial z}}_0 = 0,$$

откуда следует, что H_x не зависит от времени.

Итак, мы установили, что при принятых допущениях H_x не зависит ни от координаты z , ни от времени. Другими словами, H_x не принадлежит к рассматриваемому нами электромагнитному полю и можно положить

$$H_x = 0. \quad (13.19)$$

Впрочем, это следует и из рассмотрения

$$\mathbf{rot}_z \bar{H} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z = 0,$$

поскольку H_y зависит от времени, а H_x , как мы только что установили, нет.

Применив второе уравнение Максвелла к y -ой компоненте вектора напряженности электрического поля, получим еще одно важное соотношение:

$$\mathbf{rot}_y \bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial x}}_0 = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t},$$

откуда

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}. \quad (13.20)$$

Полученные выражения представляют собой систему уравнений, описывающую плоское переменное электромагнитное поле:

$$\left. \begin{aligned} \bar{E} &= \bar{q}_x E_x, & E_x &= E_x(z, t) \\ \bar{H} &= \bar{q}_y H_y, & H_y &= H_y(z, t) \\ \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -\gamma E_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (13.21)$$

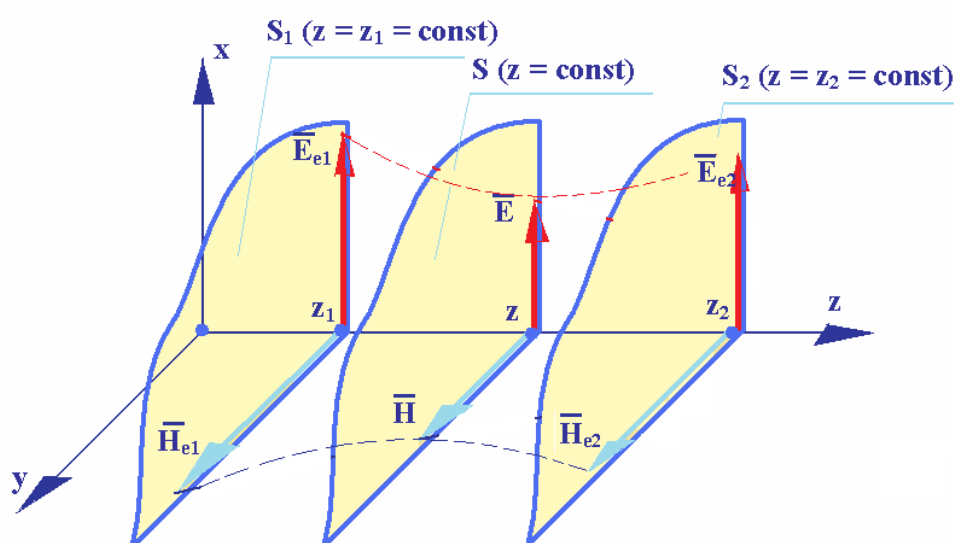


Рис. 13.2. Изменение векторов напряженности электрического и магнитного полей по направлению распространения поля

Анализируя эти уравнения, приходим к выводу, что скорость изменения напряженности магнитного поля по направлению координаты z (говорят по глубине проникновения поля) определяется электропроводностью среды γ , а скорость изменения напряженности электрического поля по тому же направлению определяется скоростью изменения во времени напряженности (индукции) магнитного поля.

13.8. Переменное электромагнитное поле в проводящем магнитном полупространстве

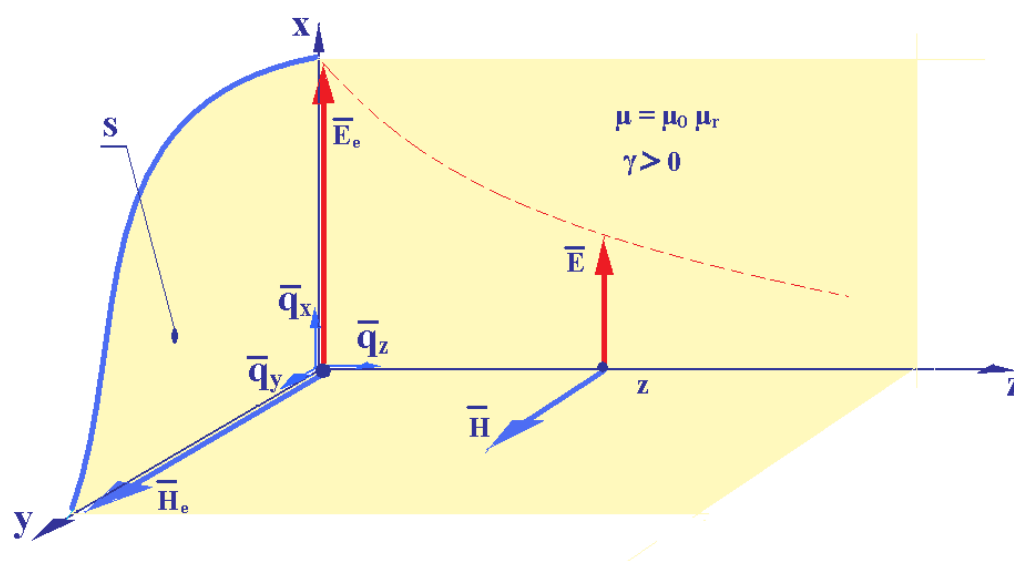


Рис. 13.3. Проникновение электромагнитного поля в проводящее полупространство с относительной магнитной проницаемостью μ_r

От остального пространства рассматриваемое полупространство отделяется плоскостью S , на которой заданы граничные условия.

Ранее мы определили плоское поле, в котором существуют только одномерные магнитное и электрическое поля и вывели уравнения, связывающие напряженности этих полей, свойства среды и (заданную) скорость изменения величин поля во времени.

Предположим теперь, что напряженности полей изменяются во времени *по гармоническому закону*:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_m \cos(\omega t + \psi_E) \\ H_y &= H_m \cos(\omega t + \psi_H) \end{aligned} \right\} \quad (13.22)$$

Здесь амплитуды E_m и H_m и фазы ψ_E и ψ_H являются функциями z .

В дальнейшем будем использовать *символическую форму* записи, т.е. перейдем к *комплексным* числам. Это существенно сокращает запись выражений и дает возможность применить такой удобный инструмент, как *векторные диаграммы*.

Комплексные амплитуды напряженностей на границе:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{me} &= H_{me} e^{j\psi_{He}} \\ \dot{E}_{me} &= E_{me} e^{j\psi_{Ee}} \end{aligned} \right\} \quad (13.23)$$

Векторы поля, представленные в комплексной форме (пространственно-временные комплексные величины поля):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{H}}_e &= \bar{q}_y \dot{H}_{me} e^{j\omega t} \\ \dot{\vec{E}}_e &= \bar{q}_x \dot{E}_{me} e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (13.24)$$

В дальнейшем будем использовать единичный комплекс $\dot{a} = e^{j\omega t}$.

Составляющие напряженностей электрического E_x и магнитного H_y полей являются действительными частями комплексных величин \dot{E}_x и \dot{H}_y :

$$\begin{aligned} E_x &= \mathbf{Re}(\dot{E}_x) \\ H_y &= \mathbf{Re}(\dot{H}_y), \end{aligned}$$

где

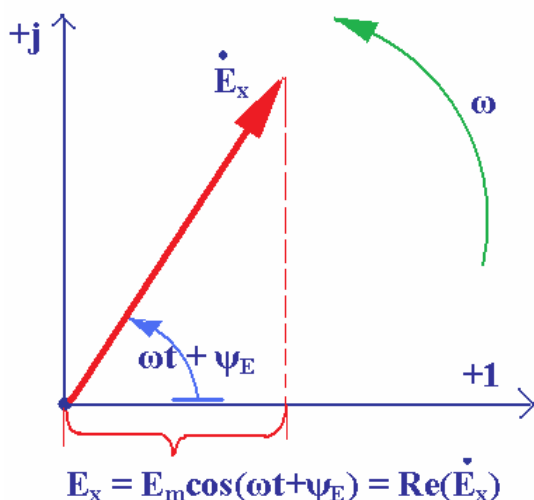
$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= E_m e^{j(\omega t + \psi_E)} = \underbrace{E_m e^{j\psi_E}}_{\dot{E}_m} e^{j\omega t} = \dot{E}_m \dot{a} \\ \dot{H}_y &= H_m e^{j(\omega t + \psi_H)} = \underbrace{H_m e^{j\psi_H}}_{\dot{H}_m} e^{j\omega t} = \dot{H}_m \dot{a} \end{aligned} \right\} \quad (13.25)$$

Здесь \dot{E}_m и \dot{H}_m – комплексные амплитуды напряженностей

Векторы комплексных величин \dot{E}_x и \dot{H}_y (**временные** векторы) вращаются на комплексной плоскости против часовой стрелки.

Полученные ранее выражения (13.18) и (13.20) можно распространить на комплексные величины. При этом при взятии частных производных по z пред-

полагает постоянство во времени и наоборот, взятие частной производной по времени означает постоянство координаты z .



$$-\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = -e^{j\omega t} \frac{d\dot{H}_m}{dz} = \gamma \dot{E}_x = \gamma \dot{E}_m e^{j\omega t},$$

откуда

$$-\frac{d\dot{H}_m}{dz} = \gamma \dot{E}_m. \quad (13.26)$$

Рис. 13.4. Вектор комплексной напряженности электрического поля на комплексной плоскости

Аналогично

$$\frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} = e^{j\omega t} \frac{d\dot{E}_m}{dz} = -\mu \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial t} = -i\omega\mu$$

и

$$\frac{d\dot{E}_m}{dz} = -j\omega\mu\dot{H}_m \quad (13.27)$$

Из выражения (13.27), как и из (13.20) следует, что скорость изменения напряженности электрического поля (в (13.27) – комплексной амплитуды) по направлению координатной оси z определяется заданной частотой и свойствами среды.

Для выявления закономерностей при конкретных условиях надо решить эти дифференциальные уравнения. Продифференцируем первое из них по z :

$$-\frac{d^2 \dot{H}_m}{dz^2} = \gamma \frac{d\dot{E}_m}{dz}$$

и используем второе:

$$-\frac{d^2 \dot{H}_m}{dz^2} = -j\omega\gamma\mu\dot{H}_m \quad (13.28)$$

Получили дифференциальное уравнение относительно H_m . Решение этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\dot{H}_m = \dot{H}_1 e^{p_1 z} + \dot{H}_2 e^{p_2 z}, \quad (13.29)$$

где p_1 и p_2 – корни характеристического уравнения

$$p^2 \dot{H}_m = j\omega\gamma\mu\dot{H}_m \quad \Rightarrow \quad p^2 = j\omega\gamma\mu,$$

решением которого является:

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{j\omega\gamma\mu} = \pm \alpha. \quad (13.30)$$

Для записи α в более удобном виде рассмотрим \sqrt{j} :

$$\sqrt{j} = \sqrt{e^{j(\pi/2)}} = \pm e^{j(\pi/4)} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j) = \pm(1+j)\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (13.31)$$

и введем новое обозначение

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}}. \quad (13.32)$$

После подстановки получим:

$$\alpha = \sqrt{j\omega\gamma\mu} = (1+j)k = \sqrt{2}ke^{j(\pi/4)}. \quad (13.33)$$

Рассмотрим решение дифференциального уравнения (13.28) с учетом введенных обозначений:

$$\dot{H}_m = \dot{H}_1 e^{-\alpha z} + \dot{H}_2 e^{\alpha z} \quad (13.34)$$

Если в этом уравнении $\dot{H}_2 \neq 0$, то второе слагаемое стремится к ∞ , т.к. вещественная часть α всегда больше нуля ($\text{Re}\alpha = k$). Поскольку напряженность поля не может быть равной бесконечности, принимаем

$$\dot{H}_2 = 0. \quad (13.35)$$

Для определения постоянной \dot{H}_1 необходимо воспользоваться граничными условиями.

На граничной поверхности S заданы комплексные амплитуды:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{me} &= H_{me} e^{j\psi_{He}} \\ \dot{E}_{me} &= E_{me} e^{j\psi_{Ee}} \end{aligned} \right\}, \quad (13.23)$$

определяющие пространственные векторы магнитного и электрического полей, выраженные в комплексной форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_e &= \bar{q}_y \dot{H}_{me} e^{j\omega t} = \bar{q}_y \dot{H}_{me} \dot{a} \\ \dot{E}_e &= \bar{q}_x \dot{E}_{me} e^{j\omega t} = \bar{q}_x \dot{E}_{me} \dot{a} \end{aligned} \right\} \quad (13.24)$$

Подставим эти значения в (13.34) с учетом, разумеется, (13.35):

$$\dot{H}_m \Big|_{z=0} = \dot{H}_1 \underbrace{e^{-\alpha z}}_1 = H_{me} e^{j\psi_{He}} = \dot{H}_{me},$$

т.е.

$$\dot{H}_1 = \dot{H}_{me}. \quad (13.36)$$

Подставим полученные выражения для \dot{H}_1 и α в выражение для комплексной амплитуды напряженности магнитного поля:

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{me} e^{-kz} e^{-jkz} = H_{me} e^{-kz} e^{j(\psi_{He} - kz)} = |\dot{H}_{me}| e^{j\psi_H}, \quad (13.37)$$

откуда видно, что и модуль комплексной амплитуды напряженности $|\dot{H}_m| = H_m = |H_{me} e^{-kz}|$, и аргумент $\psi_H = \mathbf{arg} \dot{H}_m = (\psi_{He} - kz)$ при заданных свойствах среды и частоте ω зависят **только** от координаты z .

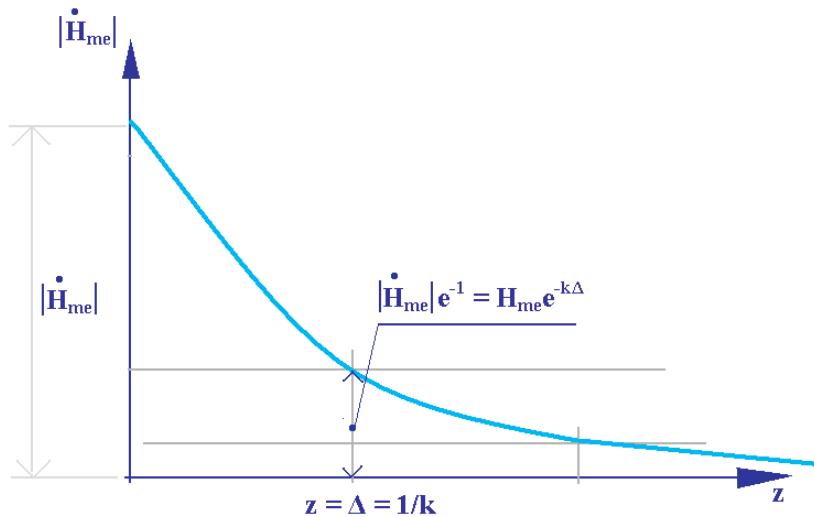


Рис. 13.5. Изменение модуля напряженности магнитного поля по глубине проникновения поля в проводящее полупространство

Модуль комплекса напряженности затухает по экспоненциальному закону. Δ – глубина проникновения, т.е. расстояние, при углублении на которое модуль напряженности уменьшается в e раз. Во столько же раз уменьшаются и модули других комплексов – напряженности электрического поля, плотности тока, индукции.

$$\Delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu}}. \quad (13.38)$$

Аргумент комплексной напряженности (иногда говорят «фазовый угол») по мере углубления в проводящее магнитное полупространство изменяется линейно:

$$\psi_H = \arg \dot{H} = \arg \dot{H}_{me} - kz = \psi_{He} - kz.$$

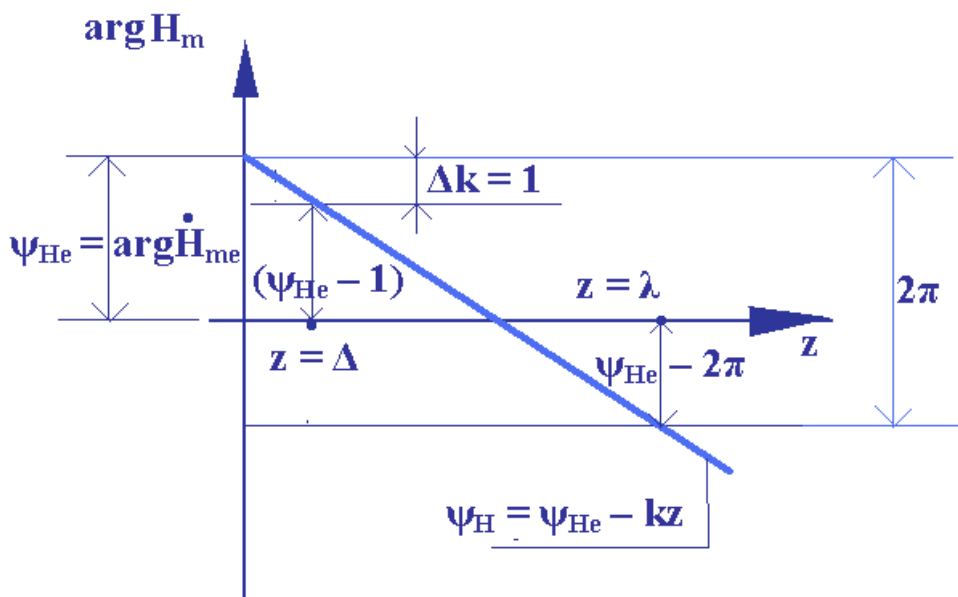


Рис. 13.6. Изменение аргумента напряженности магнитного поля по глубине проникновения поля в проводящее полупространство

Расстояние λ называют длиной волны переменного электромагнитного поля, при прохождении волной этого расстояния аргументы комплексных величин изменяются на 2π . Из условия $k\lambda = 2\pi$ находим:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\Delta = 2\pi\sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu}} \quad (1.39)$$

На расстоянии λ поле затухает в $e^{k\lambda} = e^{2\pi} = 550$ раз.

Построим на комплексной плоскости годограф вектора комплексной величины при изменении координаты z .

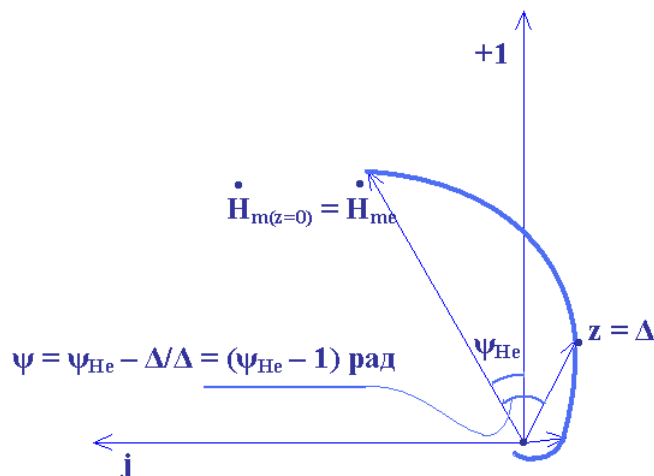


Рис. 13.7. Годограф вектора напряженности магнитного поля при изменении координаты z

Таким же образом затухают комплексные амплитуды $\dot{B}_m, \dot{E}_m, \dot{J}_m$, поскольку γ и μ постоянны. Это можно показать следующим образом.

$$\dot{J}_m = \gamma \dot{E}_m = -\frac{d\dot{H}_m}{dz} = -\frac{d}{dz}(\dot{H}_{me} e^{-\alpha z}) = \alpha \dot{H}_{me} e^{-\alpha z} = \alpha \dot{H}_m, \quad (13.40)$$

где $\alpha = (1 + j)k$, $k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}}$ - постоянные величины.

$$\dot{E}_m = \frac{\dot{J}}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} \dot{H}_m \quad (13.41)$$

$$\dot{B} = \mu \dot{H}_m \quad (13.42)$$

Пример. Проникновение поля в проводящее полупространство из меди.

Дано: $f = 50$ Гц; $\gamma_{20C} = 5,71 \cdot 10^7$ (Ом·м)⁻¹; $H_{me} = 1000$ А/м; $\psi_{He} = \pi/6$.

13.9. Интегральные величины для переменного электромагнитного поля в полупространстве

Интегральными называются такие величины, которые получаются в результате интегрирования переменных величин (векторов) поля (в рассматриваемом случае – найденных для полупространства). К интегральным величинам относятся:

– переменный электрический ток I *через поверхность* S_I в полупространстве, который определяется путем интегрирования плотности тока \bar{J} на этой поверхности:

$$i = \int_{S_I} \bar{J} d\bar{S} \quad (13.43)$$

– переменный магнитный поток Φ *через поверхность* S_Φ в полупространстве, который определяется интегрированием магнитной индукции \vec{B} на этой поверхности:

$$\Phi = \int_{S_\Phi} \vec{B} d\vec{S}. \quad (13.44)$$

– переменная ЭДС (обозначим ее \mathcal{E}), индуцируемая *на некоторой линии* $l_\mathcal{E}$ в полупространстве, определяемая интегрированием напряженности электрического поля на этой линии (точнее, на отрезке):

$$\mathcal{E} = \int_{l_\mathcal{E}} \vec{E} d\vec{l}. \quad (13.45)$$

– переменная МДС f *на отрезке линии* l_f в полупространстве, определяемая интегрированием напряженности магнитного поля \vec{H} на этом отрезке:

$$f = \int_{l_f} \vec{H} d\vec{l}. \quad (13.46)$$

Определим перечисленные интегральные величины для параллелепипеда, расположенного в полупространстве определенным образом.

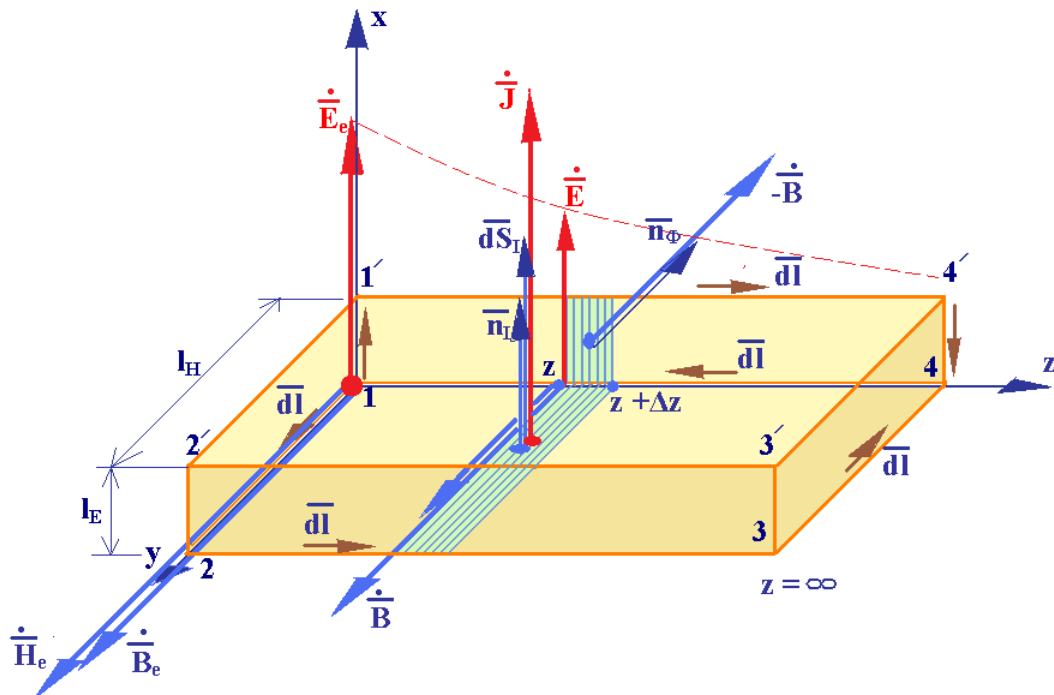


Рис. 13.8. К определению интегральных величин электромагнитного поля

$$\text{Напомним: } \bar{H} = \text{Re}(\dot{\bar{H}}), \quad \bar{B} = \text{Re}(\dot{\bar{B}}), \quad \bar{E} = \text{Re}(\dot{\bar{E}}), \quad \bar{J} = \text{Re}(\dot{\bar{J}})$$

Ток i – равен интегралу от плотности тока по грани 1-2-3-4 или по грани 1'-2'-3'-4'. ЭДС приложена к ребру 1-1' ;

Поток Φ – равен интегралу от индукции по грани 1-1'-4'-4 или 2-2'-3'-3 .
МДС приложена к ребру 1-2.

Направления обхода граней указаны векторами $d\bar{l}$. Направление обхода грани и положительное направление нормали связаны между собой правилом правого винта: $\bar{n}_l = \bar{q}_x$, $\bar{n}_\phi = \bar{q}_y$.

Нахождение тока i

Проинтегрируем плотность тока на грани 1-2-3-4, воспользовавшись при этом ранее введенными обозначениями:

$$i = \int_{S_l=1234} \bar{J} d\bar{S}_l$$

$$\bar{J} = \bar{q}_x J_x = \bar{q}_x J_m \cos(\omega t + \psi_J) = \text{Re}(\dot{\bar{J}})$$

$$\dot{\bar{J}} = \bar{q}_x \dot{J}_m \dot{a}, \quad \dot{J}_m = J_m e^{j\psi_J}, \quad \dot{a} = e^{j\omega t}$$

Выражение для тока i будем искать в том же виде:

$$i = I_m \cos(\omega t + \psi_l) = \text{Re}(\dot{I}_m \dot{a}) = \text{Re}(\dot{I}),$$

другими словами, будем использовать **временные комплексы интегральных величин**:

$$\text{комплексная амплитуда: } \dot{I}_m = I_m e^{j\psi_l}, \quad \dot{I} = \dot{I}_m \dot{a} .$$

Плотность тока под знаком интеграла выразим аналогично, после чего получим:

$$i = \text{Re}(\dot{I}_m \dot{a}) = \int_{S_l} \text{Re}(\dot{\bar{J}}) d\bar{S}_l .$$

Это выражение позволяет выразить амплитуду **интегральной** величины (тока) через амплитуды величин поля. Изменим порядок интегрирования и определения действительной части в правой части уравнения:

$$\text{Re}(\dot{I}_m \dot{a}) = \text{Re} \int_{S_l} \dot{\bar{J}} d\bar{S}_l ,$$

откуда

$$\dot{I}_m = \frac{1}{\dot{a}} \int_{S_I=1234} \dot{J} d\bar{S}_I. \quad (13.47)$$

Это выражение полезно потому, что пространственное распределение плотности тока мы уже нашли, и таким образом, мы можем теперь определять комплексную амплитуду тока через выделенный участок какой-либо поверхности.

Выразив пространственно-временной комплекс \dot{J} и пространственный вектор $d\bar{S}_I$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= \bar{q}_x \dot{a} \dot{J}_m = \bar{q}_x \dot{a} \dot{J}_{me} e^{-\alpha z} \\ dS_I &= \bar{n}_I l_H dz = \bar{q}_x l_H dz \end{aligned}$$

и учтя (13.40), получим:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{m1234} &= \frac{1}{\dot{a}} \int_{S_I=1234} \dot{J} d\bar{S}_I = \frac{1}{\dot{a}} \int_{S_I=1234} (\bar{q}_x \dot{a} \dot{J}_{me} e^{-\alpha z}) (\bar{q}_x l_H dz) = \\ l_H \dot{J}_{me} \int_{z=0}^{\infty} e^{-\alpha z} dz &= \frac{\dot{J}_{me} l_H}{\alpha} = \dot{H}_{me} l_H = \dot{F}_m \end{aligned} \quad (13.48)$$

В (13.48) $\dot{J}_{me} = J_{me} e^{j\omega t} = \alpha \dot{H}_{me}$ – комплексная амплитуда плотности тока на границе полупространства, т. е. при $z = 0$. Следует также помнить, что \dot{I}_{m1234} – комплексная амплитуда тока *через площадку 1-2-3-4*, в то время как для напряженностей, индукции и плотности тока комплексные амплитуды определены *для точки* с координатой z .

При выводе выражения (13.48) также использовано:

$$\int_{z=0}^{\infty} e^{-\alpha z} dz = \frac{1}{(-\alpha)} e^{-\alpha z} \Big|_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

Таким образом, в рассмотренном примере *комплексная амплитуда тока через площадку 1-2-3-4*, расположенную в плоскости yOz , *равна комплексной амплитуде МДС, приложенной к ребру 1-2 с длиной l_H* .

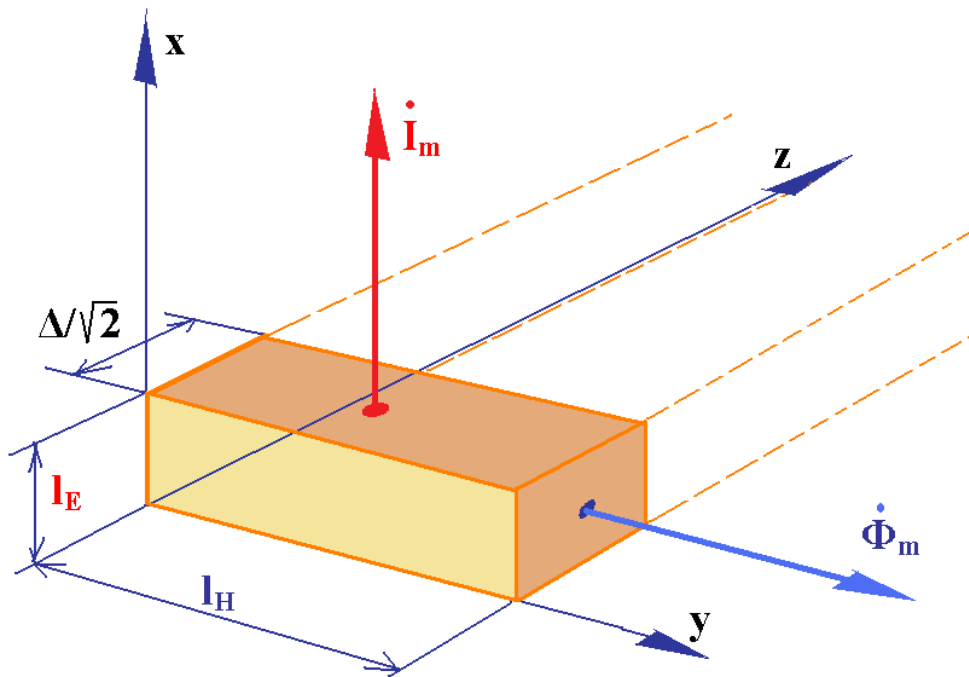


Рис. 13.9. К определению эквивалентной глубины проникновения электромагнитного поля в проводящее магнитное полупространство

Пользуясь ранее данным определением глубины проникновения поля в проводящее магнитное полупространство, можно доказать, что комплексные амплитуды электрического тока и магнитного потока через грани $l_H \times z$ и $l_E \times z$ при $z \rightarrow \infty$ равны соответственно потоку плотности тока и потоку магнитной индукции через грани, имеющие длину по оси z , равную $\Delta/\sqrt{2}$:

$$\dot{I}_m = \dot{J}_{me} l_H \left(\frac{\Delta}{\sqrt{2}} \right) \quad (13.49)$$

$$\dot{\Phi}_m = \dot{B}_{me} l_E \left(\frac{\Delta}{\sqrt{2}} \right) \quad (13.50)$$

13.10. Переменное электромагнитное поле в пластине магнитопровода

Задача о переменном поле в стальной пластине имеет важное практическое значение. Может оказаться, что под действием вихревых токов, индуцируемых в проводящей стальной пластине, поле распределяется в ней неравно-

мерно. Это приводит к тому, что материал пластины (сталь) используется не-полно – чем сильнее проявляется поверхностный эффект, тем более «разгру-женной» от магнитного потока и тока оказывается внутренняя ее часть.

На рисунке представлена задача, которую нам предстоит решить. Начало системы координат расположим в центре нижней грани пластины, ось z , вдоль которой распространяется поле, направим перпендикулярно боковым граням с размерами $l_E \times l_H = h \times l$. На боковых гранях заданы источники поля, здесь они изображены в виде фиктивных обмоток возбуждения, по w_B виткам которых протекает ток с комплексной амплитудой \dot{I}_{mB} , создавая на границе МДС \dot{F}_{mB} .

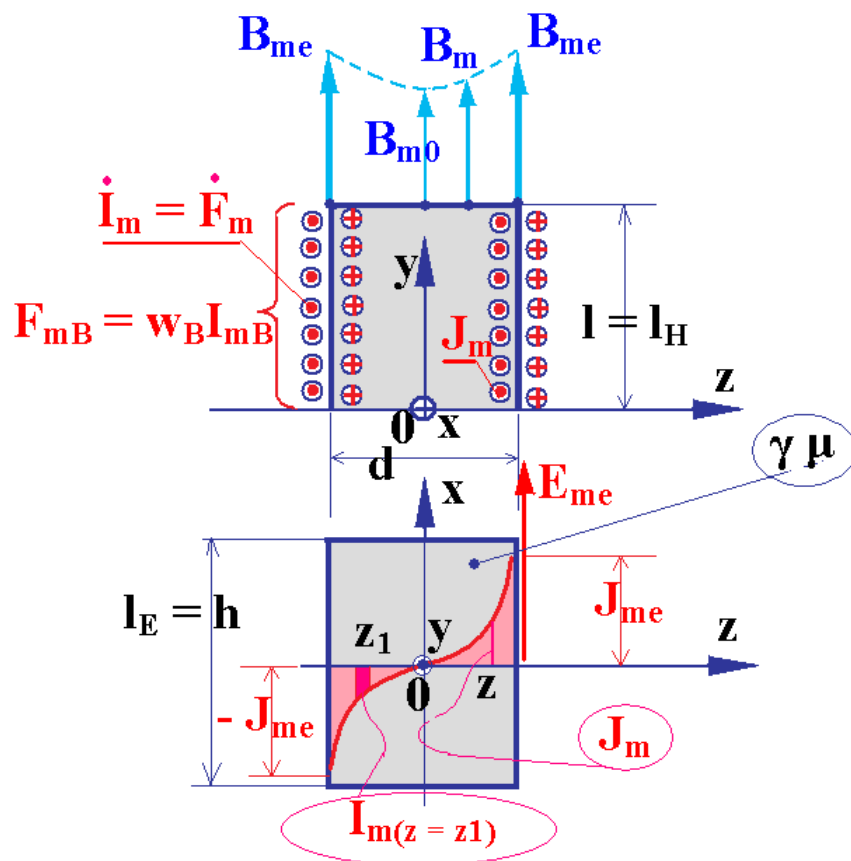


Рис. 13.10. Задача о проникновении переменного магнитного поля в ферромагнитную пластину с постоянной магнитной проницаемостью

Как было замечено ранее, МДС, приложенная к ребру прямоугольного объема (в данном случае l_H), равна полному току, протекающему в направлении оси x через грань, перпендикулярную боковым граням: $\dot{F}_m = \dot{I}_m$, что дает возможность определить напряженность поля на границах: $\dot{H}_{me} = \dot{F}_m / l = \dot{I}_m / l$. Необходимо найти распределение поля (т.е. индукции, плотности тока, распределение потерь и т.д.) внутри пластины. Заметим, что в рассматриваемой задаче поле проникает в пластину *с двух сторон*, а не с одной, как при рассмотрении полупространства.

Предположим, что $l \gg d$ и $h \gg d$ - в этом случае при решении задачи мы можем воспользоваться уравнениями, полученными для плоского поля. Кроме того, поскольку на гранях пластины заданы комплексные амплитуды МДС, предполагается, что все величины поля изменяются во времени синусоидально.

Комплексные величины поля выражаются через их комплексные амплитуды:

$$\dot{H}_y = \dot{H}_m e^{j\omega t} = H_m e^{j\psi_H}$$

$$\dot{E}_x = \dot{E}_m e^{j\omega t}$$

$$\dot{J}_x = \gamma \dot{E}_x = \dot{J}_m e^{j\omega t}$$

На основании уравнений, связывающих комплексные амплитуды величин поля (13.26) и (13.27), получим дифференциальное уравнение для напряженности магнитного поля, которое совпадает по форме с (13.28):

$$\frac{d^2 \dot{H}_m}{dz^2} = j\omega\gamma\mu \dot{H}_m,$$

однако решение этого уравнения будем искать *при других граничных условиях*, т.к. в рассматриваемом случае имеются не одна, а две граничные плоскости.

Корни характеристического уравнения и общий вид решения – те же, что и при рассмотрении магнитного проводящего полупространства (см. (13.29) и (13.30)):

$$p_{1,2} = \pm\alpha = \pm\sqrt{j\omega\gamma\mu} = \pm(1+j)k, \text{ где } k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}} = \frac{1}{\Delta}$$

$$\dot{H}_m = \dot{H}_1 e^{-\alpha z} + \dot{H}_2 e^{\alpha z}.$$

Теперь граничные значения комплексных амплитуд напряженности должны быть одинаковыми на обеих боковых поверхностях пластины:

$$\dot{H}_{me} = \dot{H}_{m(z=-d/2)} = \dot{H}_{m(z=d/2)},$$

откуда нетрудно получить:

$$\dot{H}_1 = \dot{H}_2 = \dot{H}. \quad (13.51)$$

Рассмотрим более подробно граничные условия.

$$\dot{H}_{m(z=d/2)} = \dot{H}_1 e^{\left(-\alpha\frac{d}{2}\right)} + \dot{H}_2 e^{\left(\alpha\frac{d}{2}\right)} = \dot{H}_{me}$$

$$\dot{H}_{m(z=-d/2)} = \dot{H}_1 e^{\left(\alpha\frac{d}{2}\right)} + \dot{H}_2 e^{\left(-\alpha\frac{d}{2}\right)} = \dot{H}_{me}$$

Вычтем первое уравнение из второго:

$$\left(\dot{H}_1 - \dot{H}_2\right) e^{\left(\alpha\frac{d}{2}\right)} + \dot{H}_2 e^{\left(-\alpha\frac{d}{2}\right)} = 0$$

или

$$\left(\dot{H}_1 - \dot{H}_2\right) 2\text{sh}\left(\frac{\alpha d}{2}\right) = 0,$$

откуда

$$\dot{H}_1 = \dot{H}_2 = \dot{H} = \frac{\dot{H}_{me}}{2\text{ch}\left(\frac{\alpha d}{2}\right)}, \quad (13.52)$$

следовательно, выражения для величин поля имеют вид:

$$\dot{H}_m = \dot{H}(e^{-\alpha z} + e^{\alpha z}) = 2\dot{H}\text{ch}(\alpha z). \quad (13.53)$$

и

$$\dot{B}_m = \mu\dot{H}_m = 2\mu\dot{H}\text{ch}(\alpha z).$$

Выражение для плотности тока получим, воспользовавшись (13.26):

$$j_m = -\frac{d\dot{H}_m}{dz} = -2\dot{H}\alpha\text{sh}(\alpha z).$$

Комплексная амплитуда индукции в середине пластины:

$$\dot{B}_{m(z=0)} = \dot{B}_{m0} = 2\mu\dot{H} \operatorname{ch}(\alpha \cdot 0) = 2\mu\dot{H} = \frac{\mu\dot{H}_{me}}{\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha d}{2}\right)}. \quad (13.54)$$

Заметим, что ранее мы уже сталкивались с тем, что затухание поля (в зазоре) описывалось с помощью функции гиперболического косинуса.

Распределение индукции внутри пластины можно выразить через значение индукции в середине пластины:

$$\dot{B}_m = \dot{B}_{m0} \operatorname{ch}(\alpha z). \quad (13.55)$$

Полезно также выразить значение индукции на границе через \dot{B}_{m0} :

$$\dot{B}_{me} = \dot{B}_{m\left(z=\pm\frac{d}{2}\right)} = \dot{B}_{m0} \operatorname{ch}\left(\frac{\alpha d}{2}\right). \quad (13.56)$$

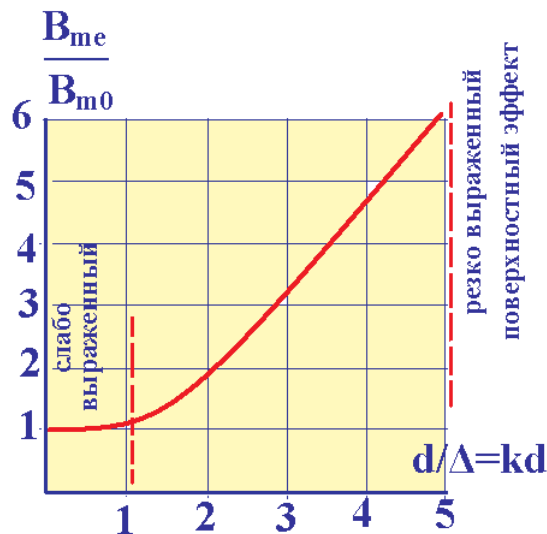


Рис. 13.11. К определению понятия слабо- и резко выраженного поверхностного эффекта

Для оценки глубины проникновения поля и степени проявления поверхностного эффекта полезно найти модули комплексных амплитуд:

$$\left. \begin{aligned} |\dot{B}_m| = B_m = |B_{m0}| |\mathbf{ch}(\alpha z)| &= |B_{m0}| \sqrt{\frac{\mathbf{ch}(2kz) + \cos(2kz)}{2}} \\ |\dot{B}_{me}| = B_{me} = |B_{m0}| \left| \mathbf{ch}\left(\alpha \frac{d}{2}\right) \right| &= |B_{m0}| \sqrt{\frac{\mathbf{ch}(2kd) + \cos(2kd)}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (13.57)$$

Напомним, что $\alpha = (1 + j)k$ и $k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}} = \frac{1}{\Delta}$.

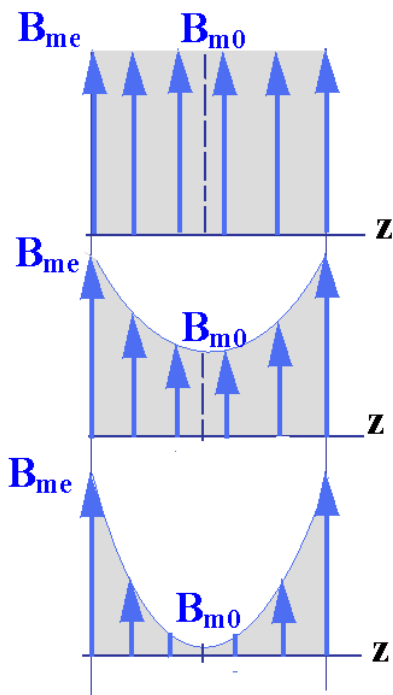
Проявление поверхностного эффекта можно оценить отношением комплексных амплитуд индукции на поверхности и в середине пластины:

$$\frac{B_{me}}{B_{m0}} = \sqrt{\frac{\mathbf{ch}(kd) + \cos(kd)}{2}}, \quad (13.58)$$

где

$$kd = \frac{d}{\Delta} \quad (13.59)$$

представляет собой отношение толщины пластины к глубине проникновения поля *в проводящее полупространство из материала пластины*



Для вычислений удобно представить гиперболические и тригонометрические функции в виде рядов:

$$\mathbf{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad \mathbf{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

При $kd = 1$ (слабый поверхностный эффект):

$$\frac{B_{me}}{B_{m0}} \leq \sqrt{\frac{\mathbf{ch}(kd) + \cos(kd)}{2}} \Bigg|_{kd=1} = \sqrt{\frac{2 + 2 \frac{1^4}{4!}}{2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{24}} = 1,02$$

Рис.13.12. Распределение индукции по толщине пластины при слабо, умеренно и резко выраженном поверхностном эффекте

Аналогичные вычисления для

$1 \leq kd \leq 5$ дают диапазон изменения $\frac{B_{me}}{B_{m0}}$

от единицы до шести.

При больших значениях kd имеет место резко выраженный поверхностный эффект.

Заметим, что так же, как это было установлено ранее для полупространства, при проникновении поля внутрь пластины меняется не только амплитуда, но и фазовый угол индукции.

13.10.1. Комплексная амплитуда среднего значения индукции по толщине пластины (листа)

Среднее значение индукции вычислим обычным образом: путем интегрирования найденного распределения индукции по толщине пластины:

$$\dot{B}_{m(cp)} = \frac{1}{d \cdot h} \int_{-d/2}^{d/2} \dot{B}_m h dz = \frac{\dot{B}_{m0}}{d} \int_{-d/2}^{d/2} \mathbf{ch}(\alpha z) dz = \dot{B}_{m0} \frac{\mathbf{sh}\left(\frac{\alpha d}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha d}{2}\right)} = \frac{\dot{\Phi}_m}{d \cdot h}. \quad (13.60)$$

Из (13.60) можно выразить модуль средней индукции через модуль индукции в середине пластины:

$$B_{m(cp)} = |\dot{B}_{m(cp)}| = |\dot{B}_{m0}| \frac{\left| \mathbf{sh}\left(\frac{\alpha d}{2}\right) \right|}{\left| \frac{\alpha d}{2} \right|} = B_{m0} \frac{\sqrt{\frac{\mathbf{ch}(kd) - \cos(kd)}{2}}}{\left(\frac{kd}{2}\right)}, \quad (13.61)$$

где

$$B_{m0} = \frac{\mu H_{me}}{\mathbf{ch}\left(\frac{\alpha d}{2}\right)}.$$

13.10.2. Уменьшение магнитного потока пластины за счет поверхностного эффекта (при той же МДС на границе)

Уменьшение потока в пластине может быть оценено отношением амплитуды средней индукции к амплитуде индукции на границе:

$$\frac{B_{m(cp)}}{B_{me}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\operatorname{ch}(kd) - \cos(kd)}}{k \cdot d \sqrt{\operatorname{ch}(kd) + \cos(kd)}} \quad (13.62)$$

При резко выраженном поверхностном эффекте ($kd > 5$) гиперболический косинус существенно больше тригонометрического и поэтому

$$\frac{\Phi_m}{\Phi_{m0}} = \frac{B_{m(cp)}}{B_{me}} \approx \frac{\sqrt{2}}{kd} = \frac{\sqrt{2}\Delta}{d}. \quad (13.63)$$

Таким образом, если толщина пластины заметно больше глубины проникновения поля (*в полупространство из материала пластины*), происходит существенное уменьшение магнитного потока (*при той же приложенной МДС*) – можно говорить об *увеличении магнитного сопротивления* пластины.

Определим магнитные сопротивления пластины при отсутствии и при проявлении поверхностного эффекта:

$$Z_{\Phi 0} = \frac{F_m}{\Phi_{m0}}, \quad (13.64)$$

$$Z_{\Phi ПЭ} = \frac{F_m}{\Phi_{mПЭ}}. \quad (13.65)$$

Тогда изменение магнитного сопротивления пластины при проявлении поверхностного эффекта может быть оценено отношением

$$\frac{Z_{\Phi ПЭ}}{Z_{\Phi 0}} = \frac{kd}{\sqrt{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}\Delta}. \quad (13.66)$$

Напомним, что здесь Δ - глубина проникновения поля в *полупространство* из материала пластины. Заметим также, что ранее было доказано (см.(13.49) и (13.50)), что бесконечное полупространство может быть «свернуто» и представлено эквивалентным поверхностным слоем толщиной $\Delta/\sqrt{2}$. Учитывая это, запишем (13.66) несколько иначе:

$$\frac{Z_{\Phi ПЭ}}{Z_{\Phi 0}} = \left(\frac{d}{2}\right) / \left(\frac{\Delta}{\sqrt{2}}\right), \quad (13.66 a)$$

что можно прочесть следующим образом: *при проявлении поверхностного эффекта магнитное сопротивление пластины увеличивается во столько*

же раз, во сколько половина толщины пластины больше толщины эквивалентирующего слоя полупространства ($\Delta/\sqrt{2}$).

Теперь на очереди рассмотрение потерь в пластине при поверхностном эффекте. Однако прежде надо найти распределение плотности вихревых токов.

13.10.3. Комплексная амплитуда плотности тока в пластине

С учетом ранее выявленной связи плотности тока и напряженности магнитного поля (13.26) можно выразить комплексную амплитуду плотности тока через комплексную амплитуду индукции в середине пластины:

$$\dot{J}_m = -\frac{d\dot{H}_m}{dz} = -2\dot{H}\alpha \cdot \mathbf{sh}(\alpha z) = -\frac{\dot{B}_{m0} \cdot \alpha}{\mu} \mathbf{sh}(\alpha z), \quad (13.67)$$

где \dot{H} - постоянная в решении основного дифференциального уравнения (см. (13.52)).

Модуль плотности тока:

$$|\dot{J}_m| = J_m = |\dot{B}_{m0}| \alpha \left| \frac{1}{\mu} \mathbf{sh}(\alpha z) \right| = B_{m0} \frac{\sqrt{2} \cdot k}{\mu} \sqrt{\frac{\mathbf{ch}(2kz) - \mathbf{cos}(2kz)}{2}} \quad (13.68)$$

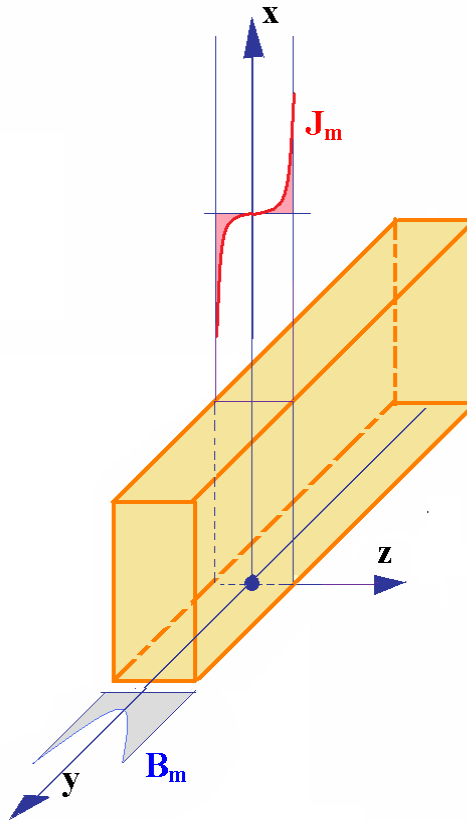


Рис. 13.13. Распределение плотности вихревых токов и индукции по толщине ферромагнитной пластины

При слабом поверхностном эффекте ($kd \leq 1$)

$$B_{me} = B_{m0} \sqrt{\frac{\text{ch}(kd) + \cos(kd)}{2}} \approx B_{m0} \sqrt{\frac{2}{2}} = B_{m0} \quad (13.69)$$

и

$$B_{m(cp)} = B_{m0} \sqrt{\frac{0,5 \text{ch}(kd) + \cos(kd)}{\left(\frac{kd}{\sqrt{2}}\right)}} \approx B_{m0} \sqrt{\frac{\frac{(kd)^2}{2}}{\left(\frac{kd}{\sqrt{2}}\right)}} = B_{m0} \quad (13.70)$$

Здесь использовано:

$$\text{ch}(kd) \approx 1 + \frac{(kd)^2}{2}, \quad \cos(kd) \approx 1 - \frac{(kd)^2}{2}.$$

Для амплитуды плотности тока получим следующее:

$$J_m = B_{m0} \frac{\sqrt{2} \cdot k}{\mu} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2kz) - \cos(2kz)}{2}} \approx B_{m0} \frac{\sqrt{2} \cdot k}{\mu} \sqrt{\frac{(2kz)^2}{2}} =$$

$$= B_{m0} \frac{\sqrt{2} \cdot k}{\mu} \frac{\sqrt{2} \cdot kz}{1} = \frac{2B_{m0} k^2 z}{\mu} \quad (13.71)$$

откуда на границе:

$$J_{me(z=d/2)} = \frac{B_{m0} k^2 d}{\mu} \quad (13.72)$$

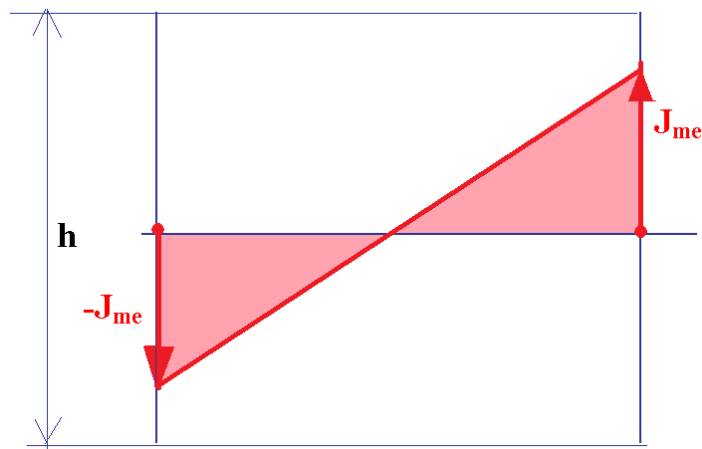
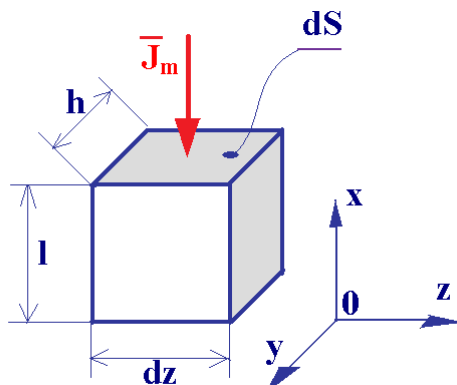


Рис. 13.13. Распределение плотности вихревых токов по толщине ферромагнитной пластины при слабо выраженном поверхностном эффекте

Теперь можно найти потери в пластине от вихревых токов.

13.11. Расчет потерь при различном проявлении поверхностного эффекта

13.11.1. Потери при слабом поверхностном эффекте



Рассмотрим элементарный объем dz , расположенный на расстоянии z от начала координат, достаточно малый для того чтобы считать, что плотность тока в нем распределена равномерно.

$$dV = h \cdot l \cdot dz$$

Нетрудно показать, что электрические потери в этом объеме равны:

$$dP = \frac{\bar{J}_m^2}{2\gamma} dV = \frac{\bar{J}_m^2}{2\gamma} l \cdot h \cdot dz \quad (13.73)$$

Рис.13.15. К выводу выражения для электрических потерь в элементарном объеме

Полные потери в пластине, имеющей размеры h по оси y и l по оси x :

$$P = 2 \int_0^{d/2} \frac{J_m^2}{2\gamma} \cdot lh \cdot dz = 2 \frac{lh}{2\gamma} \omega^2 \gamma^2 \int_0^{d/2} B_{m0}^2 z^2 dz = B_{m0}^2 \cdot lh \cdot \gamma \omega^2 \frac{1}{3} \left(\frac{d}{2} \right)^3.$$

Здесь амплитуда плотности тока выражена через B_{m0}^2 по формуле, выведенной для слабо выраженного поверхностного эффекта:

$$J_m = \frac{2B_{m0}k^2z}{\mu}, \text{ где } k^2 = \frac{\omega\gamma\mu}{2} = \frac{1}{\Delta^2}.$$

Удельные потери в единице объема (подчеркнем, **при слабо выраженном поверхностном эффекте**):

$$p = \frac{P}{lhd} = B_{m0}^2 \gamma \omega^2 \frac{d^2}{24}. \quad (13.74)$$

Отметим, что при слабо выраженном поверхностном эффекте удельные потери в проводящем массиве зависят от квадрата индукции и от квадрата частоты (потери от гистерезиса этой формулой не учитываются).

Поскольку при слабо выраженном поверхностном эффекте индукция распределена по объему массива равномерно, в (13.74) вместо B_{m0} может быть поставлено среднее значение индукции:

$$p = \frac{P}{lhd} = B_{m(ср)}^2 \gamma \omega^2 \frac{d^2}{24}. \quad (13.75)$$

13.11.2. Потери при среднем поверхностном эффекте

Формулу для удельных потерь получим, воспользовавшись выражением (13.68), описывающим распределение плотности тока по объему массива в общем случае:

$$p_0 = \frac{dP}{dV} = \frac{B_{m0}^2 \omega}{4\mu} (\mathbf{ch}(2kz) - \mathbf{cos}(2kz)) \quad (13.76)$$

Рассматриваемый случай существенно отличается от предыдущего тем, что удельные потери оказываются зависимыми от магнитной проницаемости.

В (13.76) можно подставить среднее значение индукции (см. (13.70)):

$$p_0 = B_{m(cp)}^2 \frac{\omega k^2 d^2}{4\mu} \frac{(\mathbf{ch}(2kz) - \mathbf{cos}(2kz))}{(\mathbf{ch}(kd) - \mathbf{cos}(kd))}. \quad (13.77)$$

Формулы (13.76) и (13.77) представляют удельные (объемные) потери, рассчитанные для элементарного объема, отстоящего, как было сказано, от начала координат на расстояние z . Для того чтобы получить *средние* по объему пластины (листа) удельные потери, надо проинтегрировать p_0 , выраженные по (13.76) или по (13.77), по всему объему массива. В результате получим:

$$P = \int_V p_0 dV = 2lh \int_0^{d/2} p_0 dz = B_{m(cp)}^2 lh \left(\frac{\omega}{4\mu} \right) kd^2 \frac{\mathbf{sh}(kd) - \mathbf{sin}(kd)}{\mathbf{ch}(kd) - \mathbf{cos}(kd)}. \quad (13.78)$$

Средние удельные (объемные) потери при среднем поверхностном эффекте (*общий случай*):

$$p_{(cp)} = \frac{P}{lhd} = B_{m(cp)}^2 \frac{\omega}{4\mu} (kd) \frac{\mathbf{sh}(kd) - \mathbf{sin}(kd)}{\mathbf{ch}(kd) - \mathbf{cos}(kd)}. \quad (13.79)$$

Полезно помнить, что в (13.77) – (13.79) kd равно отношению толщины пластины к глубине проникновения поля в проводящее магнитное полупространство из материала пластины:

$$kd = \frac{d}{\Delta}.$$

Может показаться, что расчет по (13.77) и (13.79) при одинаковых условиях, т.е. при $kd \approx 1$ должен привести к разным результатам, тем более что, как уже было отмечено, потери по (13.77) не зависят от магнитной проницаемости, в то время как из (13.79) такая зависимость вроде бы следует. Однако надо иметь в виду, что при выводе выражения для плотности тока при отсутствии поверхностного эффекта (13.71) были использованы приближенные выражения

для гиперболических и тригонометрических функций, что и дало возможность при выводе (13.74) исключить зависимость от магнитной проницаемости:

$$\operatorname{ch}(2kz) - \cos(2kz) \approx 1 + \frac{(2kz)^2}{2!} - \left(1 - \frac{(2kz)^2}{2!}\right) = (2kz)^2$$

и

$$\frac{k^2}{\mu} = \frac{\omega\gamma\mu}{2\mu} = \frac{\omega\gamma}{2}.$$

В действительности вычисления по этим формулам дают непротиворечивые результаты.

Ниже приведены результаты расчетов удельных потерь при различной степени проявления поверхностного эффекта, выполненные в программе *MathCAD*.

Рекомендуется при самостоятельной подготовке повторить эти расчеты, варьируя исходные данные и проанализировать полученные зависимости.

Подобные короткие *MathCAD*'овские расчеты полезны тем, что позволяют наглядно представить зависимость, в данном случае потерь, от свойств материала, размеров и данных режима (частоты).

Расчет по формулам для удельных потерь**Исходные данные:**

$$d := 0.5 \cdot \text{мм} \quad \mu_r := 1000 \quad \gamma := 10 \cdot 10^6 \cdot \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1} \quad f := 50 \cdot \text{Гц} \quad B_0 := 1 \cdot \text{Тл}$$

Вычисления:

$$\mu := \mu_r \cdot \mu_0 \quad \mu = 1.257 \times 10^{-3} \frac{\text{Гн}}{\text{м}} \quad \omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad \omega = 314.159 \text{ с}^{-1}$$

$$k := \sqrt{\frac{\omega \cdot \gamma \cdot \mu}{2}} \quad k = 1.405 \text{ мм}^{-1} \quad \Delta := \frac{1}{k} \quad \Delta = 0.712 \text{ мм}$$

$$kd := k \cdot d \quad kd = 0.702$$

Удельные потери при слабом ПЭ:

$$P_{\text{СлПЭ}} := B_0^2 \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot \frac{d^2}{24} \quad P_{\text{СлПЭ}} = 1.028 \times 10^4 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3}$$

Удельные потери при среднем ПЭ:

$$B_{\text{ср}} := B_0 \cdot \frac{\sqrt{\frac{\cosh(kd) - \cos(kd)}{2}}}{\frac{kd}{\sqrt{2}}} \quad B_{\text{ср}} = 1.000338 \text{ Тл}$$

$$P_{\text{СрПЭ}} := B_{\text{ср}}^2 \cdot \frac{\omega}{4 \cdot \mu} \cdot kd \cdot \frac{\sinh(kd) - \sin(kd)}{\cosh(kd) - \cos(kd)} \quad P_{\text{СрПЭ}} = 1.028 \times 10^4 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3}$$

При плотности стали $d_{\text{Fe}} := 7800 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$

$$P_{\text{уд}} := \frac{P_{\text{СрПЭ}}}{d_{\text{Fe}}} \quad P_{\text{уд}} = 1.318 \text{ Вт} \cdot \text{кг}^{-1}$$

Рис. 13.16. Фрагмент MathCAD'овского файла с расчетом удельных потерь

При резко выраженном поверхностном эффекте формулы для расчета потерь упрощаются:

при $kd \geq 5$ $\text{sh}(kd) \approx \text{ch}(kd)$, $\text{ch}(kd) \gg \cos(kd)$, $\text{sh}(kd) \gg \sin(kd)$

и

$$P_{(cp)} \approx B_{m(cp)}^2 \frac{\omega}{4\mu} kd = \frac{\omega^{1,5} \gamma^{0,5} d}{4\sqrt{2}\mu^{0,5}} B_{m(cp)}^2. \quad (13.80)$$

Некоторые выводы

1) Потери при слабо выраженном поверхностном эффекте пропорциональны квадрату частоты, квадрату толщины пластины и электропроводности материала.

2) Потери с учетом поверхностного эффекта всегда меньше, чем без его учета, т. е. когда индукция по толщине пластины предполагается постоянной, равной той, которая задана на ее граничной (боковой) поверхности.

Посмотрим, как изменятся удельные потери при увеличении толщины рассмотренной выше пластины от 0,5 до 4,0 мм.

Сравнение удельных потерь при слабом и резком проявлении поверхностного эффекта

$$\underset{\text{мм}}{d} := 4 \quad \underset{\text{мм}^{-1}}{k} := \sqrt{\frac{\omega \cdot \gamma \cdot \mu}{2}} \quad k = 1.405 \text{ мм}^{-1} \quad \underset{\text{мм}}{kd} := k \cdot d \quad kd = 5.62$$

$$\text{Удельные потери при слабом ПЭ: } \underset{\text{Вт} \cdot \text{м}^{-3}}{P_{\text{слПЭ}}} := B_0^2 \cdot \gamma \cdot \omega^2 \cdot \frac{d^2}{24} \quad P_{\text{слПЭ}} = 6.58 \times 10^5 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3}$$

Удельные потери при резком ПЭ:

$$\underset{\text{Тл}}{B_{\text{ср}}} := B_0 \cdot \frac{\sqrt{\frac{\cosh(kd) - \cos(kd)}{2}}}{\frac{kd}{\sqrt{2}}} \quad B_{\text{ср}} = 2.0838 \text{ Тл}$$

$$\underset{\text{Вт} \cdot \text{м}^{-3}}{P_{\text{ср.РПЭ}}} := B_{\text{ср}}^2 \cdot \frac{\omega}{4\mu} \cdot kd \quad P_{\text{ср.РПЭ}} = 1.525 \times 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3}$$

Рис. 13.17. Фрагмент *MathCAD*'овского файла с расчетом удельных потерь при толщине пластины 4 мм

В приведенном примере мы сталкиваемся, казалось бы, с результатом, обратном тому, что утверждается выше в п.2 выводов. Объясняется это тем, что в формуле для расчета потерь при резко выраженном поверхностном эффекте

используется среднее значение индукции, рассчитанное по тому же значению индукции в середине пластины B_0 , что и при отсутствии поверхностного эффекта, а при этом условии среднее значение индукции (и, следовательно, потока) в

$$\frac{\sqrt{\frac{\cosh(kd) - \cos(kd)}{2}}}{\frac{kd}{\sqrt{2}}} = 2.084$$

раз больше, чем при той же индукции в середине пластины и при отсутствии поверхностного эффекта. Таким образом, если мы хотим найти удельные потери в пластине при том же магнитном потоке, что обычно и интересует расчетчика на практике, то найденное значение $15,25 \cdot 10^5$ Вт/м³ следует разделить на $2,084^2$. Прделав это, получим $3,51 \cdot 10^5$ Вт/м³, что меньше, чем $6,58 \cdot 10^5$ Вт/м³ при отсутствии поверхностного эффекта.

13.11.3. Пример расчета потерь на участке магнитопровода

Дано: стальная пластина имеет толщину 7 мм, ширину 100 мм и длину 1000 мм. Электропроводность материала пластины равна $10 \text{ МСм} = 10 \cdot 10^6 \text{ (Ом} \cdot \text{м)}^{-1}$, относительная магнитная проницаемость $\mu_r = 1000$. Пластина перемагничивается с частотой 50 Гц. Переменное поле создается в пластине обмоткой из $w = 1000$ витков, имеющей сопротивление $R = 2,64 \text{ Ом}$. В пластине создается поле со средней индукцией 0,213 Тл.

Найти. 1) Магнитный поток в пластине Φ_m , индукцию на поверхности пластины B_{me} , амплитуду тока в возбуждающей обмотке I_m , потери в пластине P , потери в обмотке P_s , магнитное сопротивление пластины Z_Φ .

2) Найти те же величины для пакета пластин, составленного из 13 изолированных друг от друга пластин толщиной по 0,5 мм каждая, имеющих те же размеры $l = 1000$ мм и $h = 100$ мм и общую толщину (по стали) такую же, как и массивная пластина $13 \times 0,5 = 7$ мм.

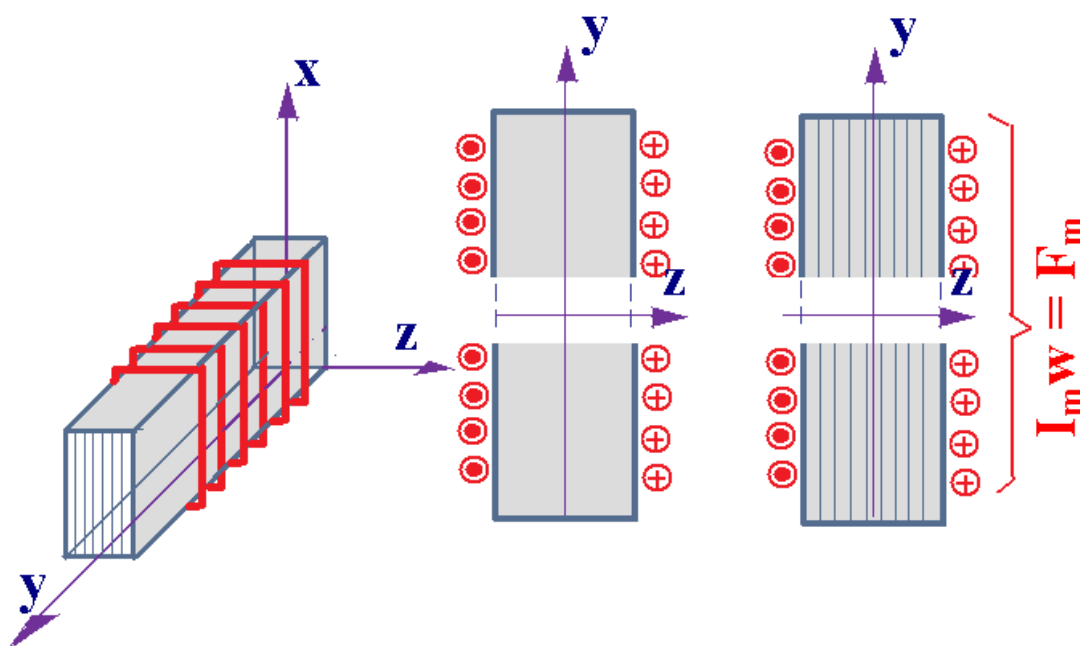


Рис. 13.18. К расчету потерь в массивной пластине и в шихтованном сердечнике той же толщины

Для сплошной пластины (толщиной 7 мм) при глубине проникновения поля в полупространство 0,712 мм (как и в рассмотренных выше примерах), значение критерия kd равно 9,83, что соответствует резко выраженному поверхностному эффекту ($kd > 5$).

По (13.63)

$$B_{me} = B_{m(cp)} \frac{d}{\Delta\sqrt{2}} = 0,214 \frac{7 \cdot 10^{-3}}{0,712 \cdot 10^{-3} \sqrt{2}} = 1,5 \quad \text{Тл}$$

Потери в пластине :

$$\begin{aligned} P &= p_{cp} \cdot dlh = B_{m(cp)}^2 \frac{\omega}{4\mu} kd \cdot dlh = \\ &= 0,214^2 \frac{2\pi 50}{4 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 1000} 1408 \cdot 7 \cdot 10^{-3} \cdot 7 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 \cdot 1 = 19,6 \quad \text{Вт} \end{aligned}$$

Для пакета из 13 пластин отношение толщины пластины к глубине проникновения поля (т.е. критерий kd) меньше единицы, таким образом, имеет место слабый поверхностный эффект. Удельные потери равны:

$$P_{\text{шхт.ср}} = B_{m(\text{ср})}^2 \frac{\omega}{4\mu} \left(\frac{(kd_0)^2}{3} \right) =$$

$$= 0,214^2 \frac{2\pi 50}{4 \cdot 4\pi 10^{-7} \cdot 1000} \left(\frac{(1408 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3})^2}{3} \right) = 472 \quad \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$$

что соответствует полным потерям в пластине

$$P_{\text{шхт}} = 14d_0 \cdot lh \cdot p_{\text{шхт.ср}} = 14 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 0,1 \cdot 472 = 0,33 \quad \text{Вт}$$

Таким образом, при той же средней индукции потери в пакете из 13 пластин толщиной по 0,5 мм в 59,4 раза меньше, чем в массивной пластине толщиной 7 мм.

Продолжение примера

Определим еще некоторые величины.

МДС, необходимая для создания заданной средней индукции в каждом из случаев:

$$F_m = \frac{B_m l}{\mu} = \frac{1,5 \cdot 1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000} = 1193 \quad \text{А}$$

$$F_{m.\text{шхт}} = \frac{B_{m.\text{шхт}} l}{\mu} = \frac{0,214 \cdot 1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1000} = 170 \quad \text{А}$$

Потери в обмотке возбуждения из 1000 витков:

$$P_{\text{э}} = R \frac{I_m^2}{2} = 2,64 \frac{1,193^2}{2} = 1,87 \quad \text{Вт}$$

$$P_{\text{э.шхт}} = R \frac{I_{m.\text{шхт}}^2}{2} = 2,64 \frac{0,17^2}{2} = 0,0381 \quad \text{Вт}$$

Магнитный поток и магнитное сопротивление:

$$\Phi = \Phi_{m.\text{шхт}} = \Phi_m = dh \cdot B_{m(\text{ср})} = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 \cdot 0,214 = 14,98 \cdot 10^{-3} \quad \text{Вб}$$

$$Z_{\Phi} = \frac{F_m}{\Phi_m} = \frac{1193}{14,98} = 7,97 \cdot 10^6 \quad \text{Ом}^{-1} \text{с}^{-1}$$

$$Z_{\Phi.\text{шхт}} = \frac{F_{m.\text{шхт}}}{\Phi_{m.\text{шхт}}} = \frac{170}{14,98} = 1,14 \cdot 10^6 \quad \text{Ом}^{-1} \text{с}^{-1}$$

Общий вывод: для того чтобы при заданной частоте перемагничивания провести магнитный поток через пакет из тонких пластин, требуется создать меньшую МДС и, следовательно, затратить меньшую энергию.