

## Раздел 14. Переменное электромагнитное поле в прямоугольном проводнике в пазу электрической машины

### 14.1. Постановка и решение задачи для одного проводника

Ранее уже говорилось о том, что правильный учет вытеснения тока в проводниках обмоток якоря крупных электрических машин позволяет разработать эффективную конструкцию обмоток и существенно снизить как расход материалов, так и потери.

Ниже приведено аналитическое решение полевой задачи о распределении поля в прямоугольном пазу электрической машины, содержащем медную шину (см. рисунок). Впервые такая задача была рассмотрена в 1908 г. Ф. Эмде.

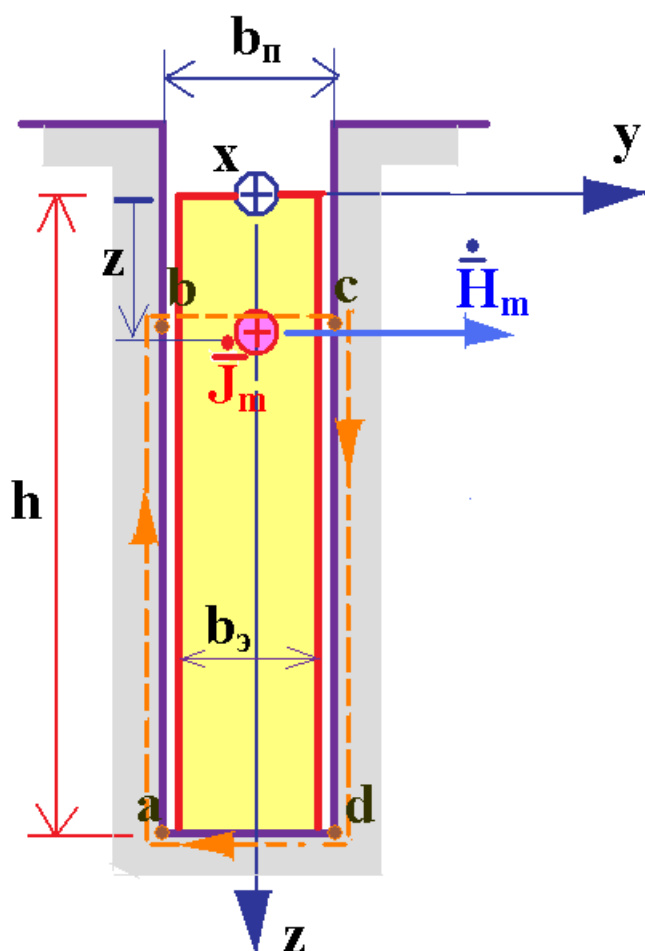


Рис. 14.1. Массивный проводник в прямоугольном пазу

Выберем направления осей координат в соответствии со сделанными ранее допущениями – так, чтобы пространственные векторы напряженности электрического поля и плотности тока были направлены по оси  $x$ , а векторы напряженности магнитного поля и индукции были направлены вдоль оси  $y$ . Переменное электромагнитное поле проникает в массив проводника при этом вдоль оси  $z$  – сверху вниз.

Обозначим:  $\dot{I}_m$  – полный ток проводника,  $\gamma$  – электропроводность материала проводника.

Изменим электропроводность материала провода и будем считать ее равной эквивалентной электропроводности

$$\gamma' = \frac{b_s}{b_n} \gamma.$$

При этом условии можно принять, что проводник занимает весь паз по ширине. Сопротивление провода постоянному току при такой замене не изменится:

$$r_0 = \frac{l}{\gamma \cdot hb_s} = \frac{l}{\gamma' \cdot hb_n}.$$

Перейдем к рассмотрению уравнений. Мы продолжаем пользоваться теми определениями и допущениями, которые ввели при изучении переменного электромагнитного поля в проводящем магнитном пространстве: используя соотношение между комплексными амплитудами

$$-\frac{d\dot{H}_m}{dz} = \dot{J}_m = \gamma' \dot{E}_m \quad (14.1)$$

получим уже рассмотренное раньше уравнение, в котором, однако, употребляются эквивалентные величины, отмеченные штрихом, соответствующие измененному значению электропроводности:

$$\frac{d^2 \dot{H}_m}{dz^2} = j\omega\gamma'\mu\dot{H}_m \quad (14.2)$$

Решением этого уравнения является:

$$\dot{H}_m = \dot{H}_1 e^{-\alpha' z} + \dot{H}_2 e^{\alpha' z},$$

где

$$\alpha' = \sqrt{j\omega\gamma'\mu} = (1+j)' \quad \text{и} \quad k' = \sqrt{\frac{\omega\gamma'\mu}{2}} = \sqrt{\frac{b_s\omega\gamma\mu}{2b_n}} = \frac{1}{\Delta'}.$$

Постоянные  $\dot{H}_1$  и  $\dot{H}_2$  находим, исходя из граничных условий на верхней и нижней гранях провода (рассматриваем контуры типа  $a-b-c-d$ ):

$$\dot{H}_{m(z=h)} \cdot b_n = 0$$

$$\dot{H}_{m(z=0)} \cdot b_n = \dot{I}_m$$

$$\text{при } z=0 \quad \dot{H}_1 + \dot{H}_2 = \frac{\dot{I}_m}{b_n}$$

$$\text{при } z=h \quad \dot{H}_1 e^{-\alpha'h} + \dot{H}_2 e^{\alpha'h} = 0,$$

откуда

$$\dot{H}_1 = \frac{\dot{I}_m e^{\alpha'h}}{2b_n \operatorname{sh}(\alpha'h)}, \quad (14.3)$$

$$\dot{H}_2 = -\frac{\dot{I}_m e^{\alpha'h}}{2b_n \operatorname{sh}(\alpha'h)}. \quad (14.4)$$

И после подстановки:

$$\dot{H}_m = \frac{-\dot{I}_m \operatorname{sh}(\alpha'(z-h))}{b_n \operatorname{sh}(\alpha'h)}. \quad (14.5)$$

Выражение для комплексной амплитуды плотности тока получим подстановкой (14.5) в (14.1):

$$\dot{J}_m = |\dot{J}_m| = \frac{I_m \sqrt{2k'}}{b_n} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(2k'(z-h)) + \cos(2k'(z-h))}{\operatorname{ch}(2k'h) - \cos(2k'h)}} \quad (14.6)$$

**Пример.** Вычислим распределение плотности тока по высоте прямоугольного стержня, расположенного в пазу постоянной ширины.

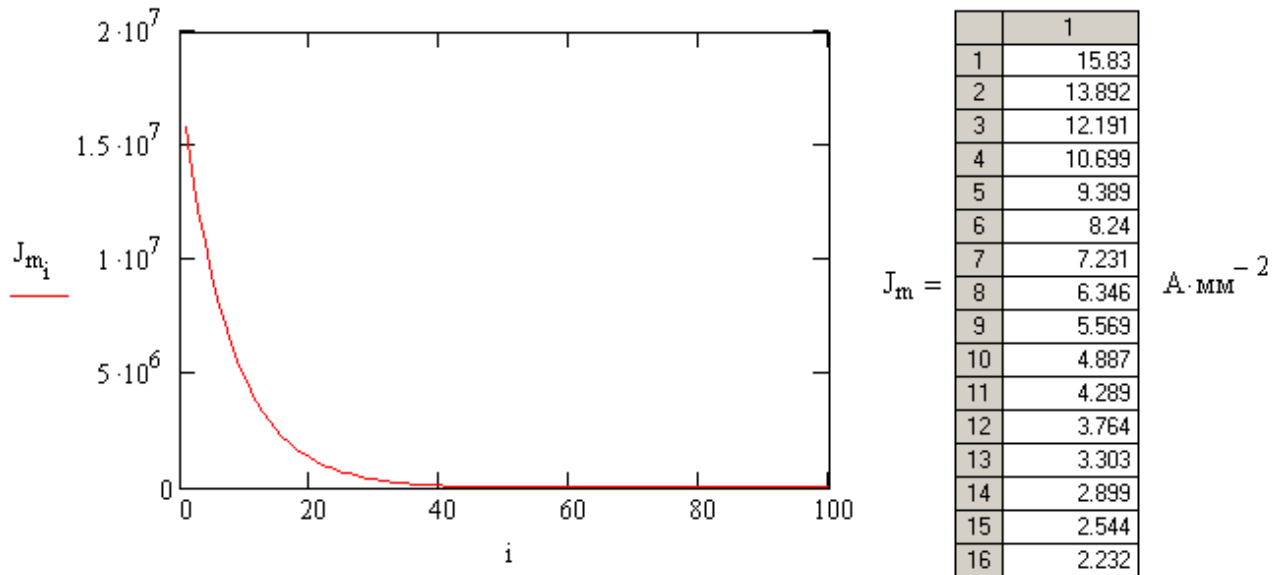
**Распределение плотности тока  
по высоте массивного прямоугольного стержня в пазу**

$b_{\Pi} := 25 \cdot \text{мм}$	$b_{\Sigma} := 19 \cdot \text{мм}$	$h := 140 \cdot \text{мм}$	$I_m := 3000 \cdot \text{А}$
$\gamma_{\text{меди}} := 58 \cdot 10^6 \cdot (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$	$f = 50 \text{ с}^{-1}$	$\omega = 314.159 \text{ с}^{-1}$	
$\gamma_{\text{меди.экв}} := \gamma_{\text{меди}} \frac{b_{\Sigma}}{b_{\Pi}}$		$\gamma_{\text{меди.экв}} = 4.408 \times 10^7 (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$	
$\alpha_{\text{ЭКВ}} := \sqrt{\omega \cdot \gamma_{\text{меди.экв}} \cdot \mu_0 \cdot i}$		$\alpha_{\text{ЭКВ}} = 0.093 + 0.093i \text{ мм}^{-1}$	
$k_{\text{ЭКВ}} := \sqrt{\frac{\omega \cdot \gamma_{\text{меди.экв}} \cdot \mu_0}{2}}$		$k_{\text{ЭКВ}} = 0.093 \text{ мм}^{-1}$	
$\Delta_{\text{ЭКВ}} := \frac{1}{k_{\text{ЭКВ}}}$		$\Delta_{\text{ЭКВ}} = 10.72 \text{ мм}$	

Для расчета зависимости плотности тока от координаты по высоте провода:

$$imax := 100 \quad i := 1..imax \quad dz := \frac{h}{imax} \quad z_1 := (i-1) \cdot dz$$

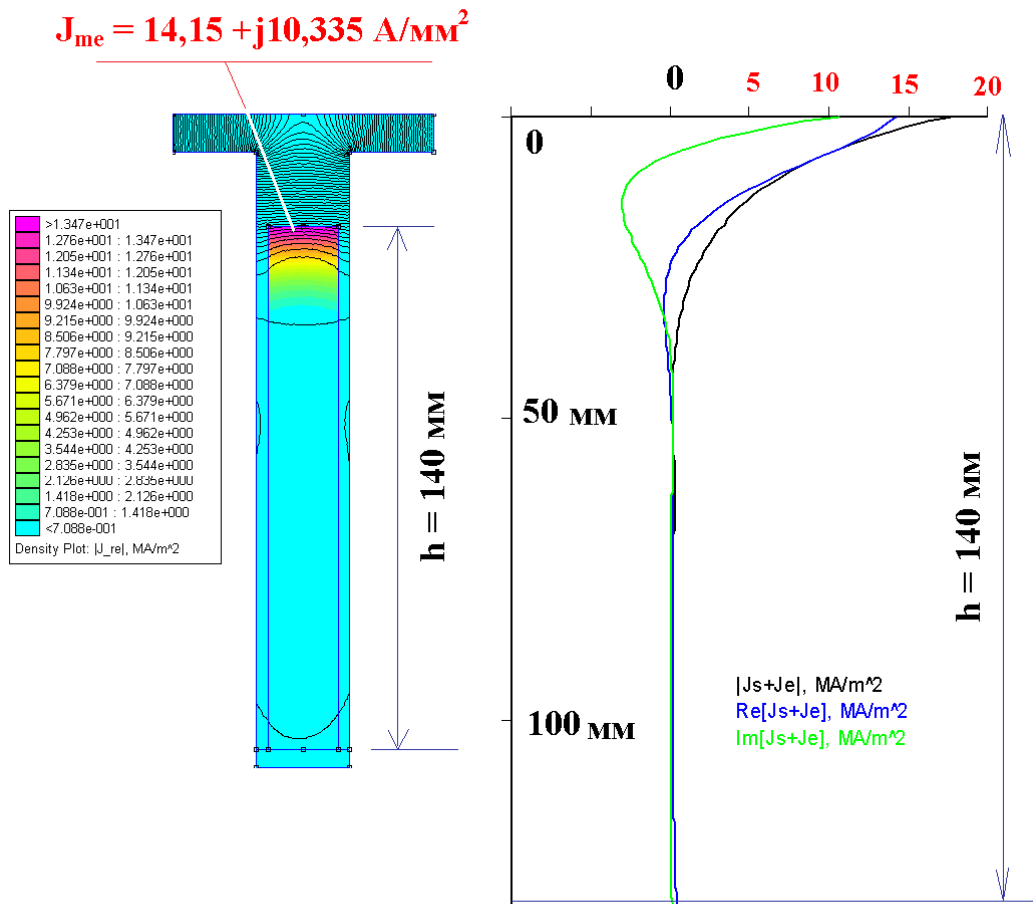
$$J_{m_i} := \frac{I_m \cdot \sqrt{2} \cdot k_{ЭКВ}}{b_{П}} \cdot \sqrt{\frac{\cosh[2 \cdot k_{ЭКВ} \cdot (z_1 - h)] + \cos[2 \cdot k_{ЭКВ} \cdot (z_1 - h)]}{\cosh(2 \cdot k_{ЭКВ} \cdot h) + \cos(2 \cdot k_{ЭКВ} \cdot h)}}$$



$$J_{m,cp} := \frac{\sum_{i=1}^{imax} J_{m_i}}{imax} \quad J_{m,cp} = 1.293 A \cdot mm^{-2}$$

Рис. 14.2. Фрагмент *MathCAD*'овского файла расчета распределения плотности тока по высоте прямоугольного массивного стержня

Моделирование этой задачи с помощью программы *FEMM* дает картину поля и график распределения плотности тока по высоте провода, показанные на следующем рисунке. Результаты моделирования сравниваются с расчетом по (14.6).



**Рис. 14.3. Результаты моделирования электромагнитного поля в прямоугольном пазу, содержащем массивный стержень**

При моделировании этой задачи в проводе был задан такой же полный ток, как и в примере расчета (3000 А).

Для оценки степени вытеснения тока в обмотках электрических машин обычно вводят понятие приведенной высоты провода:

$$\xi = k'h = \frac{h}{\Delta'} \quad (14.7)$$

При  $\xi \leq 1$  имеет место слабо выраженный поверхностный эффект, при  $\xi \geq 2,5$  - резко выраженный поверхностный эффект.

## 14.2. Увеличение активного сопротивления провода при поверхностном эффекте

Комплексная амплитуда мощности, поступающей в провод, выражается через комплексные амплитуды вектора Умова-Пойнтинга на верхней и нижней гранях провода. Из данного ранее определения этого вектора можно вывести:

$$\dot{P}_{m(z=0)} = \left( \frac{\dot{E}_m H_m^*}{2} \right)_{z=0}$$

и

$$\dot{P}_{m(z=h)} = \left( \frac{\dot{E}_m H_m^*}{2} \right)_{z=h} = 0.$$

Полная мощность, поступающая в провод через грань  $b_n l$ , равна

$$\dot{S}_m = b_n l \cdot \dot{P}_{m(z=0)}.$$

После преобразований получим:

$$\dot{S}_m = \frac{I_m^2 l \alpha' \operatorname{ch}(\alpha' h) \operatorname{sh}(\alpha' h)^*}{2 b_n \gamma' |\operatorname{sh}(\alpha' h)|^2}. \quad (14.8)$$

Вещественная часть полной мощности, представляющая собой *активную* мощность, превращается в тепло:

$$P_a = \operatorname{Re}(\dot{S}_m) = I^2 r = \frac{I_m^2 r}{2},$$

откуда

$$r = 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\dot{S}_m}{I_m^2} \right). \quad (14.9)$$

Таким образом, активное сопротивление переменному току мы определяем здесь *не через свойства материала и размеры объекта, а через потери мощности*. Другими словами, для точного определения  $r$  необходимо решить полевую задачу.

Сравним активное сопротивление на переменном токе с сопротивлением проводника постоянному току

$$r_0 = \frac{l}{\gamma b_s h} = \frac{l}{\gamma' b_n h}$$

Увеличение активного сопротивления на переменном токе, обусловленное вытеснением тока, принято оценивать коэффициентом увеличения сопротивления

$$k_r = \frac{r}{r_0} = \varphi(\xi),$$

где

$$\varphi(\xi) = \frac{\xi(\operatorname{sh}(2\xi) + \sin(2\xi))}{\operatorname{ch}(2\xi) - \cos(2\xi)}$$

одна из функций Эмде.

В практических расчетах приведенную высоту проводника и функции Эмде обычно вычисляют по приближенным выражениям:

$$\text{при } \xi \leq 1 \quad \varphi(\xi) \approx 1 + \frac{4}{45} \xi^4$$

$$\text{при } \xi > 2 \quad \varphi(\xi) \approx \xi$$

Таким образом, при резко выраженном поверхностном эффекте, для которого приведенная высота проводника больше 2,5 (т.е. более чем в 2,5 раза превышает глубину проникновения поля в проводящее полупространство, имеющее свойства материала проводника) **активное сопротивление на переменном токе возрастает по сравнению с сопротивлением постоянному току в  $\xi$  раз.**

Увеличение активного сопротивления на переменном токе широко используется в электрических машинах. Еще в конце позапрошлого века выдающийся русский инженер Михаил Осипович Доливо-Добровольский предложил в роторах асинхронных двигателей выполнять узкие и относительно глубокие пазы. Как известно, частота токов в короткозамкнутых роторах асинхронных

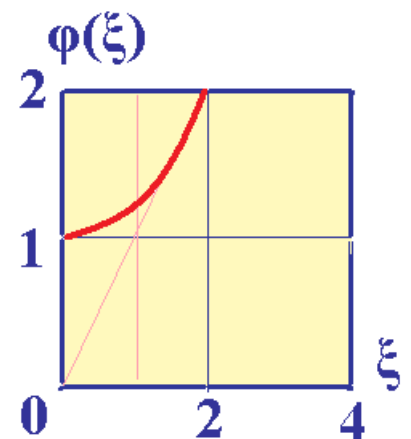


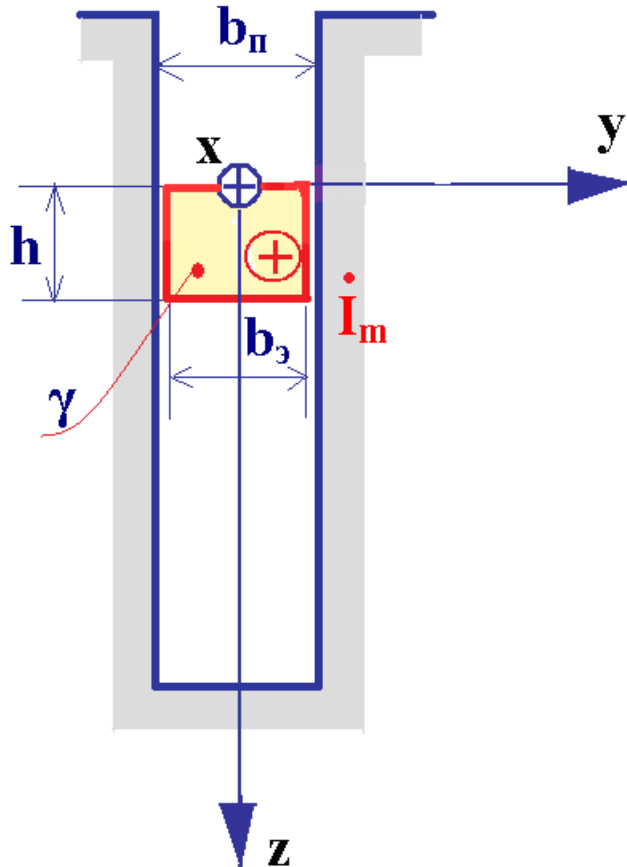
Рис.14.4. Первая функция Эмде

двигателей в начале пуска равна частоте сети, что создает условия для проявления поверхностного эффекта, вызывающего повышение сопротивления ротора и, следовательно, начального пускового момента. Важно и то, что начальный пусковой ток при этом снижается. В дальнейшем, по мере разгона двигателя, частота токов в роторе убывает пропорционально скольжению и вытеснение тока практически не проявляется. Уменьшение активного сопротивления ротора при этом имеет благоприятным следствием то, что потери в обмотке ротора при режимах работы, близких к номинальному, снижаются. Таким образом, предложив выполнять на роторе короткозамкнутого асинхронного двигателя глубокие узкие пазы, М.О. Доливо-Добровольский, по-существу, наделил его такой же способностью улучшать свои пусковые свойства, какой обладает асинхронный двигатель с фазным ротором. Существенным, однако, является то, что в короткозамкнутом асинхронном двигателе изменение параметров происходит, во-первых, бесконтактно и, во-вторых, автоматически. Безусловно, предложенный М.О. Доливо-Добровольским глубокопазный ротор асинхронного двигателя является одним из наиболее красивых инженерных решений в истории электротехники.

### **14.3. Распределение поля в прямоугольном пазу электрической машины, содержащем несколько проводов**

Предположим, что в пазу имеется несколько одинаковых проводников, каждый из которых имеет высоту  $h$ . Ток  $\dot{I}_m$ , протекающий по проводам, считается заданным. Предполагается, что все провода соединены последовательно или что они транспонированы (т.е. особым образом переплетены, так, что все провода в конечном счете обладают одинаковыми не только активными, но и индуктивными сопротивлениями).





**Рис.14.5. Рассмотрение  $p$ -го проводника**

Это предположение позволяет считать, что по каждому из проводов протекает один и тот же ток. Пронумеруем провода, начиная от нижнего, расположенного у дна паза, и рассмотрим  $p$ -й провод.

Поместив начало координат на верхней грани  $p$ -го провода, получим следующие выражения для комплексных амплитуд напряженности магнитного поля и плотности тока:

НОГО ПОЛЯ И ПЛОТНОСТИ ТОКА:

$$\dot{H}_m = \frac{\dot{I}_m}{b_n \operatorname{sh}(\alpha' h)} [(p-1) \operatorname{sh}(\alpha' z) - p \cdot \operatorname{sh}(\alpha'(z-h))] \quad (14.11)$$

$$\dot{J}_m = \gamma \dot{E}_m = \frac{\dot{I}_m \alpha'}{b_n \operatorname{sh}(\alpha' h)} [p \operatorname{ch}(\alpha'(z-h)) - (p-1) \cdot \operatorname{ch}(\alpha' z)] \quad (14.12)$$

Полезно найти распределение относительной плотности тока, рассчитанной как отношение  $\dot{J}_m$  по (14.12) к средней комплексной плотности тока

$$\dot{J}_{m.c.p} = \frac{\dot{I}_m}{b_n h}.$$

$$\frac{\dot{J}_m}{\dot{J}_{m.c.p}} = \frac{\alpha' h}{\operatorname{sh}(\alpha' h)} [p \operatorname{ch}(\alpha'(z-h)) - (p-1) \cdot \operatorname{ch}(\alpha' z)] \quad (14.13)$$

Перераспределение плотности тока в проводнике, обусловленное наведенными в нем вихревыми токами, не изменяет общего тока, но приводят к

увеличению потерь в проводе и, таким образом, в соответствии с (14.9), к увеличению его активного сопротивления (напомним, что удельные потери пропорциональны квадрату плотности тока (см. (14.73))).

Мощность, выделяющуюся в  $p$ -м проводе, как и ранее, определим, найдя разность значений вектора Умова-Пойнтинга на верхней и нижней его гранях:

$$P_a = \mathbf{Re}(\dot{S}) = \mathbf{Re}[b_n I (\dot{\Pi}_{m(z=0)} - \dot{\Pi}_{m(z=h)})] . \quad (14.14)$$

Воспользуемся введенным в предыдущем параграфе понятием коэффициента увеличения сопротивления применительно к отдельно рассматриваемому проводнику:

$$k_{rp} = \frac{r_p}{r_0} = \varphi(\xi) + p(p-1)\psi(\xi), \quad (14.14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\xi) &= \frac{\xi(\mathbf{sh}(2\xi) + \mathbf{sin}(2\xi))}{\mathbf{ch}(2\xi) - \mathbf{cos}(2\xi)} \\ \psi(\xi) &= \frac{\xi(\mathbf{sh}(\xi) - \mathbf{sin}(\xi))}{\mathbf{ch}(\xi) + \mathbf{cos}(\xi)} \end{aligned} \right\} \quad (14.16)$$

- функции Эмде.

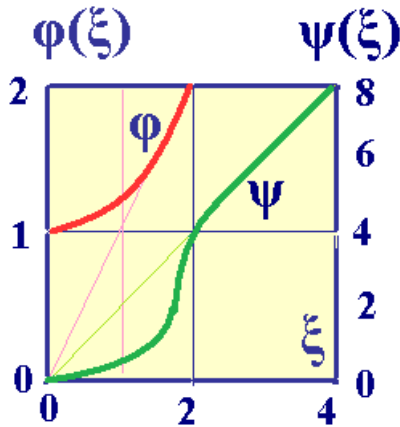


Рис.14.6. Функции Эмде

Из графиков функций Эмде следует, при резко выраженном поверхностном эффекте  $\varphi(\xi)$  и  $\psi(\xi)$  хорошо аппроксимируются отрезками прямых.

$$\text{При } \xi \leq 1: \quad \varphi(\xi) \approx 1 + \frac{4}{45} \xi^4$$

$$\psi(\xi) \approx \frac{1}{3} \xi^4$$

$$\text{При } \xi \geq 2: \quad \varphi(\xi) \approx \xi$$

$$\psi(\xi) \approx 2\xi$$

Формулы для расчета коэффициента увеличения активного сопротивления могут быть распространены на двухслойные обмотки с укороченным шагом. Укорочение шага обмотки (по отношению к полюсному делению) обычно

выполняется для улучшения гармонического состава временной зависимости ЭДС и/или пространственного распределения МДС обмотки. Так, например, укорочение шага обмотки на  $1/5$  полюсного деления исключает ее взаимодействие с пятой гармоникой поля в зазоре, что улучшает форму ЭДС машины, работающей в режиме генератора. При работе машины двигателем обмотка с укорочением шага на  $1/5$  полюсного деления при питании синусоидальным током не создает в зазоре поле пятой гармоники.

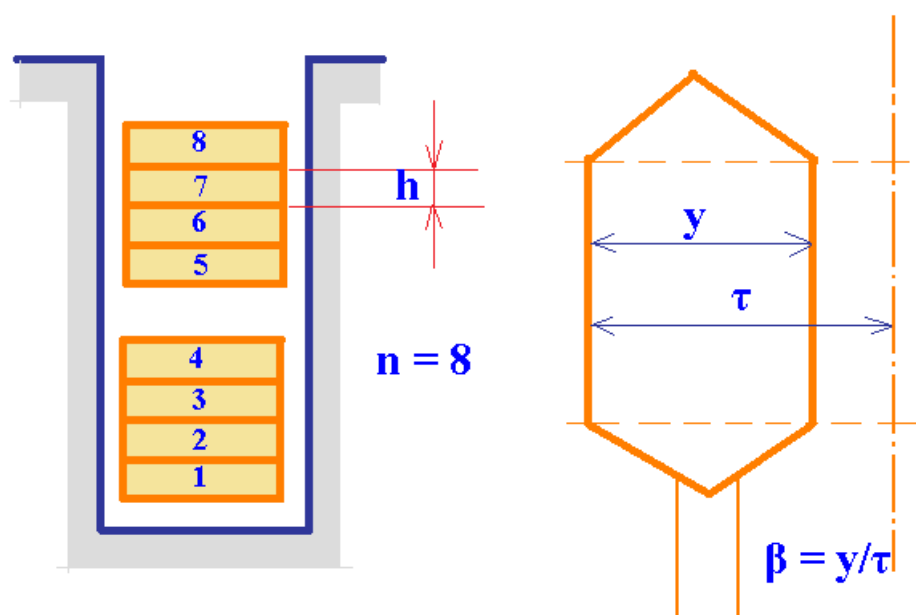


Рис. 14.7. Многовитковая катушка обмотки с укороченным шагом

Средний коэффициент увеличения активного сопротивления двухслойной укороченной обмотки равен:

$$k_{r,cp} = \frac{(r/n)}{r_0} = \varphi(\xi) + \frac{k'_\beta n^2 - 1}{3} \psi(\xi), \quad (14.17)$$

где  $n$  – общее число элементарных проводников по высоте паза (в обоих слоях обмотки);  $r$  – сумма активных сопротивлений переменному току всех элементарных проводов;  $k'_\beta$  - коэффициент, учитывающий укорочение шага;  $\beta$  - относительный шаг (отношение шага к полюсному делению).

$$k'_\beta = \frac{(9\beta + 7)}{16} \quad (14.18)$$

Проанализируем выражение для  $k_{r.cp} = r/(n \cdot r_0)$ , где

$$r = \sum_{p=1}^n r_p = r_0 \sum_{p=1}^n [\varphi(\xi) + p(p-1)\psi(\xi)].$$

Поскольку

$$\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n p(p-1) = \frac{n^2 - 1}{3},$$

получаем:

$$k_{r.cp} = \frac{r}{n \cdot r_0} = \varphi(\xi) + \frac{n^2 - 1}{3} \psi(\xi) \quad (14.19)$$

Было бы ошибкой, глядя на (14.19), сделать вывод о том, что с ростом  $n$  растёт и  $k_{r.cp}$ . В действительности, напротив, с увеличением числа последовательно соединённых элементарных проводов  $n$  сопротивление  $r$  и, следовательно,  $k_{r.cp}$ , уменьшаются. Убедиться в этом можно, воспользовавшись приближёнными выражениями для функций Эмде. Обозначим через  $H = n \cdot h$  общую высоту меди в пазу. Тогда

$$\xi = \frac{h}{\Delta'} = \frac{H}{n \Delta'}.$$

Тогда для  $\xi \leq 1$

$$\varphi(\xi) \approx \frac{1}{3} \xi^4 = \frac{1}{3} \frac{H^4}{(\Delta')^4} \frac{1}{n^4} = C_\psi \frac{1}{n^4} \quad (14.20)$$

и

$$k_{r.cp} = \frac{r}{n \cdot r_0} = \varphi(\xi) + \frac{n^2 - 1}{3} \psi(\xi) \approx 1 + \frac{n^2}{3} C_\psi \frac{1}{n^4} = 1 + C'_\psi \frac{1}{n^2}. \quad (14.21)$$

В (14.21) предполагается, что  $n > 20$  и  $\xi \leq 1$   $\varphi(\xi) \approx 1$ .

**Пример.**

Пусть  $n = 50$ . Найти  $\psi(\xi)$  и  $H$ , при котором увеличение сопротивления

$\frac{n^2 - 1}{3} \psi(\xi)$  равно единице.

Значение функции Эмде, удовлетворяющее поставленному условию, найдем, решив уравнение:

$$\frac{50^2 - 1}{3} \psi(\xi) = 1,$$

При  $\psi(\xi) = 1,2 \cdot 10^{-3}$ , являющемся решением этого уравнения  $\phi(\xi) \approx 1$  и  $k_{r,sp} \approx 2$ . Высоту провода  $H$  найдем из приближенного выражения для  $\psi(\xi)$ :

$$\psi(\xi) \approx \frac{1}{3} \xi^4 \text{ или } \xi^4 = 3 \cdot 1,2 \cdot 10^{-3} = 36 \cdot 10^{-4} \text{ и } \xi = 0,1 \cdot \sqrt[4]{36} = 0,245,$$

откуда высота элементарного провода и общая высота 50 проводов равны:

$$h = 0,245 \cdot \Delta' = 0,245 \cdot 11 = 2,6 \text{ мм и } H = 130 \text{ мм.}$$

Итак, для стержня обмотки, по высоте которого расположены 50 элементарных транспонированных медных проводов при частоте 50 Гц активное сопротивление на переменном токе вдвое больше сопротивления постоянному току. Высота каждого элементарного провода при этом равна 2,6 мм.

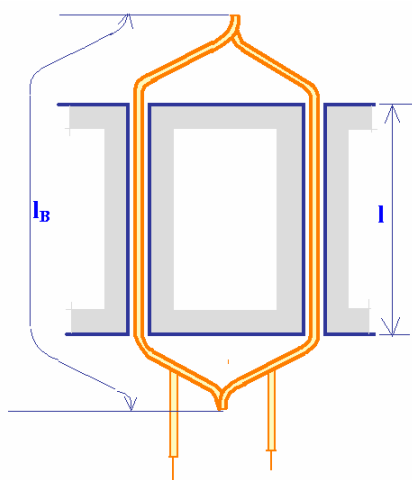


Рис. 14.8 Длина полувитка

Выполнение транспозиции проводов предполагает наличие в пазу по меньшей мере двух вертикальных рядов (в данном случае по 50 проводов в каждом) элементарных проводов. В крупных машинах с непосредственным водяным охлаждением часть элементарных проводов выполняются из тонкостенных медных трубок прямоугольного сечения. В машинах с непосредственным водя-

охлаждением между вертикальными рядами элементарных проводов встраивают тонкостенные трубки, занимающие почти всю высоту стержня, по которым под давлением, создаваемым вентилятором, проходит водород.

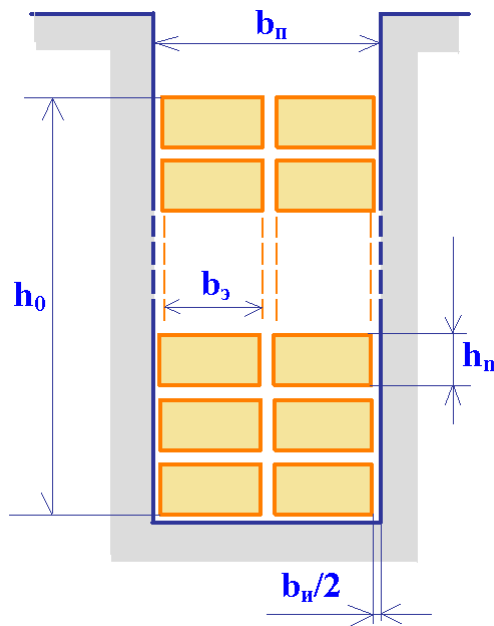
Для многовитковой катушки или транспонированного стержня с длиной полувитка  $l_B$  при активной длине  $l$  коэффициент увеличения сопротивления на переменном токе равен

$$k_r = \frac{k_{r,sp} l + k_{r,l} l_l}{l + l_l} \quad (14.22)$$

где  $l_l = l_B - l$  (см. рисунок).

#### 14.4. Задача о нахождении оптимального числа элементарных проводов, на которое надо разбить стержень обмотки, лежащий в прямоугольном пазу

Требуется построить зависимость активного сопротивления переменному току  $r$  медного стержня с высотой  $h_0 = 102$  мм (размер по глубине паза), состоящего из двух рядов элементарных проводов по  $n$  проводов в каждом. Предполагается, что элементарные провода транспонированы и, таким образом,



можно считать, что по ним протекают равные токи. Другие данные: частота тока  $f = 50$  Гц; длина провода (длина активной зоны машины)  $l = 1000$  мм; ширина паза  $b_n = 20,7$  мм; ширина элементарного провода  $b_3 = 10$  мм; двусторонняя ширина изоляции элементарного провода  $b_w = 0,35$  мм; электропроводность меди  $\gamma_{Cu} = 5,71 \cdot 10^7$  (Ом·м)<sup>-1</sup>

Рис. 14.9. К задаче об оптимальном выборе числа элементарных проводов

Оценка влияния числа элементарных проводов на активное сопротивление стержня стержневой обмотки

**Дано:**

$$f := 50 \cdot \text{Гц} \quad h_0 := 102 \cdot \text{мм} \quad b_{\text{п}} := 20.7 \cdot \text{мм} \quad b_{\text{з}} := 10 \cdot \text{мм} \quad b_{\text{и}} := 0.35 \cdot \text{мм}$$

$$l := 1000 \cdot \text{мм} \quad \gamma_{\text{Cu}} := 5.71 \cdot 10^7 \cdot (\text{Ом} \cdot \text{м})^{-1}$$

**Число элементарных проводов варьируется:**

$$n_{\text{max}} := 150 \quad n := 1..n_{\text{max}}$$

**n - число элементарных проводов по высоте паза**

**Глубина проникновения поля в полупространство из материала провода**

$$\Delta_{\text{Cu}} := \sqrt{\frac{2}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \gamma_{\text{Cu}} \cdot \mu_0}}$$

**Размер элементарного провода по высоте паза**

$$h_{\text{пр.эл}_n} := \frac{h_0 - n \cdot b_{\text{и}}}{n}$$

**Сопротивление постоянному току стержня из 2n элементарных проводов, соединенных параллельно**

$$r_{0n_n} := \frac{1}{\gamma_{\text{Cu}}} \cdot \frac{1}{(b_{\text{п}} \cdot 0.5 - b_{\text{и}}) \cdot h_{\text{пр.эл}_n}} \cdot \frac{1}{2 \cdot n}$$

**Сопротивление стержня постоянному току (при n=1 и одном проводе по ширине паза)**

$$r_{01} := \frac{1}{\gamma_{\text{Cu}}} \cdot \frac{1}{(b_{\text{п}} - b_{\text{и}}) \cdot (h_0 - b_{\text{и}})}$$

**Относительное сопротивление постоянному току стержня из 2n элементарных проводов**

$$r_{0n.\text{oe}_n} := \frac{r_{0n_n}}{r_{01}}$$

**Приведенная высота элементарного провода**

$$\xi_n := \frac{h_{\text{пр.эл}_n}}{\Delta_{\text{Cu}}}$$

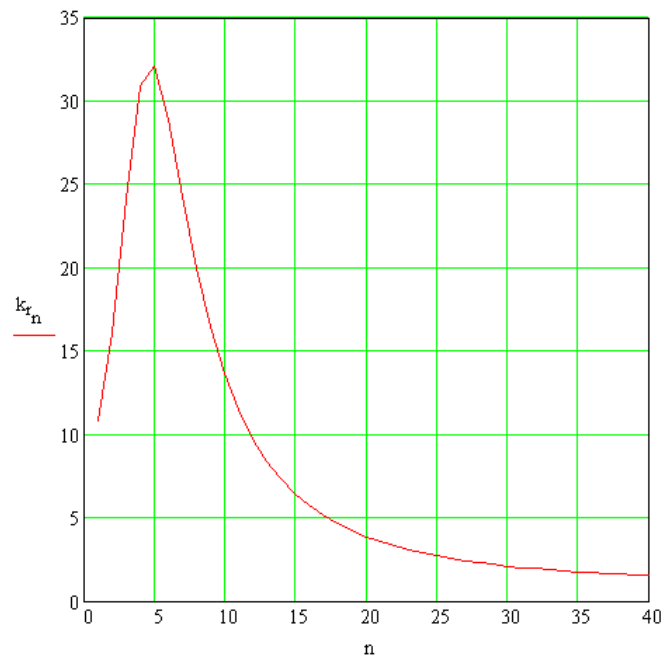
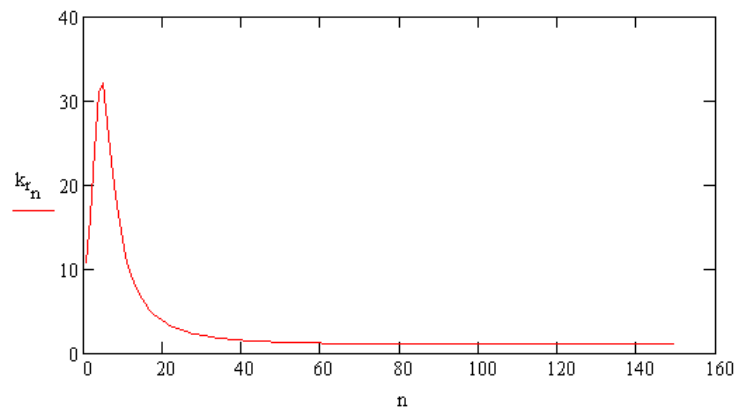
**Функции Эмде**

$$\phi_{\xi_n} := \xi_n \cdot \frac{\sinh(2 \cdot \xi_n) + \sin(2 \cdot \xi_n)}{\cosh(2 \cdot \xi_n) - \cos(2 \cdot \xi_n)}$$

$$\psi_{\xi_n} := 2 \cdot \left( \xi_n \cdot \frac{\sinh(\xi_n) - \sin(\xi_n)}{\cosh(\xi_n) + \cos(\xi_n)} \right)$$

**Коэффициент увеличения сопротивления стержня на переменном токе**

$$k_{r_n} := \phi_{\xi_n} + \frac{n^2 - 1}{3} \cdot \psi_{\xi_n}$$



**Рис. 14.10. К определению оптимального числа элементарных проводов**

$$\xi^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10.792	5.377	3.572	2.67	2.129	1.768	1.51	1.316	1.166

$$\phi_\xi^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10.792	5.377	3.58	2.664	2.048	1.637	1.386	1.24	1.154

$$\psi_\xi^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	21.584	10.771	7.694	5.648	3.757	2.336	1.432

$$k_r^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10.792	16.148	24.096	30.906	32.108	28.894	24.297	19.989	16.444



Расчет по аналитическим формулам проверим численным экспериментом на конечно-элементной модели. При моделировании будем сохранять полный ток паза, т.е. суммарный ток элементарных проводов. В программе *FEMM* это можно осуществить, задав последовательное соединение элементарных проводов и общий для них ток равным  $I_m/2n$ , где  $I_m$  – полный ток паза,  $n$  – число элементарных проводов по высоте стержня.

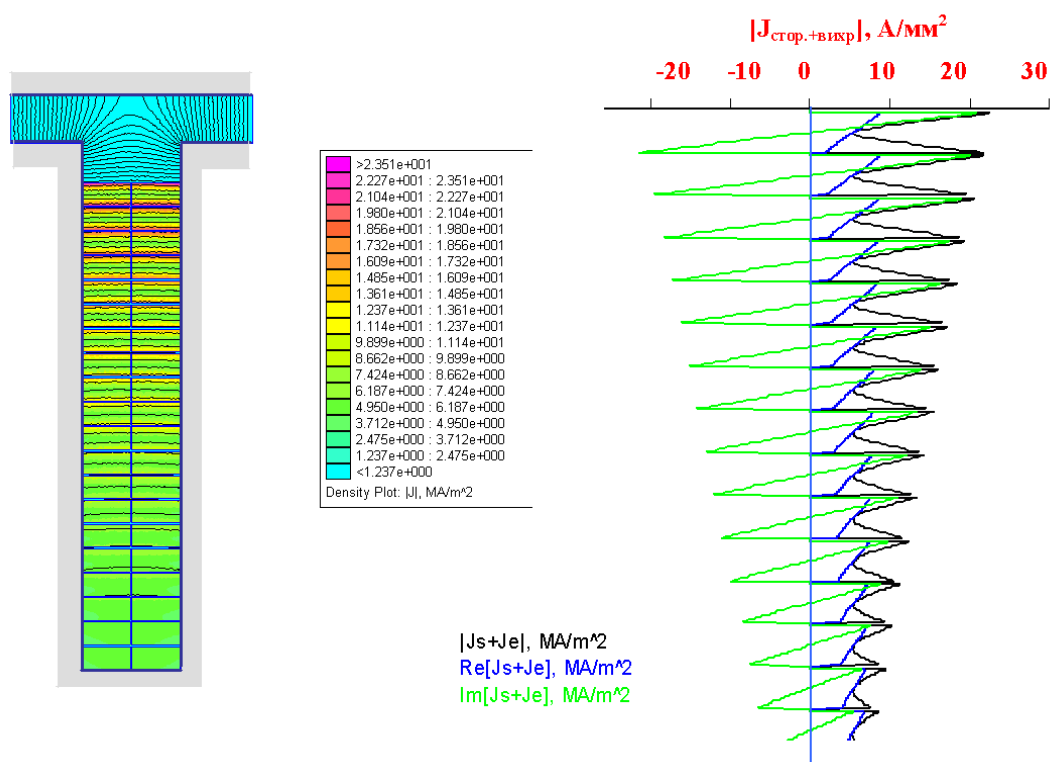


Рис. 14.11. Распределение плотности тока в транспонированном стержне, полученное на конечно-элементной модели

На рисунке показана конечно-элементная модель, соответствующая  $n = 20$ . В правой части приведены графики распределения плотности тока по высоте стержня.

Активное сопротивление на переменном токе по результатам моделирования находим по значению выделенной мощности, которую можно найти, проинтегрировав потери по участкам модели, соответствующим проводам.

Следует заметить, что результаты моделирования зависят от способа задания условий Неймана на участках границы, соответствующих поверхностям сердечников. При моделировании переменного поля с помощью программы *FEMM* при задании граничных условий на поверхностях сердечников с бесконечно большой магнитной проницаемостью, выбрав пункт *Small skin depth*, следует задать достаточно большое значение  $\mu_r$  (например,  $10^6$ ) и достаточно малое значение  $\sigma$  (например, 0,05 МСм/м).

Число элементарных проводов по высоте стержня, $n$	$k_r$ , расчет по аналитическим выражениям	$k_r$ , по результатам моделирования
1	10,79	10,53
2	16,14	14,85
3	24,10	23,66
4	30,91	29,85
5	32,11	30,11
6	28,89	27,39
7	24,30	22,88
8	19,99	18,76
20	3,86	3,66

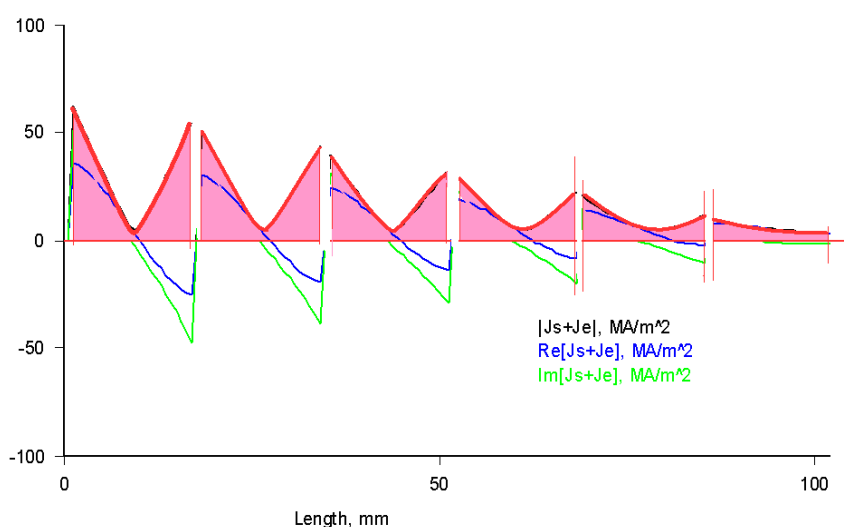


Рис. 14.12. Распределение плотности тока в транспонированном стержне при  $n = 12$  (два вертикальных ряда по 6 элементарных проводов в каждом)

На рисунке показано распределение плотности тока по высоте стержня, состоящего из двенадцати элементарных проводов.

### Задача.

В пазу ротора короткозамкнутого асинхронного двигателя расположен медный стержень шириной  $b_3 = 7,5$  мм и высотой  $h = 30$  мм, имеющий длину  $l = 140$  мм. Ширина паза ротора  $b_{\text{п}} = 8$  мм. По стержню протекает ток  $I_m = 1125$  А.

Найти: сопротивления стержня постоянному и переменному току при частоте  $f = 50$  Гц, при температурах  $20^\circ\text{C}$  и  $200^\circ\text{C}$ , а также потери в стержне.

Электропроводность и удельное сопротивление меди при различных температурах:

$$\rho_{20} = 0,0175 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$$

$$\gamma_{20} = 5,71 \cdot 10^7 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$$

$$\rho_t = \rho_{20} (1 + 0,004(t - 20))$$

$$\rho_{75} = 0,0214 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$$

$$\gamma_{75} = 4,60 \cdot 10^7 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$$

$$\rho_{130} = 0,0252 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$$

$$\gamma_{130} = 3,97 \cdot 10^7 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$$

$$\rho_{200} = 0,0301 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}\cdot\text{м}$$

$$\gamma_{200} = 3,32 \cdot 10^7 \text{ (Ом}\cdot\text{м)}^{-1}$$

Сопротивление постоянному току:

$$r_{0(t)} = \frac{l}{\gamma_t h b_3}$$

$$r_{0(20)} = \frac{0,15}{5,71 \cdot 10^7 \cdot 0,03 \cdot 0,0075} = 1,16 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}$$

$$r_{0(200)} = \frac{0,15}{3,32 \cdot 10^7 \cdot 0,03 \cdot 0,0075} = 2,00 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}$$

$$\Delta'_{20} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi 50 \cdot 5,71 \cdot 10^7 \cdot 4\pi 10^{-7}}} = 0,00973 \text{ м}$$

$$\Delta'_{200} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{7,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2\pi 50 \cdot 3,32 \cdot 10^7 \cdot 4\pi 10^{-7}}} = 0,0127 \text{ м}$$

$$\xi_{20} = \frac{h}{\Delta'_{20}} = \frac{0,03}{0,00973} = 3,08$$

$$\xi_{200} = \frac{h}{\Delta'_{200}} = \frac{0,03}{0,0127} = 2,36$$

$$k_{r(20)} = \varphi(\xi_{20}) \approx 3,08$$

$$k_{r(200)} = \varphi(\xi_{200}) \approx 2,36$$

Пусть частота 50 Гц соответствует скольжению, равному единице, тогда при скольжении 0,1 частота равна 5 Гц, а при скольжении 0,02 (близко к обычным значениям номинального скольжения) – 1 Гц. Соответствующие значения коэффициента  $k_r$  при 20°C равны 1,08 и 1,003. Таким образом, существенное увеличение активного сопротивления ротора короткозамкнутого асинхронного двигателя имеет место только при больших скольжениях, т.е. в начале пуска.

Активные сопротивления стержня при 50 Гц:

$$r_{20} = r_{0(20)} \cdot k_{r(20)} = 1,16 \cdot 10^{-5} \cdot 3,08 = 3,57 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}$$

$$r_{200} = r_{0(200)} \cdot k_{r(200)} = 2,00 \cdot 10^{-5} \cdot 2,36 = 4,72 \cdot 10^{-5} \text{ Ом}$$

Отношения сопротивлений при различных температурах:

$$\frac{r_{0(20)}}{r_{0(200)}} = \frac{1,16 \cdot 10^{-5}}{2,00 \cdot 10^{-5}} = 0,58$$

$$\frac{r_{20}}{r_{200}} = \frac{3,57 \cdot 10^{-5}}{4,72 \cdot 10^{-5}} = 0,756$$

Для вычисления плотностей тока найдем значения гиперболических и тригонометрических косинусов на различных участках стержня:

$$J_m = \frac{I_m \sqrt{2} \cdot k'}{b_n} \sqrt{\frac{\mathbf{ch}(2k'(z-h)) + \mathbf{cos}(2k'(z-h))}{\mathbf{ch}(2k'h) - \mathbf{cos}(2k'h)}}$$

При  $z = 0$

$$\mathbf{ch}(2k'(z-h)) = \mathbf{ch}(2k'h) = \frac{e^{2\xi} + e^{-2\xi}}{2} = 236,7$$

$$\mathbf{cos}(2k'(z-h)) = \mathbf{cos}(2k'h) = \mathbf{cos}(2\xi) = 0,992$$

При  $z = h/2$

$$\mathbf{ch}(2k'(z-h)) = \mathbf{ch}(k'h) = \frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2} = 10,9$$

$$\mathbf{cos}(2k'(z-h)) = \mathbf{cos}(k'h) = \mathbf{cos}(\xi) = -0,998$$

При  $z = 0,75 \cdot h$

$$\mathbf{ch}(2k'(z-h)) = \mathbf{ch}(0,5 \cdot k'h) = \frac{e^{0,5\xi} + e^{-0,5\xi}}{2} = 2,43$$

$$\mathbf{cos}(2k'(z-h)) = \mathbf{cos}(0,5k'h) = \mathbf{cos}(0,5\xi) = 0,037$$

При  $z = h$

$$\mathbf{ch}(2k'(z-h)) = 1$$

$$\mathbf{cos}(2k'(z-h)) = 1$$

Плотности тока:

при  $z = 0$ :

$$J_m = \frac{1125\sqrt{2}}{0,008 \cdot 0,0973} \sqrt{\frac{236,7 + 0,992}{236,7 - 0,992}} = 20,4 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2 = 20,4 \text{ А/мм}^2$$

при  $z = 0,5 \cdot h$ :

$$J_m = \frac{1125\sqrt{2}}{0,008 \cdot 0,0973} \sqrt{\frac{10,9 - 0,998}{236,7 - 0,992}} = 4,17 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2 = 4,17 \text{ А/мм}^2$$

при  $z = 0,75 \cdot h$ :

$$J_m = \frac{1125\sqrt{2}}{0,008 \cdot 0,0973} \sqrt{\frac{2,43 + 0,0307}{236,7 - 0,992}} = 2,07 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2 = 2,07 \text{ А/мм}^2$$

при  $z = h$ :

$$J_m = \frac{1125\sqrt{2}}{0,008 \cdot 0,0973} \sqrt{\frac{1+1}{236,7 - 0,992}} = 1,87 \cdot 10^6 \text{ А/м}^2 = 1,87 \text{ А/мм}^2$$

Потери в стержне:

$$P_{20} = r_{20} \frac{I_m^2}{2} = 3,57 \cdot 10^{-5} \frac{1125^2}{2} = 22,59 \text{ Вт}$$

$$P_{200} = r_{200} \frac{I_m^2}{2} = 4,72 \cdot 10^{-5} \frac{1125^2}{2} = 29,86 \text{ Вт}$$